前　　言

本书根据1978年至1980年几次全国造船专业统编教材会议所通过的《船体振动学》大纲，并参考陆鑫森、金咸定、刘涌康编的《船体振动学》（1980年12月国防版）和翁长俭、张保玉编著的《内河船的振动与噪声》（1981年8月交通版），按40学时的要求编写的。船舶工程类教材编审组1983年7月哈尔滨会议和1984年3月武汉会议都确定本书为造船专业全国统编教材。

本书共分八章。前三章讲述单自由度系统、多自由度系统和弹性体振动的基本理论与计算方法，属于专业基础范畴。第四到第七章讨论船体振动特性和计算、船体振动的原因、船体振动测试与振动衡准、船体防振与减振措施，属专业课内容。第八章讨论船舶噪声及其控制，供课余自学用。书后附有习题与附录。书中有*号者表示选修内容。

本书在编写过程中曾向有关院校和个人征求意见，并得到大连工学院、海军工程学院、镇江船舶工程学院、华南工学院、华中工学院、哈尔滨船舶工程学院等的大力支持，并提出了许多宝贵意见。另外，黄骏德、熊志民也对本书的修改提了很好的意见，在此一并表示感谢。

本书绪论、第一、二、三、四、八章由翁长俭编写，第五、六、七章及习题由张保玉编写。全书由大连工学院赵德有主审。由于时间仓促，水平有限，错误和不妥之处，恳望读者指正。

内 容 简 介

全书共分八章。第一到第三章是有限自由度系统和弹性体系统的振动原理，是研究船体振动的理论基础。第四到第七章是船体振动，包括船体振动的特性和计算，船体振动的原因，船体防振、减振措施。第八章是船舶噪声，简明地叙述了船舶噪声的基础知识与船舶噪声控制原理。书后附有习题和附录。

本书为高等学校船舶设计与制造专业教材，也可供航运与造船工程技术人员参考。

高等学校试用教材

船体振动学

（船舶设计与制造专业用）

武汉水运工程学院

翁长俭　张保玉　编

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16　印张：13.25　字数：326 千

1 9 8 5 年12月　第 1 版

1 9 8 5 年12月　第 1 版　第 1 次印刷

印数：0001—3,200 册　定价：3.20元

目　录

本书符号表

A　振幅、面积、常数；
a　加速度；
B　船宽；
C　粘性阻尼系数、常数；
c　声速；
D　直径、船舶型深；
d　直径，材料或结构的非弹性阻尼系数；
E　法向弹性模数；
$\bar{E}$　复数法向弹性模数；
e　偏心距；
F　力；
f　以赫兹(Hz)计的频率；
f_n　以周每分(1/min)计的频率；
G　剪切弹性模数；
$\bar{G}$　复数剪切弹性模数；
g　重力加速度；
H　高度；
h　高度、板厚；
I　剖面惯性矩、冲量、声强；
J　转动惯量；
k　柴油机冲程阶次数；
K　弹簧刚度；
K_φ　扭簧刚度；
K_j　第j谐调广义刚度；
L　长度、船长；
L_p　声压级；
L_I　声强级；
L_w　声功率级；
l　长度；
M　力矩、弯矩、质量；
M_j　第j谐调广义质量；
m　质量、柴油机冲程系数；
n　转速；
P　荷重；
P(t)干扰力；
P　声压；
p_e　有效声压；
p(t)主坐标、坐标函数；
Q　广义力、品质因子；
q(t)广义坐标；
R　半径、阻力；
r　半径、常数；
S　面距；
s　距离；
T　周期、轴向力、螺旋桨推力、动能；
T_D　位移的传递系数；
T_F　力的传递系数；
t　时间、厚度；
V　体积、位能；
v　速度；
W　重量、功、声功率；
u、v、w 位移、挠度；
x、y、z 位移、坐标；
α　动力放大系数；
β　相角、剪切角、船舶横剖面系数；
γ　比重、干扰力频率与固有频率之比；
δ　静伸长、对数衰减率；
ε　应变；
ζ　无因次阻尼系数；
η　隔振效率；
θ　转角、角位移、复数的幅角；
λ　特征值、波长；
μ　泊桑比；
ρ　密度；
σ　正应力；
τ　剪应力、形状参数；
φ　相位角；
$\varphi(x)$振形函数；
ψ　振幅衰减系数、相角；
ω　圆频率、干扰力频率、角速度；
ω_n　固有圆频率；
{A} 振幅列阵、常数列阵；
[C] 阻尼矩阵；
{F} 力列阵；

$[F]$　场迁移矩阵；
$[K]$　刚度矩阵；
$[M]$　质量矩阵；
$\{P\}$　对应于主坐标的广义力列阵；
$[P]$　点迁移矩阵；
$\{p\}$　主坐标列阵；
$\{Q\}$　对应于广义坐标的广义力列阵；
$\{q\}$　广义坐标列阵；
$\{Z\}$　状态矢量列阵；
$[\Gamma]$　柔度矩阵；
$[\pi]$　迁移矩阵；
$[\rho]$　固有振形矩阵；
$[\varphi]$　振形矩阵、正则振形矩阵；
$[\diagdown I \diagdown]$ 单位矩阵；
$[\diagdown \lambda \diagdown]$ 特征值对角阵。

绪　论

早在十九世纪后期，船体振动问题就开始引起人们的注意。近年来，随着航运事业的发展，主机功率和转速的提高，以及船舶吨位加大，肥大船型的出现，致使船体振动问题日益突出。由于造船技术的进步，船体结构减轻，相应地结构刚度也跟着减小，这就更易激起较大的船体振动。近一、二十年来，在我国亦有不少海洋和江河船舶发生过较严重的振动问题。

过大的船体振动可导致结构产生疲劳破坏，影响船员和旅客的居住舒适性，影响船员的工作效率，甚至身体健康，还会影响船上的设备和仪表的正常工作，降低使用精度，缩短使用寿命。

严重的船体振动的产生，除建造质量及营运因素外，主要是设计问题，即要求在船舶设计阶段就进行必要的结构动力计算。《船舶结构力学》和《船体强度》这两门课程主要是静力强度计算（后者还包括有一部分动强度内容），为结构静力学。而本课程则属于结构动力学范畴。

结构上所受的荷载可分为静力荷载和动力荷载两类：力的大小、方向和作用位置不随时间而变化或变化极其缓慢的称为静力荷载；力的大小、方向和作用位置随时间的改变而发生明显变化的，称为动力荷载。后者按时间变化的规律又可分为简谐周期荷载、非简谐周期荷载、冲击荷载、突加荷载和随机荷载五类。

结构的动力计算显然要比静力计算复杂，这是因为：

1.在结构的静力计算中，只需要知道荷载、结构的几何尺寸和弹性特征，便能确定其内力和位移。而结构的动力计算，则还需要知道结构的质量及其分布；

2.结构静力计算所得的内力和位移是确定的量值，不随时间而改变。而结构动力计算中由于荷载随时间而改变，因此求得的内力和位移也随时间而变化；

3.在动力荷载作用下，使结构的质量产生了加速度，因而引起了惯性力。所以，在动力荷载作用下，任一瞬时结构的位移应考虑动力荷载和惯性力两者共同作用的影响；

4.动力荷载与内力、位移之间，即使对弹性结构也不一定是线性关系，有时很小的动力负载就会引起很大的内力和位移。

结构动力计算的目的是在动力荷载作用下，确定结构的内力、位移等随时间变化的规律，从而求出其最大值作为结构设计的依据。

本书作为结构动力学的一部分，其主要内容为：

1.引起船体振动的原因；

2.船体结构的动力特性及其响应；

3.船体振动的容许标准；

4.防振与减振方法。

前三项相当于结构静力学中的外力、内力与许用应力。

本书主要讨论船体及其局部结构在主机、螺旋桨等产生的周期性干扰力作用下的稳态振

动。至于船体与波浪拍击所产生的冲击力，及船舶在波浪上受到的随机载荷所引起的船体强度问题，则在《船体强度》教材中讨论。本教材也不涉及随机振动和非线性振动。但为了掌握船体振动的内容，就需要振动理论的基本知识，故本教材前三章以较多的篇幅讨论了单自由度系统、多自由度系统和弹性体系统的振动理论。这不仅是学好后五章的基础，而且也是一个现代工科院校毕业生所必须具备的基本知识。

船体振动学科近十年来在国内外发展很快。作为结构振动计算，自从迁移矩阵法计算船体总振动以来，短短几年已发展有有限元法、模态综合法、杂交子结构法等作为实船和模型的计算方法，同时工程上实用的近似计算方法和公式也得到不断的发展与完善。在实验技术方面，由于电子技术的发展，激振、测试、记录和分析等实验手段日益更新，利用实验模态的模态分析方法亦已开始在船体振动领域应用。科学技术日新月异，但在教材编写中仍着眼于基本理论和基本知识，以此为基础，读者可进一步阅读有关文献，为发展本学科作出贡献。

最后需要说明：船舶噪声是与船舶振动密切相关的，严重的噪声同样影响了船舶的正常营运。作为环境科学的一项重要内容，近年来噪声问题得到了人们的关切和重视。考虑到本专业尚未设立相应的课程，故本教材以适当的篇幅介绍了船舶噪声的有关基础知识，供自学用。

第一章　单自由度系统的振动

§1-1　系统的简化与单自由度系统的自由振动

振动是生产实践中经常遇到的一种自然现象，出现于各生产领域之中。除船舶振动外，飞机、车辆等交通工具，房屋、桥梁、水坝、海洋工程等工程建筑，蒸汽机、柴油机、汽轮机等动力机械，以及各种机械设备和精密仪器、仪表，都有振动及防振、减振的问题。此外还有一些利用振动来满足各种不同用途的振动机械，可以大大提高劳动生产率。如铸造工业中用的振动造型机，土木建筑工业用的各种振动施工机械（振动打桩机、混凝土捣实器、破碎机、振动筛），以及振动输送带等。

为了研究振动的规律，我们必须将实际的工程振动，即振动系统加以抽象，简化为简单的力学模型。由于影响振动特性的主要因素是质量和弹性，而在实际的工程结构中，质量和弹性的分布都比较复杂，所以在进行振动分析时，需根据所要解决的问题，抓住主要特点加以简化。例如可将实际结构中弹性较小的质量简化成无弹性的集中质量，而将质量较小的弹性元件简化为无质量的弹簧。又如可将杆、板等构件理想化为质量和弹性均布或有规律分布的连续介质，这样实际结构就可简化为由以上这些元件构成的振动系统，并可用相应的坐标来确定其运动。

确定振动系统的运动所需的独立坐标数目即为系统的自由度数，这种确定系统在空间位置的独立参变量称为广义坐标。在系统具有几何约束的条件下，系统的自由度与广义坐标的数目相等。当实际的结构简化成几个没有弹性的集中质量和没有质量的弹簧构成的简化系统时，自由度是有限的。若一个系统，在空间内任何瞬时的位置只需用一个坐标来确定，则此系统就称为是一个自由度的系统，简称为单自由度系统。反之，若实际系统必须按连续介质来考虑，则有无限多个自由度，即系统的瞬时位置必须用函数形式来确定。

工程中的很多振动问题都可简化为（或近似看作为）单自由度系统的问题。如图 1-1 所示的安装在船底骨架上的往复式发动机，可简化为一上下直线运动的质量M。船体结构有一定的弹性，故它对发动机的作用可简化为一弹簧。发动机内部有活塞、连杆、曲柄、飞轮系统，它们在运转过程中的不平衡惯性力是引起发动机振动的原因，因此它们的作用相当于作用在质量 M 上的外力 $P(t)$。此外，船底结构对发动机振动还有阻尼作用，它相当于作用在质量 M 上的阻尼力 F_δ。当然上述简化仅仅是初步的、近似的，实际上发动机除了上下振动之外，还有其它方向的振动和摆动。且有时发动机与机座之间并非刚性联结，而是装有弹性减振器。这时进一步简化模型就不是单自由度系统，而是多自由度系统。可见系统的简化不

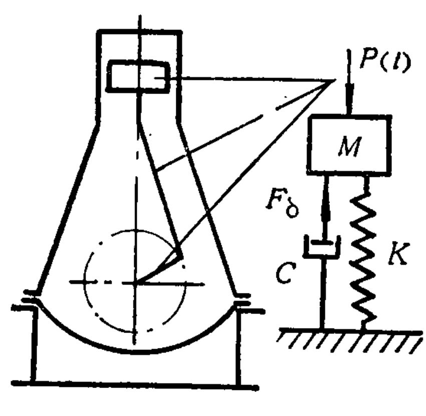

图 1-1

是绝对的，而是随着实际系统的复杂程度和要求的精度而异。

其次，振动系统中各参数的动态特性，严格地说都与系统的运动状态成非线性的复杂关系，这就给振动的研究带来极大的困难。幸而工程实际中的振动，包括船体振动，大多是微小的振动，因此就有可能将上述非线性关系加以线性化。当振动体的位移和加速度较小时，可认为弹性力是位移的一次函数，阻尼力是速度的一次函数。在这些条件下，系统的振动可用常系数线性微分方程来描述，称为线性振动。当然工程中也还有很多振动系统是不能线性化的，这就是非线性振动问题。本课程则限于线性振动。

前已述，工程中很多振动问题可简化为单自由度系统的问题。而单自由度系统的振动又揭示了振动现象的本质，是多自由度系统振动及船体振动的基础，故我们先研究单自由度系统的振动。对于图1-1所示的单自由度系统的弹簧质量系统，由理论力学中的达伦培尔原理可得其运动方程为

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=P(t) \tag{1-1}$$

式中：C——粘性阻尼系数；

K——弹簧的刚性系数，简称为弹簧刚度。

下面我们就以方程(1-1)来研究在给定激励作用下系统的动态特性。一个系统的特性由这些激励所产生的运动来表示，通常称为系统的响应。运动一般用位移来描述。激励可以表现为初始位移和初始速度，或者表现为外部作用力。系统对初始激励的响应通常称为自由振动，而对外部作用力的响应则称为强迫振动。

先研究无阻尼自由振动。如图1-2所示，即 $C=0$，$P(t)=0$，则式(1-1)变为

$$M\ddot{x}+Kx=0 \tag{1-2}$$

或

$$M\ddot{x}+K(x+\delta)-Mg=0$$

其中：

$$\delta=\frac{Mg}{K} \tag{1-3}$$

为弹簧在质量M作用下的静伸长。这时系统除受常值重力作用外，只受到弹簧恢复力作用，而不受任何其它外力作用，故也称为固有振动。

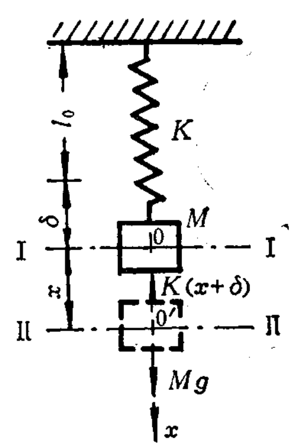

图 1-2

无阻尼自由振动微分方程(1-2)可化成：

$$\ddot{x}+\omega_n^2x=0 \tag{1-4}$$

式中：

$$\omega_n^2=\frac{K}{M}$$

式(1-4)为一常系数两阶线性齐次常微分方程。它的通解为

$$x=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t \tag{1-5}$$

或写成

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)=A\cos(\omega_n t+\varphi_1) \tag{1-6}$$

式中：A_1、A_2——积分常数，由初始条件确定。

$$\left.\begin{aligned}&A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\\&\sin\varphi=\frac{A_1}{A}\qquad\cos\varphi=\frac{A_2}{A}\\&\varphi_1=\varphi-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

于是质量的速度与加速度为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_n A\cos(\omega_n t+\varphi)\\ \ddot{x} &= -\omega_n^2 A\sin(\omega_n t+\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

设在 $t=0$时，质量 M 的初始位移和初始速度分别为

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

则由式(1-5)和(1-6)可得

$$A_1=x_0,\quad A_2=\dot{x}_0/\omega_n \tag{1-9}$$

于是得式(1-4)的特解为

$$x=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{1-10}$$

而式(1-7)中的值为

$$\left.\begin{aligned}&A=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega_n)^2}\\ &\sin\varphi=\frac{x_0}{A},\quad \cos\varphi=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n A}\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

由此可见，单自由度系统的自由振动包括两个部分：一部分与 $\cos\omega_n t$ 成正比，其值决定于振动体的初始位移 x_0；另一部分与 $\sin\omega_n t$ 成正比，其值决定于振动体的初速度 $\dot{x}_0$。这种随时间按正弦或余弦函数变化的运动称为简谐振动。

在振动问题中还可用旋转矢量来表示简谐振动。为此引进一半径为 A 的参考圆，有一质点 M 在此圆周上以匀角速度 ω_n沿逆时针方向作匀速圆周运动（图1-3a）。可以看到，当 M 点作圆周运动时，它在 x 轴上的投影点 M'在 x 轴上以圆心 O 为平衡位置作上下来回振动。如果开始时($t=0$)质点 M 位于 M_0，$\overline{CM}_0$与 y 轴的夹角为 φ。经过时间 t后，$\overline{OM}_0$转过角度 $\omega_n t$，M 点在 x 轴上的投影点 M'离开平衡位置的距离，即位移 x 为

$$x=\overline{OM}\sin(\omega_n t+\varphi)=A\sin(\omega_n t+\varphi)$$

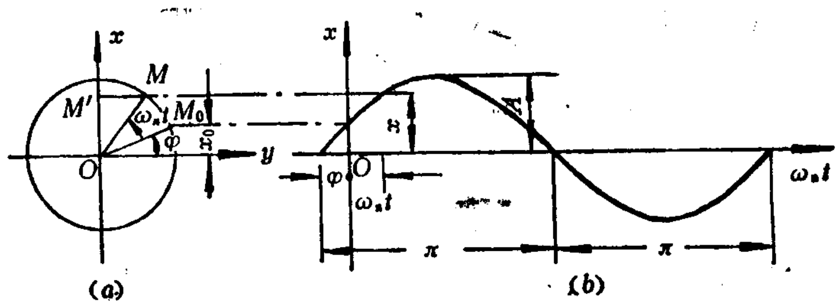

图 1-3

得到与式(1-6)同样的结果。

如以 x 为纵坐标，$\omega_n t$ 为横坐标，就可得 M'点的振动曲线(图1-3b)。

所得的结果表明质量的自由振动为简谐振动。其中旋转矢量的模 A为振幅，即质量的最大位移，为峰值(mm)；$\omega_n t+\varphi$ 为振动的相角，φ 为初相角；旋转角速度ω_n为圆频率，质量每秒内振动的弧度数，或2π 秒内振动的次数，它仅取决于系统的固有性质（质量 M 及弹簧刚度 K），而与运动的初始条件无关，故称为系统的固有频率，是表征振动系统固有性质的一个重要的特征值。

系统固有频率，除了用上述运动微分方程求得外，还可采用下列方式求得：

对质量在铅垂方向的直线振动，其固有频率可用简便的静伸长法（或称静变形法）求得。由式(1-3)可得

$$K=\frac{Mg}{\delta}$$

故

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}=\sqrt{\frac{Mg}{M\delta}}=\sqrt{\frac{g}{\delta}} \tag{1-12}$$

知道静伸长后即可求得直线振动的圆频率。振动一周所需的时间为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}} \tag{1-13}$$

称为振动的周期，单位为s（秒）。

工程上习惯用每秒或每分钟振动的次数来表示频率，即

$$\left.\begin{aligned}f&=\frac{1}{T}=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}\\ f_n&=60f=\frac{60}{2\pi}\omega_n\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

前者的单位为Hz，后者的单位为1/min。

例1-1：求图1-4所示的带有集中质量的简支梁固有频率，梁的自重忽略不计。

解：由材料力学的公式，简支梁中点的挠度为

$$\delta=\frac{Mgl^3}{48EI}$$

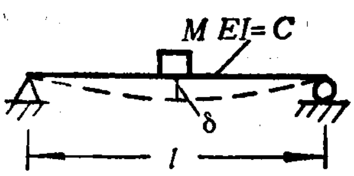

图 1-4

故

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta}}=\sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

若在质量下装弹簧（减振器）K，则

$$\delta=\delta_1+\delta_2=Mg\left(\frac{l^3}{48EI}+\frac{1}{K}\right)$$

所以

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta}}=\sqrt{\frac{1}{M\left(\frac{l^3}{48EI}+\frac{1}{K}\right)}}=\sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{48EI}{Kl^3}}}$$

因

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{48EI}{Kl^3}}}\leqslant 1$$

故装设减振器后，使系统固有频率降低。

对于较复杂的单自由度系统，可利用能量法来求解固有频率。仍考虑图1-2中的弹簧质量系统。质量M在振动时，它的速度是时刻在变化的，通过平衡位置时速度最大，这时质量M的动能也最大。当质量离开平衡位置继续向前运动时，它就要受到和运动方向相反的弹性恢复力的作用，这个力使它作减速运动，速度减小，动能也减小。在这个过程中，质量

克服弹性恢复力做功，动能转化为弹性位能而储于弹簧内。质量达最大位移停止前进后，弹性力迫使质量向平衡位置作加速运动，同时弹簧释放其弹性位能为质量的动能。随着速度的增大，动能也增大，当质量通过平衡位置时，弹性位能全部转化为动能。在谐振动过程中，动能和弹性位能总是不断地相互转化的。在没有能量损耗时（即不考虑系统的阻尼），按能量守恒定律，系统在任何瞬间的位能 V 与动能 T 之和应恒为常数，即$V+T=$常数，或可写作

$$\frac{d}{dt}(V+T)=0 \tag{1-15}$$

由于在任一瞬时（如图1-2中的位置II—II）弹簧被拉长了$(x+\delta)$，则弹簧具有的变形位能为

$$V_1=\frac{1}{2}K(x+\delta)^2=\frac{1}{2}Kx^2+Kx\delta+\frac{1}{2}K\delta^2$$

在计算质量的重力位能时，可令质量在静力平衡位置（图1-2中的I—I位置）时的位能为零，于是可知在质量获得位移 x 时，重力位能为

$$V_2=-Mgx$$

所以系统的总位能为

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{2}Kx^2+Kx\delta+\frac{1}{2}K\delta^2-Mgx$$

计及 $K\delta=Mg$，可将上式简化为

$$V=\frac{1}{2}Kx^2+\frac{1}{2}K\delta^2=\frac{1}{2}Kx^2+C \tag{1-16}$$

式中：C——常数，$C=\frac{1}{2}K\delta^2$。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{1-17}$$

将公式(1-16)、(1-17)代入方程(1-15)，同样可导得系统的自由振动微分方程为

$$M\ddot{x}+Kx=0$$

其解同样可为

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi)$$

当质量经过平衡位置时，$x=0$，$\dot{x}=\dot{x}_{max}=\omega_n A$，故由式(1-16)、(1-17)系统的能量为

$$V+T=\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2+C$$

而在最大振幅时，$x=A$，$\dot{x}=0$，故由式(1-16)、(1-17)，系统的能量为

$$V+T=\frac{1}{2}KA^2+C$$

应用能量守恒定律，此两瞬时的能量应相等，故得

$$\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2=\frac{1}{2}KA^2$$

所以自由振动频率（即系统的固有频率）为

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M}$$

由上面的推导可见，系统位能中的常数C在计算过程中是不起作用的，因此在以后计算时，可将系统的位能写作

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1-18}$$

即只需考虑系统中弹簧的变形位能，此弹簧的变形位能由静力平衡位置算起，而不需考虑质量的重力位能。

在这种情况下，当系统振动过程中质量在静力平衡位置时，位能为零，动能最大，故

$$V + T = \frac{1}{2}M\omega_n^2A^2 = T_{max}$$

质量在最大位移时，动能为零，位能最大，故

$$V + T = \frac{1}{2}KA^2 = V_{max}$$

于是计算系统频率的公式可写作

$$V_{max} = T_{max} \tag{1-19}$$

下面是用能量法求系统自由振动频率的例子。

例1-2：在图1-4所示的，带有集中荷重$W = Mg$的简支梁中，梁的自重为$Q = ql$（q为梁每单位长度的重量），用能量法决定其固有频率。

解：在例1-1中，忽略了梁的自重，求得固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

如果梁的重量比起集中质量不是甚小的话，例1-1的做法就不够精确。而在考虑梁的分布质量后，严格说来，系统应作为弹性体振动来考虑。但在某些场合，根据被解问题的性质与要求，也可以简化为多自由度，甚至单自由度振动系统。这里我们考虑了梁的质量，但将问题仍然简化为单自由度系统来考虑。

在用能量法解题时，首先得根据判断，假定一个梁在振动时的挠度曲线。对简支梁可假定为

$$y(x) = A\sin\frac{\pi}{l}x$$

即认为在振动时，梁的中点振幅为A，梁上其它点的振幅按正弦曲线分布。如梁按简谐规律振动，则梁上各点的振动位移为

$$v(x、t) = A\sin\frac{\pi}{l}x\sin(\omega_nt + \varphi)$$

因此梁上各点的速度分布为

$$\dot{v}(x、t) = A\sin\frac{\pi}{l}x\omega_n\cos(\omega_nt + \varphi)$$

因而动能最大值为

$$T_{max}=\frac{1}{2}M\omega_n^2A^2+\frac{1}{2}\frac{q}{g}\int_0^l\left(A\sin\frac{\pi}{l}x\omega_n\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{2}A^2\omega_n^2\left(M+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\right)$$

上式说明，梁的分布质量的动能相当于将梁的质量的一半集中在中点时的动能，因此上述系统可以用一根无重量梁，但梁中点具有集中质量 $M+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}$ 的系统来代替。与例 1-1 比较，可得系统的固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{48EI}{\left(M+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\right)l^3}}$$

也可以用式(1-19)$V_{max}=T_{max}$来求解。在最大振幅位置

$$V_{max}=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}\frac{48EI}{l^3}A^2$$

同样可得

$$\omega_n=\sqrt{\frac{48EI}{\left(M+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\right)l^3}}$$

当然以上结果也是近似的，其精确度取决于所假定的挠度曲线 $y(x)$ 与真实振动曲线符合的程度。在很多场合，可直接选用梁的静挠度曲线作为振动的挠度曲线的形式，也能得到满意的结果。

利用能量法，我们还可将一个复杂的系统化为一个简单的弹簧质量等效的系统。等效系统与真实系统的位移是等效的，且它们的动能与位能都相同，因而两者的固有频率也相同。

例如在例1-1和例1-2中讨论过的简支梁质量系统(图1-4)，我们可以将它化为图1-2所示的等效弹簧质量系统。此时，等效系统的弹簧刚度为

$$K=\frac{48EI}{l^3}$$

而等效系统的质量在例1-1中为 M，在例1-2中为 $M+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}$。

在一般情况下，一个系统的等效弹簧质量系统可以这样来确定：先规定系统中某一个质点的位移作为等效系统中质量的位移（即等效位移），再根据真实系统的动能和位能分别与等效系统的动能和位能相等的条件求出等效系统中的质量及弹簧刚度（即由动能等效求等效质量 M_e，由位能等效求等效刚度 K_e），于是真实结构的固有频率 ω_n 即可根据等效系统由下式决定：

$$\omega_n=\frac{K_e}{M_e} \tag{1-20}$$

这种寻求系统固有频率的方法叫做等效法。

例1-3：用等效法求图1-5所示梁的固有频率。

解：取离简支端 l 处的垂向位移 w 为广义坐标，以广义坐标为等效系统的坐标，即 $q_e = w$，则

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l \left(\frac{x}{l}\dot{w}\right)^2 dx$$

而等效系统的动能为

$$T_e = \frac{1}{2}M_e\dot{w}^2$$

由 $T = T_e$ 得

$$M_e = m\int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{ml}{3}$$

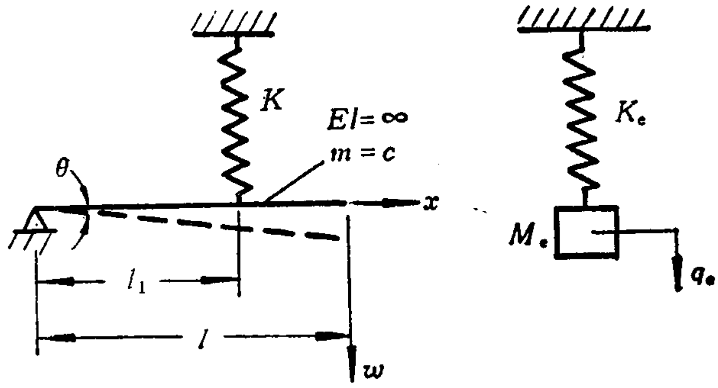

图 1-5

同样，因真实系统与等效系统的位能分别为

$$V = \frac{1}{2}K\left(\frac{l_1}{l}w\right)^2 \qquad V_e = \frac{1}{2}K_e w^2$$

由 $V = V_e$ 得

$$K_e = K\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$$

故

$$\omega_n^2 = \frac{K_e}{M_e} = \frac{3Kl_1^2}{ml^3}$$

等效质量和等效刚度实际上就是对应于广义坐标的广义质量和广义刚度。

§1-2 单自由度系统的强迫振动

上节讨论的作简谐振动的物体如不考虑阻尼力作用，则在振动过程中除弹性恢复力外，不受其它力的作用。这时，振动体的动能和位能不断地相互转化，而总和保持恒定，相应的振幅也保持不变，这种振动称为无阻尼自由振动。而实际的振动总是有阻尼力作用，振动的机械能不断地转化为其它形式的能量（如热能和声能）而耗散掉，如果不给予能量补充，经过一段时间后，振动就要停止，因此振动要持续下去，必需有外来激动对系统作功，输入能量以弥补阻尼所消耗的能量，这样系统的振动才不会被衰减。工程上所见的持续振动，如船舶振动，就是属于系统在外界的激动作用下的振动。系统的这种振动就称为强迫振动。计算强迫振动的目的在于寻求系统在外界激动作用下的动力响应，即它的振动位移、速度、加速度，以及由此所确定的构件中的动应力等有关参数，确定这些参数随时间的变化规律，从而求出其最大值作为设计的依据，因此可以说，研究强迫振动是结构动力计算的基本任务。

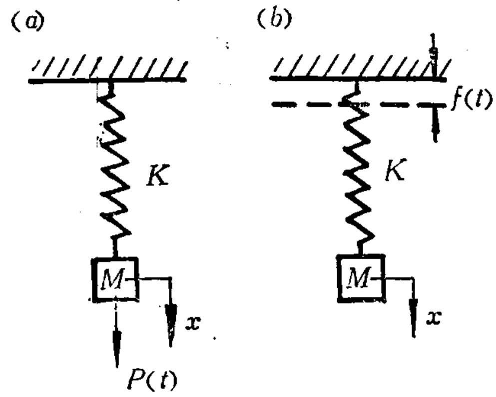

图 1-6

我们把外界的激动称为对系统的“输入”，而把响应称为系统的“输出”。通常外界的激动可以分为两种：一种是外界的干扰力 $P(t)$，如图1-6(a)所示；另一种是系统支座的

运动$f(t)$，如图1-6(b)所示。

外界的激动可以是周期性的，也可以是任意的。对于船舶振动，其干扰力，如主机的不平衡惯性力、螺旋桨的脉动压力等都是周期性的。本节先讨论在外界周期性干扰力作用下的无阻尼强迫振动问题。

分析图1-6(a)中的弹簧质量系统，假定质量上受到的为周期干扰力中最简单的简谐干扰力

$$P(t)=P_0\sin\omega t$$

式中：P_0——干扰力的幅值；

　　ω——干扰力的频率。

仍取 x 为自平衡位置算起的质量的位移，则任一瞬时质量的运动方程为

$$M\ddot{x}+Kx=P_0\sin\omega t \tag{1-21}$$

或

$$\ddot{x}+\omega_n^2x=\frac{P_0}{M}\sin\omega t \tag{1-22}$$

式(1-22)就是单自由度系统在简谐干扰力作用下的强迫振动微分方程，它的解由通解与特解两部分组成。通解就是自由振动的解，即

$$x_1=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t \tag{1-23}$$

而特解可以写成下面的形式：

$$x_2=B\sin\omega t \tag{1-24}$$

将式(1-24)代入式(1-22)可得

$$B=\frac{x_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

式中：

$$x_{st}=\frac{P_0}{K} \tag{1-25}$$

为弹簧在静力 P_0作用下的静位移，故式(1-22)的一般解为

$$x=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t+\frac{x_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t \tag{1-26}$$

式中的常数 A_1、A_2由系统的初始条件确定。设初始条件为

$$x(0)=x_0\qquad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

则可以求得

$$\left.\begin{aligned}A_1&=x_0\\ A_2&=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}-\frac{x_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\frac{\omega}{\omega_n}\end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

将此值代入式(1-26)，得

$$x=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t-\frac{x_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{x_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t \tag{1-28}$$