高等财经院校试用教材

商业运筹学

中国商业出版社

高等财经院校试用教材

商业运筹学

《商业运筹学》编写组

中国商业出版社

高等财经院校试用教材
商业运筹学
《商业运筹学》编写组
*
中国商业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京顺义县印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开　14,875印张　370千字
1986年10月第1版　　1988年5月北京第2次印刷
印数：15,000—20,000册　　定价：2.50元
LSBN　7—5944—0016—5/F·007

编审说明

本书是为高等财经院校管理专业编写的试用教材，也可作为函授大学和职工大学财经管理专业、高等院校经济类有关专业的教学用书，同时可供广大商业工作者学习参考。本书共分七章，主要介绍线性规划、非线性规划、动态规划、网络计划技术、存储论、对策论、排队论的基本方法。

本书由杭州商学院张光耀同志编写。初稿编好后，征求了商业部教育司和北京商学院等一些高等院校的意见，并于1986年5月在杭州商学院召开了审稿会。会上一致认为本书可作为高等财经院校试用教材。参加审稿会的有：杭州大学经济系张明深副教授，浙江大学姚恩瑜副教授，杭州电子工学院王祖樾副教授，山西财经学院路德昭副教授，兰州商学院王水汀同志，杭州商学院钱尚玮副教授、叶树滋副教授和韩德宗同志，商业部教育司何国栋同志等。

书中如有不妥之处，欢迎读者批评指正。

中华人民共和国商业部教材编审委员会

一九八六年八月

绪　论

人类从事的活动是多种多样的，有政治活动、军事活动、文化教育活动、生产活动、经济活动等等。这些活动尽管目的各不相同，但是，在达到目的过程中，都有一个相同的要求，就是在一定条件下，获得最好的经济效果。在社会主义建设中，不论是工农业生产、交通运输，还是财贸工作等经济活动，都必须讲究经济效果，提高经济效益。

经济效果是效果与劳动消耗的比较。提高经济效果，就要尽量减少劳动消耗。不断地开展技术革新，采用先进的科学技术和生产技术，是提高经济效果的一个方面；合理安排人力物力财力等资源，合理组织生产经营过程，实行现代化科学管理，这是提高经济效果的另一个方面。如何从数量的角度，对活动进行定量的分析，找出规律，根据一定的科学方法，确定最好的方案，或者制定最好的计划，或者编制最好的规划，或者作出最好的决策，或者进行最好的控制，或者实行最好的管理，以获取最好的经济效果，这就是运筹学所要研究解决的问题。

凡是要求做出肯定决策的问题，都属于运筹问题。自从有了人，运筹问题就已存在。运筹学思想在我国史记中已有“运筹於帷幄之中，决胜於千里之外”的记载；战国时田忌赛马就是典型的运筹对策。国外的运筹学思想出现在第二次世界大战之前，1914年英国的兰彻斯特（F·W·Lanchester）发表了关于人力和火力的优势与胜利之间的理论关系的文章；第一次世界大战期间，美国的托马斯·爱迪生（Thomas Edison）研究了减少敌人潜艇击中商船的商船运行策略；丹麦的爱尔朗（A·K·Erlang）

进行了自动拨号设备对电话需求影响的实验。

运筹学（Operations Research，简写OR）这一名词出现於第二次世界大战期间的英国。当时，英国成立了世界第一个运筹学小组，研究如何最好地运用新发明的雷达和英国空防军事问题，取得了成果。随后，美国也成立了有关运筹学小组，从事军事运筹问题的研究，也取得了可喜的成果。

第二次世界大战以后，运筹学垮出了军事领域的范畴，进入了工业、商业等领域，得到了迅速发展。随着电子计算机的崛起和发展，许多运筹学所研究的复杂问题，获得了解决，进一步推动了运筹学的迅猛发展。现在，运筹学已成为一门内容非常丰富，应用非常广泛的边缘科学；现有的运筹学方法不断地成为新的定量化的工具，新的运筹学方法又在不断的出现。

运筹学虽然有它的研究对象，但它所从事的研究范围并不象自然科学中其他学科来得明确，它的分支渊源于迥然不同的实际问题。所以，要给出运筹学定义未必是容易的。但是，运筹学具有它自己的特点。

运筹学所研究的问题一般是复杂的问题，往往要牵涉到大量的因素和多个部门。因此，必须从全局的、整体的观点去解决问题，这是运筹学的整体性观点的特点。

运筹学所研究的问题一般又是多学科的交叉的问题，解决这种复杂问题，需要有一支由各种专家组成的综合队伍。多种类型的专家组合在一起解决所研究问题，这是运筹学的第二个特点。

运筹学和其他学科一样，是一种科学方法，在解决实际问题过程中包括如下阶段：（1）仔细观察实际，确定问题；（2）通过分析，构造一个模型（包括数学模型）；（3）采用一定方法解出模型；（4）通过适当实验加以修改和核实，使模型有效；（5）最后实施最优解，并进行监督和控制。运用这套科学方法是运筹学的第三个特点。

运筹学的第四个特点是为进一步研究揭露新问题。

运筹学包含许多分支，考虑到我国商业的实际情况和避免与其他课程的重复，本书没有全部介绍这些分支。本书的第一章介绍了线性规划，其中包含有对偶规划、参数规划、整数规划和零壹规划；第二章介绍了网络计划技术和图论初步；第三章介绍了动态规划；第四章介绍了非线性规划；第五章介绍了存贮论；第六章只介绍了对策论中的矩阵对策内容；第七章介绍了排队论初步。

目　录

第一章　线性规划

线性规划是用来处理满足线性不等式、线性等式和自变量非负性条件下，求线性目标函数的极值问题的方法。它是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛的一个重要分支。

线性规划的历史至少可以追溯到十八世纪，那时就有人研究有限个不等式和凸集的理论。至今，线性规划问题的解的存在及其判别，在理论上获得了较为完整的结果。就实用算法而论，苏联康特洛维奇(П·В·КАНТОРОВИЧ)的《生产组织与计划中的数学方法》，为求解线性规划问题作出了不可忽视的贡献。1947年旦泽（G·B·Dantzig）的单纯形法给出了求解线性规划的一个通用解法，为线性规划奠定了基础。但是，单纯形法在解某些线性规划问题时遇到了困难，发现不是一种多项式算法。事隔30年之久，1979年苏联的哈奇安（Л·Г·ХАЧИЯН)找到了解线性规划的一种新算法——椭球法。椭球法是一种多项式算法，但是据计算机上初步试验结果看，也不比单纯形法好。1984年，Karmarkar找到了一种更好的多项式算法——Karmarkar算法。线性规划还在发展。

线性规划的内容还包括运输型问题、参数规划、整数规划、零壹规划等等特殊线性规划。

线性规划的应用广泛，工业、农业、交通运输、邮电、财贸、军事等许多领域中的实际问题，都可以归结为线性规划问题；它可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济规划、经营管理等提出的大量问题。

这一章，我们只介绍线性规划的一些常用解法：单纯形法、

人工变量法、对偶单纯形法、参数规划、整数规划的分支定界法、零壹规划的分支定界法与匈牙利法。最后介绍以商品调运问题为主的一些商业中的应用。

第一节　线性规划问题的概念及其形式

一、商业中的线性规划问题

在商业中有许多实际问题都属线性规划问题，现列举下面三个：

（一）商品运输问题

商品运输是商品从生产领域到消费领域的空间转移，是商品流通过程中的一个必要环节。如何组织商品运输，对于加速商品流转，降低商品流通费用，有较大的作用。组织商品运输，必须本着"及时、准确、安全、经济"的原则，也就是说，要以最快的速度、最省的费用、保质保量地准确地从产地（商品的生产地）运到销地（商品的销售地）。这就要求我们采取最经济、最合理的运输路线和运输工具，花费最少的人力物力和财力，把商品安全地从产地运到销地。

例1·1　由A_1、A_2、A_3三地生产的某种商品，产量分别为7吨、12吨、11吨，供应需要量都为10吨的B_1、B_2、B_3三地。商品从产地运到销地的运价（单位:元/吨）如表1·1，试问应当如何组织该商品的运输，才能使总运费最省？

表1—1

运价　销地 / 产地	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	6
A_2	0	4	2
A_3	3	1	5

设产地A_1供应B_1、B_2、B_3的商品数量分别为x_{11}、x_{12}、

x_{13}；产地A_2供应B_1、B_2、B_3的商品数量分别为x_{21}、x_{22}、x_{23}；产地A_3供应B_1、B_2、B_3的商品数量分别为x_{31}、x_{32}、x_{33}。

将产量、需要量和供应量列成表1·2。由表1·2A_1所在行知，

表1—2

供应量 销地 产地	B_1	B_2	B_3	产 量
A_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	7
A_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	12
A_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	11
需 要 量	10	10	10	

产地A_1供应B_1、B_2、B_3的供应量之和应等于7吨。所以，有关系式：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=7$$

由表1·2A_2、A_3所在行，同理可得关系式：

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=12,$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=11。$$

另一方面，销地B_1的商品需要量10吨应为A_1、A_2、A_3分别供应数量之和。由表1·2B_1所在列可知，有关系式：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=10。$$

由表1·2B_2、B_3所在列，同理可得：

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=10,$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=10。$$

设商品的总运费为y，则：

$$y=x_{11}+2x_{12}+6x_{13}+0\cdot x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+3x_{31}+x_{32}+5x_{33}。$$

因此，根据题意，本问题是如下数学模型的问题：求满足

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}=7, \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}=12, \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}=11, \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=10, \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=10, \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=10, \\
x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3,
\end{cases}
$$

使$y=x_{11}+2x_{12}+6x_{13}+4x_{22}+2x_{23}+3x_{31}+x_{32}+5x_{33}$达到最小的$x_{ij}$（$i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$）的值。

在例1·1中，产地A_1、A_2、A_3的产量之和，是与B_1、B_2、B_3销地的销量之和相等。这种产量之和与销量之和相等的情况，称为产销平衡的情况。

对于产销平衡的情况，由例1·1我们可以推知，一般运输问题是：某种商品有m个产地A_1、A_2、…、A_m和n个销地B_1、B_2、…、B_n。各产地的产量，各销地的需要量，及各产地运到各销地的运价如表1·3，试问应如何组织该商品的运输，才能使总运费最省？

设x_{ij}为由产地A_i供应销地B_j的商品数量（$i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n$），则该商品运输问题的数学模型为：求满足

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \\
x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,
\end{cases}
$$

使$y=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$达到最小的$x_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n$）的值。

表1—3

运价 产地 \ 销地	B_1	B_2	…	B_n	产量（吨）
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
需要量（吨）	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

（二）最大利润问题

就广义来讲，资源不仅包括原料，而且还包括能源、资金、劳力、设备等。一个商业企业，在它的经营活动中，都需要多种资源。如何在一定的限制条件下，充分利用资源，合理组织生产经营，获取最大的利润，这就是最大利润问题。

例1·2，某小吃店用两种分别为90吨、80吨的A_1、A_2原料，制作B_1、B_2、B_3三种食品，各种食品制作一千个所需原料数及其可得利润（单位：千元）如表1·4，试问该店制作该三种食品各为多少时，总利润最大？

设制作B_1、B_2、B_3食品的数量分别为x_1、x_2、x_3。那么，

表1—4

千个食品所需原料数 原料 \ 食品	B_1	B_2	B_3	原料量
A	3	1	3	90
A_2	1	2	2	80
千个食品的利润	4	3	7	

所用A_1原料为$3x_1+x_2+3x_3$，所以有关系式：

$$3x_1+x_2+3x_3\leqslant 90,$$

所用A_2原料为$x_1+2x_2+2x_3$，所以有关系式：

$$x_1+2x_2+2x_3\leqslant 80。$$

设总利润为y，则

$$y=4x_1+3x_2+7x_3。$$

因此，根据题意，本问题是如下数学模型的问题：求满足

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3\leqslant 90, \\ x_1+2x_2+2x_3\leqslant 80, \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3, \end{cases}$$

使$y=4x_1+3x_2+7x_3$达到最大的x_j（$j=1, 2, 3$）的值。

由例1·2，我们可以推知，一般的最大利润问题是：生产n种不同商品B_1、B_2、…、B_n，需要m种不同资源A_1、A_2、…、A_m，如果各种资源的数量、单位商品所需资源数与可得利润如表1·5，试问各种商品各生产多少时，才能获得最大利润？

表1—5

单位商品所需资源 \ 商品 \ 资源	B_1	B_2	…	B_n	资源量
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
单位商品利润	c_1	c_2	…	c_n	

设x_j为生产B_j（$j=1, 2, \cdots, n$）商品的数量。所以，一般

最大利润问题的数学模型为：求满足

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1, \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m, \\
x_j>0,\ j=1,2,\cdots,\ n,
\end{cases}
$$

使$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$达到最大的$x_j$（$j=1,2,\cdots,n$）的值。

（三）合理裁剪问题

服装裁剪，有各种不同的裁剪法。如何安排这些裁剪法，使所用的衣料最省，这就是服装的合理裁剪问题。

例1·3、某裁缝店有麦尔登呢80匹，用来做三种不同式样的西装A_1、A_2、A_3，这三种西装的数量分别不能少于2000套、3000套、3500套。现采用四种不同的裁剪法B_1,B_2,B_3,B_4,每匹麦尔登呢裁得各种西装数量如表1·6。试问这80匹麦尔登呢应如何安排这四种裁剪法，使得所用呢料最省？

表1—6

一匹呢所裁得西装数 \ 裁剪法 / 规格	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	100	60	120	40
A_2	80	90	50	125
A_3	50	120	80	70

设用B_j裁剪法裁剪西装的麦尔登呢匹数为x_j（$j=1,2,3,4$）。所以A_1、A_2、A_3的西装数应分别满足关系式：

$$100x_1+60x_2+120x_3+40x_4\geqslant 2{,}000,$$
$$80x_1+90x_2+50x_3+125x_4\geqslant 3{,}000,$$
$$50x_1+120x_2+80x_3+70x_4\geqslant 3{,}500.$$

设所用麦尔登呢匹数为y，则

$$y=x_1+x_2+x_3+x_4$$

因此，根据题意，本问题是如下数学模型的问题：求满足

$$\begin{cases}100x_1+60x_2+120x_3+40x_4\geqslant 2{,}000,\\ 80x_1+90x_2+50x_3+125x_4\geqslant 3{,}000,\\ 50x_1+120x_2+80x_3+70x_4\geqslant 3{,}500,\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{cases}$$

使$y=x_1+x_2+x_3+x_4$达到最小的x_j（$j=1, 2, 3, 4$）的值。

由例1·3，我们可以推知，一般的服装裁剪问题是：对于某种衣料，可用B_1、B_2、…、B_n种不同的裁剪法，裁剪A_1、A_2、…、A_m种不同的服装。各种裁剪法裁剪一匹布料得各种服装的数量与每种服装的需要量如表1·7所示。试问应当如何安排各种裁剪法，使得所用衣料为最省？

表1—7

每匹裁得的服装数 \ 裁剪法 / 规格	B_1	B_2	…	B_n	服装需要量
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

设用B_j裁剪法裁剪服装的衣料为x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）匹，