概率统计教学参考书

杨维权　邓集贤

高等教育出版社

概率统计教学参考书

杨维权　邓集贤

高等教育出版社

（京）112号

内 容 提 要

本书包括概率论及数理统计两部分．概率论部分有五章，包括随机事件和概率、随机变数及其分布函数、随机变数的数字特征、特征函数和母函数、相互独立随机变数的极限定理．数理统计部分有四章，包括抽样分布、估计理论、假设检验、回归分析．

本书可作为大专院校概率统计课的教学参考书，对于从事应用统计工作的广大科技人员，也是一本重要的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

概率统计教学参考书／杨维权，邓集贤编．—北京：高等教育出版社，1996
ISBN 7-04-005379-9

Ⅰ．概… Ⅱ．①杨… ②邓… Ⅲ．①概率论-教学参考资料②数理统计-教学参考资料 Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第11312号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009 传真：4014048 电话：4054588
新华书店总店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数440 000
1996年5月第1版 1996年5月第1次印刷
印数0001— 1 511
定价 15.00 元

前　言

概率统计学是一门研究随机现象统计规律性的数学学科，它的应用十分广泛，涉及自然科学、社会经济学科、工程技术及军事科学、农医学科、企业管理部门等，因此，国内各类大专院校、成人教育院校等都在开设这门课程，只是教学时数、教学重点、内容取舍等各不相同。国内近十几年来出版了不同类型的概率统计教材，教学指导书也有出版，虽然教材的深浅不一、风格各异，内容选择与编写方式不尽相同，但是这门课程的特色是相近的，基本概念、基本技巧、理论基础都是相通的。对于从事概率统计课程教与学的人员，怎样尽快地正确掌握概率统计的概念、原理与方法，很值得探讨与总结。

众所周知，一本教材的内容要为读者熟练地掌握，一般要在课堂上亲聆教师的讲授。教师在课堂上的再创造，不是填鸭式的照本宣科，而是要通过对教材的认真消化，充分备课，然后引导学生提出问题、解决问题。教师要为学生提供好的学习途径，使学生把握重点，克服难点，掌握教材的基本内容。本书就是力求能起到这种再创造的作用，使广大学生及自学读者，通过本书的学习，能进一步提高学好概率统计的自学能力。

本书是配合梁之舜、邓集贤、杨维权、司徒荣、邓永录编著的《概率论及数理统计》一书而写的教学参考书，也可作为一般概率统计课的教学参考书。

本书的特点是在每一章里都叙述内容要点、教学重点、难点解析及例题选解，并有必要的习题与答案。在编写每一章时，首先提纲挈领地介绍基本概念、定理及方法。在重点内容部分，着力于深入理解基本概念、定理内涵、证明关键、方法技巧，掌握

必读的内容。难点是指概念的理解、证明的技巧、方法的运用方面较难掌握的部分。本书运用直观解释、深入浅出、化难为易等方法，从不同角度去理解和克服难点。概率统计是一门逻辑推理严密、内容抽象而应用性又很强的数学课程，尤其是许多读者初次接触它，要真正理解和熟悉它，必须通过做一定数量的习题。为此，本书配合基本内容选编了许多例题，并注意到不同类型的习题适合不同层次读者的需要，力求对广大读者提高学习效果及增强对概率统计的兴趣有积极作用。

本书的编写得到高等教育出版社及中山大学教务处的大力支持。1993年4月在中山大学召开了审稿会，汤尚勇教授、吴亚森副教授、高尚华副编审、石北源副教授、余锦华副教授等对本书初稿的指导原则、全书结构、内容布局及写作技巧等方面进行了审阅，作了充分的肯定，并提出了十分有益的改进意见。他们认为本书写作新颖，很有特色，总结了作者多年来从事教学的经验，不仅对在校学生和自学读者是一本很好的教学参考书，而且对于从事概率统计课的教师，特别是初次从事教学的青年教师具有一定的借鉴作用，建议早日出版。作者根据审稿会议提出的改进意见，对初稿作了修改和调整，在此诚挚地对上述单位及审稿专家表示衷心的感谢。

本书概率论部分（第1、2、3、4、5各章）由邓集贤执笔，数理统计部分(第6、7、8、9各章)由杨维权执笔，宋心远协助编写概率论习题与答案。为了读者阅读方便，书中的数学名词采用了教材中常见的用法，其中有个别名词和全国自然科学名词审定委员会公布的数学名词(1993)不尽相同。由于作者水平有限，本书尚有不少缺点和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1994.12.于中山大学

目　　录

第1章　随机事件与概率

内容要点

这一章的内容是介绍概率论的基本概念、方法以及描述随机现象的数学模型。

§1.1　随 机 事 件

对随机现象进行研究，需作大量的观察和实验，从而发现其统计规律性．为叙述方便，我们把对随机现象进行观察或实验称为试验．如果试验可以在相同条件下重复进行，而试验有多种可能结果，但事先不能预言它将出现哪一结果，则称这试验为随机试验．今后，我们所说的试验都是指随机试验．

在一定的条件下进行试验总有某个目的，根据这一目的会观察到多种不同的可能结果，我们把试验的每一可能结果称为随机事件，简称为事件，用字母A，B，C，…表示，在相同条件下必然发生的事件称为必然事件，而必然不发生的事件称为不可能事件。必然事件用特殊的字母Ω表示，不可能事件用$\varnothing$表示．把必然事件和不可能事件都算作随机事件，对我们讨论问题是方便的．我们还把不能再分解的事件称为基本事件，而由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件．

例1.1　抛一枚均匀的硬币，可能出现正面，也可能出现背面．

例1.2　在0，1，…，9这十个数字中随意选取一个，可能有十种不同的结果："取得一数是0"，…，"取得一数是9"．但还有其它可能结果，如"取得一数是奇数"，"取得一个大于3的数"，

"取得一数是 2 的倍数"等.

例1.3 某电话总台一天接到的呼叫次数可能是 0 次，1 次，…. 由于难于确定一数为其最高次数，不妨把呼叫次数设为非负整数.

例1.4 观察并记录某一地区的气温，其值可能是区间$[a,b]$中的任一实数. 为方便起见，可设其取值于$R_1=(-\infty, \infty)$.

例1.5 考虑测量某零件长度x和直径y所产生的误差$(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$，其观察到的测量结果为$z_1=x+\varepsilon_x$，$z_2=y+\varepsilon_y$，则误差$(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$取值可为平面上的某一矩形的区域$[a, b]\times[c, d]$或$R_2=\{(\varepsilon_x, \varepsilon_y);\ -\infty<\varepsilon_x, \varepsilon_y<\infty\}$.

上述例子中的"抛一枚均匀的硬币"；"在十个数字中选取一个数字"；"某电话总机一天所接到的呼叫次数"；"记录某一地区的气温"；"测量某零件的长度和直径"均是试验，而试验的结果中"出现正面"；"出现背面"；"取得一数是0"，…，"取得一数是9"；"0 次"，"一次"，…；"温度值为x"(其中$x\in R_1$)；"误差$(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$"(其中$(\varepsilon_x, \varepsilon_y)\in R_2$)均是基本事件. 而其它的结果，如"取得一数是奇数"；"温度低于30℃"；"某零件长度和直径的测量误差都在±1%之间"等均是事件(可由基本事件复合而成).

进行一个试验，有这样或那样可能的事件发生，这些事件彼此间有一定的联系，它们有如下关系：

1. 互不相容事件

如果两事件A与B不同时发生，或等价地说A与B同时发生是不可能的，则称A与B互不相容. 如果A_1，A_2，…是任意有穷或可列无穷个事件，若其中任意两个事件A_i与$A_j(i\neq j)$互不相容，则称A_1，A_2，…互不相容.

例如上述每一个例中的基本事件都是互不相容的.

2. 事件的包含关系

如果事件A发生必然导致事件B发生，或等价地说，若事件B不发生则事件A必然不发生，则称事件A含于事件B中，或称事

件B包含事件A，记为$A \subset B$。

例如在例1.2中，令A表示"取得一个大于 3 的奇数"，B表示"取得一个大于 3 的数"，则有$A \subset B$。

3．等价事件

如果事件A和B满足$A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B等价（或相等），记为$A = B$。

为了更方便地研究随机事件，我们引入如下运算：

1．事件的和

若事件C表示"事件A与B中至少有一个发生"，则称C为A与B之和（或并），记为$C = A \cup B$（或$A + B$）。

如例1.2，令A表示"取得一数是奇数"，B表示"取得一个大于 3 的数"，则$C = A + B$表示"取得的数为 1 或 3 或 4 …或9"。

2．事件的积

若事件D表示"事件A与B同时发生"，则称D为A与B的积（或交），记为$D = A \cap B$（或AB）。

如上例的A与B，则$D = A \cap B$表示"取得的数为 5 或 7 或9"。

由事件积的定义可知，事件A与B互不相容的充分必要条件为$A \cap B = \varnothing$。

3．事件的差

若事件E表示"事件A发生而事件B不发生"，则称E为A与B之差，记为$E = A \setminus B$（或$A - B$）。

如前例，$E = A - B$表示"取得的数为 1 或3"。

4．逆事件

$\Omega - A$称为事件A的逆事件，记为$\bar{A}$，即$\bar{A} = \Omega - A$。由定义知$\bar{A}$表示A不发生，并且有A与$\bar{A}$互不相容（即$A \cap \bar{A} = \varnothing$）和$A \cup \bar{A} = \Omega$。

如前例，A表示"取得一数是奇数"，则$\bar{A}$表示"取得一数是偶数"。

事件的和与积的运算都可推广到有穷或可列无穷个事件的情

形，如

$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$表示“A_1，…，A_n中至少有一个事件发生”。

$B=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$表示“B_1，…，B_n同时发生”。

$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$表示“$C_1$，…，$C_n$，…中至少有一个事件发生”。

$D=\bigcap_{i=1}^{\infty}D_i$表示“$D_1$，…，$D_n$，…同时发生”。

关于事件，有如下基本公式：

1．对任一事件A，有

$$\varnothing\subset A\subset\Omega;$$

$$A\cup\Omega=\Omega;$$

$$A\cup\varnothing=A;$$

$$A\cap\Omega=A;$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing;$$

$$A-A=\varnothing;$$

$$A-\varnothing=A;$$

$$A-\Omega=\varnothing.$$

2．对任意的事件A_1，A_2有

$$A_1-A_2=A_1\cap\bar{A}_2.$$

3．事件的运算满足

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$。

2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

3）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

分配律可推广到有穷个或可列无穷个时的情形：

$$A\cap\left(\bigcup_i B_i\right)=\bigcup_i(A\cap B_i);$$

$$A\cup\left(\bigcap_i B\right)=\bigcap_i(A\cup B_i).$$

上述符号$\bigcup_i$$\left(或\bigcap_i\right)$表示有穷或可列无穷和(或积).

4. 对有穷或可列无穷个事件A_i，恒有De.Morgen公式：

$$\left(\overline{\bigcup_i A_i}\right)=\bigcap_i\bar{A}_i;$$

$$\left(\overline{\bigcap_i A_i}\right)=\bigcup_i\bar{A}_i.$$

上述关于事件的关系和运算结果的证明很容易从有关定义立即得到。例如，我们要证明$\varnothing\subset A$，由事件包含的等价定义可知，只需证明，若A不发生，则$\varnothing$不发生，这结论对任意事件A都是完全正确的(因为$\varnothing$是不可能事件，不论A发生还是不发生，$\varnothing$总是不会发生的)。

应用点集论和几何图示法表示事件的关系和运算，则上述许多结果直观且容易理解，也为进一步数学处理提供方便.

下面首先讨论集合论的情形：

联系于每一试验的每一基本事件，用只含一个元素ω的单点集$\{\omega\}$表示，而由若干基本事件组成的复合事件，则由构成基本事件的元素的全体组成的集合表示。由全部基本事件对应的所有元素组成的集合，给它一个特殊的名称，叫做样本空间，我们仍用Ω表示。由于任一试验必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件。我们称样本空间中的每一元素为样本点。这样一来，集合论的知识就可以用来解释事件的关系和运算，它们之间的术语对照列在表1.1中.

表 1.1

符 号	集 合 论	概 率 论
Ω	空 间	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空 集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω的子集A	事件A
$A\subset B$	集合A包含在集合B中	事件A含于事件B
$A=B$	集合A与B相等(或等价)	事件A与B相等(或等价)
$A\cup B$	集合A与B之和(或并)	事件A与B至少有一个发生（事件A与B之和）
$A\cap B$	集合A与B之交	事件A与B同时发生(事件A与B之积或交)
$\overline{A}$	集合A之余集	事件A的逆事件
$A-B$	集合A与B之差	事件A发生而事件B不发生（事件A与B之差）
$A\cap B=\varnothing$	集合A与B没有公共元素	事件A与B互不相容

如果以平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的一个点表示样本点，则事件的关系和运算可通过平面上的几何图形表示。

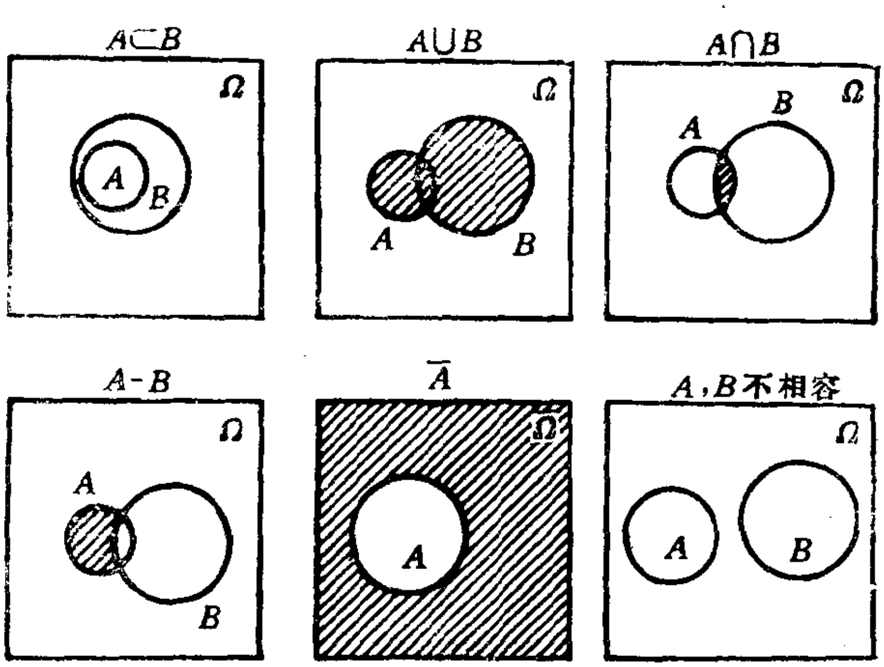

图 1.1

若用两个小圆形表示事件A和B，如图1.1所示，阴影部分表示事件A与B的关系和运算。
（图中阴影部分分别表示事件$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\bar{A}$）。

如例1.1，样本点为ω_1=正面，ω_2=背面，样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$，基本事件为$\{\omega_i\}$，$i=1,\ 2$。

又如例1.2，样本点为$\omega_1=0$，$\omega_2=1$，…，$\omega_{10}=9$，样本空间为$\Omega=\{0,\ 1,\ \cdots,\ 9\}$，基本事件为$\{\omega_i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$。

§1.2 概率的直观意义及其计算

研究随机现象不仅要讨论它可能出现哪些事件，更重要的是要考虑事件出现的可能性大小，刻画事件发生可能性大小的数量指标称为事件的概率，事件A的概率用$P(A)$表示。在概率论发展历史中，人们针对不同情况给出了事件的概率定义和计算概率的方法。

1．古典概率

如果试验具有如下性质：

（1）全部基本事件$E_i(i=1,\ \cdots,\ n)$是有穷的；

（2）$E_i,i=1,\ \cdots,n$具有等可能性，则对任意事件A，其概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}(k)}{\text{基本事件总数}(n)}$$

并称它为古典概率。

2．几何概率

设联系于某一试验的样本空间可以用欧氏空间的某一区域S表示，并且其样本点具有所谓“均匀分布”的性质。则对某一事件（某一区域）$A\subset S$，其概率定义为

$$P(A)=\mu(A)/\mu(S),$$

其中$\mu(\cdot)$表示S中任一区域的量度（假定量度是存在的）。这样定义的概率称为几何概率。

3. 统计概率

如果试验的结果不具有上述的等可能性(或均匀分布)时，则用如下的方法定义概率：

设在同一条件组下进行了 n 次试验，事件A发生了 m 次，则用事件A发生的频率

$$f(A) = A出现的次数m/试验的总次数n$$

作为事件A的概率的量度，称它为统计概率。

对于上述三种概率均具有如下三个性质：对任意A，$A_1,\cdots$，A_n有

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2° $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$；

3° 若事件A_1，$\cdots$，A_n互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

上述三个性质，，很容易从三种概率的定义证明。如用三种概率定义证明均具有性质1°：

在古典概率情形，由于对任一事件A所含的基本事件数 k 总满足$0\leqslant k\leqslant n$，故有$0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1$，即1°成立；

在几何概率情形，由于对任事件A均有$A\subset S$，从而$0\leqslant\mu(A)\leqslant\mu(S)$，$0\leqslant\mu(A)/\mu(S)\leqslant 1$，即1°成立；

在统计概率情形，由于任一事件A在n次试验中出现的次数m总满足$0\leqslant m\leqslant n$，故此有$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$，即1°成立。

§1.3 概率模型与公理化结构

概率论和几何学、代数学等数学学科一样，通过建立起公理化结构，可给概率以数学定义。它既可包括前面三种情况，又具有更广泛的一般性。