内 容 提 要

本书从工程实际出发，针对在结构动力分析中出现较多的大型线性结构特征参数和动力响应分析问题，系统地介绍了目前广泛应用的各种有效的数值方法，例如子空间迭代法、截断Lanczos法、带Lanczos法、分模态综合法、直接积分法、模态加速度法和Ritz向量直接叠加法等；也介绍了二次特征问题的有效解法，例如广义Lanczos法等；并在附录中给出两个实用的计算机程序。本书尽可能从工程技术观点进行阐述，力求深入浅出，并配置了一定数量的例题和习题，以满足教学和读者自学的需要。

本书可作为高等工科学院校有关专业研究生和高年级大学生的教材和教学参考书，也可供从事结构动力分析、设计、计算和软件研制的广大教师和工程技术人员参考。

（陕）新登字007号

结构动力分析的数值方法

徐稼轩　郑铁生　编著

责任编辑　王新安

•

西安交通大学出版社出版

邮政编码　710049

西安向阳印刷厂印装

陕西省新华书店经销

•

开本850×1168　1/32　印张8.75　字数：219千字

1993年6月第1版　1993年6月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN7-5605-0559-7/O·95　定价：4.25元

研究生教材总序

研究生教育是为国家培养高层次人才的，它是我国高等教育的最高层次。研究生必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，具有从事科学研究或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是搞好研究教学的重要环节。为此，我们组织出版这套以公共课和一批新型学位课程为主的研究生教材，以满足当前研究生教学的需要。这套教材的作者都是多年从事教学、科研、具有丰富经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外最新学术动态，使研究生学习之后能迅速接近当前科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到应有的基本理论和基本内容，以保持学位课程内容的相对稳定性和系统性，并具有足够的深广度。

这套研究生教材虽然从提出选题、拟定大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致工作，但毕竟是第一次出版这样高层次的系列教材，水平和经验都感不足，缺点和错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

序

结构动力分析是固体力学专业研究生的一门重要的学位课程，在我校开设已有十余年。它主要研究大型结构动力分析的数值方法，随着计算机的高速发展与广泛应用，这门学科近年来发展很快，它所研究的理论与方法在航空、航天、土木、运输、能源、化工等工业部门的大型工程结构、机械的动态设计中得到很好的应用，与之相适应的各种通用或专用的计算机软件大量涌现。目前它已发展成为振动工程的一个重要分支，其重大的工程实用价值已日益为人们所共识，这门课程亦已成为工程专业研究生的一门重要课程。

我作为课程组的一名成员，衷心感谢我的两位同事与挚友——本书作者徐稼轩教授与郑铁生副教授，他们很好地总结了这门课程的教学经验与学科研究成果，为教材建设作出了贡献。结构动力分析是一门理论性较强的课程，为了能尽量结合工程实际，便于读者阅读与理解，作者在物理概念的阐述，内容的安排，基础知识和现代数值方法的衔接，系统性，完整和实用性，包括例题的安排和工程实用计算软件的选取等方面都作了精心的考虑，力求深入浅出，便于教学和自学参考。

结构动力分析的基本内容，方法和有关实用软件目前已是广大科研和工程技术设计人员所必需具备的基本知识，我衷心希望这本书能成为高等工科院校研究生及高年级学生的一本好的教材，成为有关工程技术人员的一本有价值的参考书。

许庆余

1993年2月

前言

近年来，随着有限单元的法出现和计算机的广泛应用，结构动力学有了惊人的发展。它已完全可以用来对大型结构进行动力分析，从而在航天、航空、船舶、车辆、机械、建筑和化工等工业技术部门中占有愈来愈重要的地位。在这些部门中已把原来由于条件限制而不得不采用静态设计，动态校核的方法，逐渐改为合理的动态设计。这就需要更多的工程技术人員掌握结构动力分析的基本理论、实用的计算方法和相应的软件，本书就是根据这一目的编写的。

本书的内容已在西安交通大学有关专业的研究生中进行过多年的讲授。虽然结构动力学的内容涉及许多数学问题，但本书对这些问题尽可能按照工程类读者的理解习惯进行编写。力求深入浅出，语言上通俗易懂。因此，凡具有振动力学和线性代数基本知识的读者，都可以阅读本书有所裨益。

本书从工程实际出发，针对在结构动力分析中出现较多的大型线性结构特征参数和动力响应分析问题，较系统地介绍了目前最有效的数值方法。例如，对实模态问题，除介绍子空间迭代法和分模态综合法外，还介绍计算效率更高的截断 Lanczos 法；对复模态问题，本书介绍了广义 Lanczos 法；对动力响应分析问题，除介绍传统的模态位移法和目前常用的直接积分法外，还介绍收敛性好的模态加速度法和 Ritz 向量直接叠加法，并考虑子空间载荷的情况。本书还给出了两个计算方法先进的实用计算机程序。

本书共分 6 个部分——5 章正文和附录，主要介绍大型线性离散系统的模态参数和动力响应的数值分析方法。第一章介绍一些常用的计算方法和标准特征问题的基本概念；第二章介绍工程

中常见的广义特征问题和二次特征问题的有关特性，为理解各种特征问题的解法打下基础；第三章介绍求解工程特征问题的一些基本方法，其中有些方法常用于求解中小特征问题，虽然这些方法不能直接用来求解大型特征问题，但将其中的一些方法进行巧妙的组合后，就能形成求解大型特征问题的有效方法；第四章和第五章是本书的重点，分别介绍了分析计算模态参数和动力响应的各种有效的数值方法，这些方法都是目前流行的较实用的方法；在附录中给出了两个计算机程序，这些程序都是作者在解决工程实际问题时编制并经过实践考验的，具有可靠的实用价值。另一方面，本书还介绍了目前工程上常遇到的二次特征问题的有效解法，如果读者对这个问题感兴趣，可参看有关章节。如不讲授打 * 号的章节，使用本书授课时数约为 40～50 学时。

本书具有较强的系统性和推理性。为了便于读者理解和掌握，在介绍各种方法时，先介绍其基本思想，让读者了解问题的实质；然后介绍方法本身及其基本计算公式，并讨论方法的精度及其优缺点；最后给出其具体计算步骤，使读者可根据它理解或编制该方法的程序。在一、二、三章末都给出一定数量的习题和参考答案，以便读者复习和巩固。

本书的第一章和第五章由郑铁生编写，其他部分由徐稼轩编写。全书由徐稼轩统一定稿。

西安交通大学工程力学系许庆余教授在本书的编写过程中给予了大力协助，并仔细地审阅了书稿，提出许多有益的意见和具体建议，特此表示深切的感谢。

由于作者水平有限，书中如有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1992 夏

绪　论

工程中有许多结构主要承受着随时间变化的动载荷。例如在路面上高速行驶的车辆,在雷雨中飞行的飞机,近海钻井的平台和载有脉动流的管道等。当动载荷引起的变形和应力成为主要成分时,就需对结构进行动力分析,其主要内容是分析结构的动力特性,即确定结构的模态参数和由动载荷引起的响应(变形和应力等)。图 0-1 给出了结构动力研究的典型步骤,其中主要的步骤是设计、分析和试验。例如在民用工程中,对现存的水坝进行动力分析,并用动力试验审查分析的正确性,而分析和试验的结果可给出在特定地震条件下保证水坝不损坏的最大水深准则;对汽车也要进行动力分析和试验,以确定新设计的车型的动力特性,这些分析和试验的结果将导致设计的改变,以便改进它的驾驶性能和经济性。

在结构动力分析中首先要求建立结构的数学模型,如图 0-1 中 2a 和 2b 所示。在图 2a 的步骤中,我们必须设计一个基本上与实际结构相似的理想分析模型,这个模型要便于进行数学分析。分析模型主要由下列三部分组成:

(1)用若干假设简化实际结构,使其成为分析模型;

(2)用简图描绘出分析模型;

(3)给出设计参数(尺寸和材料特性等)。

分析模型可分为两类:连续模型和离散模型。图 0-2 给出悬臂梁的连续模型(a)和离散模型(b)。连续模型具有无限多个自由度,而离散模型具有有限多个自由度。图 0-2 的离散型也称为集中质量模型,因为这时系统的质量,假设用少量的点质量来表示。本书仅研究离散模型。

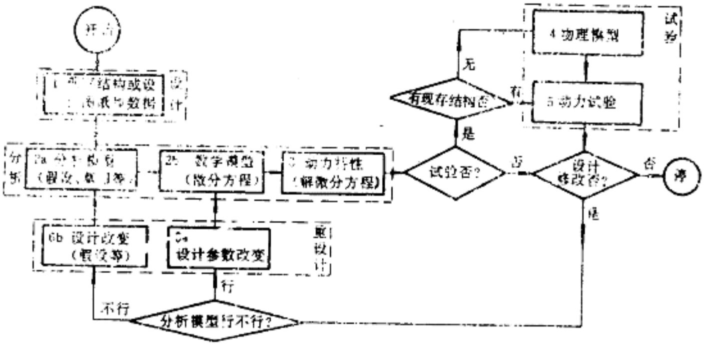

图 0-1　结构动力研究的典型步骤

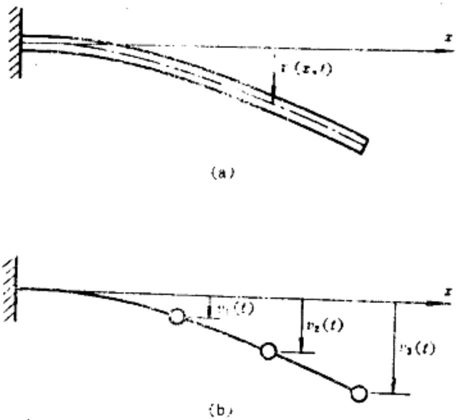

图 0-2　悬臂梁的两种分析模型

为了建立有效的分析模型，必须明确这些分析模型的作用，即它究竟表示实际结构的哪方面特性，而分析模型的复杂程度正取决于这一点。例如图 0-3 用两种不同的分析模型研究火箭，其中 30 个自由度的分析模型是用于初步研究和确定总体的试验要求，而 300 个自由度的模型则能给出设置传感器部位运动的精确描

述。最理想的分析模型是既简单又能充分表示所必须代表的结构特性。

有了分析模型后，就要用物理的运动定律(牛顿定律，应力-应变关系等)得到分析模型的运动微分方程。连续模型可得到偏微分方程，离散模型可得到常微分方程，这样导出的运动微分方程组称为结构的数学模型。模型建立得好坏是结构动力分析成败的关建，由于这方面已有专门书籍(机械振动、有限单元法等)介绍，本书将不涉及。

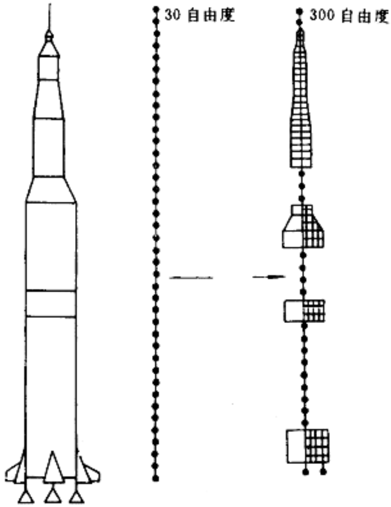

图 0-3　火箭的两种分析模型

一旦建立数学模型后，结构动力分析的下一步任务是解运动微分方程，确定结构的模态参数和动力响应。当结构大而复杂时，这个任务不但工作量大，而且也很困难。幸运的是，近年来由于计算机和有限单元法的出现和进步，以及己研制出一些很有效的解运动微分方程组的数值方法，从而使这方面工作可较顺利地进行。即使这样，大型复杂结构的计算工作量仍非常繁重，必须借助计算机用大型计算程序(例如 ADINA、ANSYS 程序等)来完成。这时的任务是如何简化结构和提供输入数据(尺寸、材料特性和截荷等)，这就是结构动力分析的"技巧"所在。

动力研究中动力试验的基本目的是，证实数学模型的和理性合确定载荷的重要信息以及动力研究中所需的其它量。如有现存的结构，则可直接用它进行动力试验；如没有现存结构，则要根据设计图纸制造按比例缩小的物理模型进行试验。常用的物理模型

为实际结构的 1/10 或更小。由于这方面的内容已有专门书籍介绍，本书不涉及。

本书主要介绍求解大型线性离散模型运动微分方程的各种有效数值方法。内容主要有两部分：一部分是求解结构模态参数的数值方法，例如子空间迭代法、分模态综合法以及效率更高的各种 Lanczos 法等；另一部分是求解结构动力响应的数值方法，例如 Wilson-θ 法、Newmark 法、振型叠加法、模态加速度法和 Ritz 向量直接叠加法等。

本书所介绍的求解结构模态参数的数值方法中，不仅包含一般广义特征问题的解法，而且也介绍了目前在高速回转结构和含高速流管系结构中出现的二次特征问题的有效解法。例如广义反迭代法和广义 Lanczos 法等。在另一部分内容中，除了介绍计算确定性激励引起响应的数值方法外，还介绍了计算地震随机激励引起的结构最大响应的统计方法(地震响应谱分析方法)。这个方法也可推广到计算海洋工程结构由随机流体载荷引起的最大响应，及道路对车辆的随机载荷引起的最大响应等。

在工程中常遇到一些大型的复杂结构，例如航天飞机、火箭、车辆、船舰、高速机械及海洋工程结构等，它们的自由度数很大，有的有上万个自由度。这些结构用适当的方法(例如有限单元法)建立的刚度矩阵和质量矩阵都是大型的稀疏矩阵。对这样的矩阵用一般的数值计算方法(例如 QR 法、Jacobi 法等)求全部模态参数或精确的响应是很不经济的，同时由于受到计算机内存的限制，一般是不可能的，而实际上也是不必要的。因为在工程上一般仅需求少量的若干阶模态，例如若干最低阶模态或载荷能激起的一些主要模态，这就是本书后面要介绍的工程中大型特征问题的特点。本书主要介绍适合这些特点的相应计算方法，这些方法的主要性能是如何把一个大型特征问题降阶为一个适当的中小特征问题，并保证中小特征问题的模态(特征向量)能充分接近原大型特征问题的若干感兴趣的模态。如这些模态是由载荷激起的主要模态，则用

目　录

第一章 基础知识

本书主要研究离散结构动力系统的固有值、模态以及动力响应的常用值计算方法。作为这些方法的理论基础，本章将根据本书特点概述线性代数和数值分析中与本书内容有关的一些基本概念、方法及运算。并在后面章节中将直接引用这些基本方法。

1.1 符号的约定与基本概念

本书给出书中常用符号的习惯记法和意义，并回顾线性代数中的一些基本概念。

1.1.1 符号约定

本书用方括弧将大写字母括起来表示矩阵，如[K]、[M]、[Λ]、[Φ]等；相应地，冠以下标的小写字母如 k_{ij}、m_{ij}、λ_{ij}、ϕ_{ij}分别表示矩阵[K]、[M]、[Λ]、[Φ]的第 i 行第 j 列元素；用花括弧将小写字母(或带下标)括起来表示向量，如$\{x\}$、$\{y\}$、$\{\alpha\}$、$\{\phi\}$、$\{x_i\}$、$\{y_i\}$、$\{\alpha_i\}$、$\{\phi_i\}$等；向量$\{x\}$和$\{x_i\}$的第 i 个分量别用 x_i 和 x_{ij}表示；零矩阵和零向量即所有元素都是零的矩阵和向量，仍统一记为“0”而不加区别。

以 m 个 n 维向量$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，…，$\{x_m\}$为列所构成的 $n\times m$ 矩记为$[X]=[\{x_1\}\ \{x_2\}\ \cdots\ \{x_m\}]$。相应地，给定矩阵[$A$]后，它的第 j 列向量记为$\{a_j\}$。

符号 δ_{ij}是 Kronecker 符号，其表达式为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i\neq j\end{cases}$$

n 阶单位矩阵用[I_n]表示。当不强调单位矩阵的阶数，或对单

位矩阵的阶数不会发生混淆时，常省略下标直接记为$[I]$。$[I_n]$的 n 个列向量依次记为$\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$。它们构成了 n 维线性空间的一组基底，称为自然基底组。$\{e_j\}$是第 j 个自然基底向量，显然，$\{e_j\}$的元素满足

$$e_{ij} = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-1}$$

$[A]^T$ 和$[A]^H$ 分别表示$[A]$的转置矩阵和共轭转置矩阵，即 $m\times n$ 矩阵$[A]$的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}则$[A]^T$ 和$[A]^H$ 均为 $n\times m$ 矩阵，其第 i 行第 j 列元素分别为 a_{ji}和 $\bar{a}_{ij}$，这里 $\bar{a}_{ji}$表示 a_{ji}的共轭复数。而列向量$\{x\}$的转置和共轭转置分别为$\{x\}^T$ 和$\{x\}^H$，它们是行向量。由上述定义显然有$[A]^H=[\bar{A}]^T$ 和$\{x\}^H=\{\bar{x}\}^T$，并且当$[A]$和$\{x\}$分别是实矩阵和实向量时，则有$[A]^H=[A]^T$ 和$\{x\}^H=\{x\}^T$。

实数域和复数域分别记为 R 和 C。实数域(或复数域)上的 n 维向量全体所成集合是 n 维线性空间，记为 R^n(或 C^n)。$\{x\}\in R^n$(或 C^n)表示$\{x\}$是 n 维实(或复)向量。$R^{m\times n}$(或 $C^{m\times n}$)表示实数域(或复数域)上 $m\times n$ 矩阵全体所成集合，它是线性空间，若$[A]\in R^{m\times n}$(或 $C^{m\times n}$)，则表示$[A]$是 $m\times n$ 实(或复)矩阵。例如，若$[A]\in R^{m\times n}$，则$[A]^T\in R^{n\times m}$。

设 $m(\leqslant n)$个向量$\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\}\in R^n$，由这 m 个向量的任何线性组合所构成的集合

$$\{\{x\} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\{x_i\}\,|\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in R^n\}$$

称为 R^n 的由$\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\}$所生成的子空间，记为 span$(\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\})$，$\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\}$称作生成向量。特别地，当$\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\}$线性无关时，span$(\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\})$是 R^n 的一个 m 维子空间。

1.1.2 向量的内积和正交

在线性代数中，R^n 内任意两个向量$\{x\}$和$\{y\}$的内积定义为

$$(\{x\},\{y\}) = \{y\}^T\{x\} = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1-2}$$

我们把 R^n 中定义的如此内积的集合称为 n 维欧几里德空间，一般仍记为 R^n。$n\leqslant 3$ 的欧几里德空间也称为几何空间。

由式(1-2)所定义的内积明显具有以下性质：

(1)$(\{x\},\{y\})=(\{y\},\{x\})$；

(2)$(\alpha\{x\},\{y\})=\alpha(\{x\},\{y\})$；

(3)$(\{x\}+\{y\},\{z\})=(\{x\},\{z\})+(\{y\},\{z\})$；

(4)$(\{x\},\{x\})\geqslant 0$，当且仅当$\{x\}=0$ 时，$(\{x\},\{x\})=0$。

由上述内积的定义和性质，可以引出向量的模以及向量之间的夹角与正交的概念。定义

$$\|\{x\}\|_2=(\{x\},\{x\})^{\frac{1}{2}} \tag{1-3}$$

为向量$\{x\}$的模(或长度，或欧几里德范数)。

由 Schwarz 不等式

$$|(\{x\},\{y\})|\leqslant \|\{x\}\|_2\cdot\|\{y\}\|_2$$

可定义向量$\{x\}$与$\{y\}$之间的类角为

$$\widehat{\{x\},\{y\}}=\arccos\frac{(\{x\},\{y\}}{\|\{x\}\|_2\cdot\|\{y\}\|_2} \tag{1-4}$$

由此定义可以看出，二向量之间的夹角越小，则其相关程度越大；当夹角为零时，二向量相互平行——线性相关。另一方面，若非零向量$\{x\}$和$\{y\}$之间的夹角$\widehat{\{x\},\{y\}}=\frac{\pi}{2}$，则内积$(\{x\},\{y\})=0$；反之，若内积$(\{x\},\{y\})=0$，则夹角$\widehat{\{x\},\{y\}}=\frac{\pi}{2}$。因此我们可以引入正交的概念。

设$\{x\},\{y\}\in R^n$，如果

$$(\{x\},\{y\})=0 \tag{1-5}$$

则称$\{x\}$与$\{y\}$相互正交，记为$\{x\}\perp\{y\}$。特别地，当$\{x\}$与$\{y\}$的模都为 1 且$\{x\}\perp\{y\}$时，我们称$\{x\}$与$\{y\}$相互规范(规一化)正交。

如果在复数域上的 n 维线性空间 C^n 上定义内积为

$$(\{x\},\{y\})=\{y\}^H\{x\}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y}_i \qquad ($$

则形成了更一般的酉空间，仍记为 C^n。酉空间的内积也有 4 条基本性质，只需将 R^n 内积的 4 条基本性质中的(1)改为

$$(\{x\},\{y\}) = \overline{(\{y\},\{x\})}$$

其余 3 条性质完全相同，不再重复。

由 C^n 中内积的性质(1)和(2)还可推出

$$(\{x\},\alpha\{y\}) = \bar{\alpha}(\{x\},\{y\}) \tag{1-7}$$

因为 $$(\{x,\alpha\{y\}) = \overline{(\alpha\{y\},\{x\})} = \overline{\alpha(\{y\},\{x\})} = \bar{\alpha}\,\overline{(\{y\},\{x\})} = \bar{\alpha}(\{x\},\{y\})$$

C^n 中向量的模，向量间夹角与正交的概念与 R^n 的完全相同，不再赘述。

在结构动力分析中，通常使用广义的加权内积、加权规范化和加权正交的概念，这里的权表现为质量矩阵。设$[M]$是正定矩阵，$[M]\in R^{n\times n}$，$\{x\},\{y\}\in R^n$，定义

$$([M]\{x\},\{y\}) = \{y\}^T[M]\{x\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j y_i \tag{1-8}$$

为 R^n 中向量$\{x\}$与$\{y\}$关于正定权矩阵$[M]$的广义内积，记为$(\{x\},\{y\})_M$ 读者不难验证，R^n 中内积的 4 条性质，也全部为如此定义的广义内积所具有。应该注意，权矩阵$[M]$必须是正定矩阵，否则将不具有这 4 条性质。

仿照式(1-3)～(1-5)可以引出广义模和广义正交的概念。称

$$\|\{x\}\|_M = (\{x\},\{x\})_M^{\frac{1}{2}} \tag{1-9}$$

为向量$\{x\}$的广义模。当

$$(\{x\},\{y\})_M = 0 \tag{1-10}$$

时，称向量$\{x\}$与$\{y\}$广义正交。今后当不致于引起混淆时，我们将略去广义的提法，仍直接称上述广义内积为内积，广义模为模，广义正交为正交。

m 个向量$\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_m\}$，如果两两相互正交，即

$$(\{x_i\},\{x_j\}) = 0,\text{或}(\{x_i\},\{x_j\})_M = 0 \qquad (i\neq j)$$

它们构成了正交组。特别地，若

$$\text{或}\quad \left.\begin{aligned}(\{x_i\},\{x_j\}) &= \delta_{ij}\\ (\{x_i\},\{x_j\})_M &= \delta_{ij}\end{aligned}\right\} i,j=1,2,\cdots,m$$

则称它们构成了规范正交组，即所有向量的模为1的正交组。

最后，我们引入向量与子空间正交的概念。设$\{x\}\in R^n$（或C^n），S是R^n（或C^n）的一个子空间，如果对于任何$\{y\}\in S$都有$\{x\}$与$\{y\}$正交，则称$\{x\}$与S正交。记为$\{x\}\perp S$，由所有正交于S的向量全体组成的集合称为S的正交补空间，记为$S^{\perp}$，它也是R^n的一个子空间。例如，设$S=\mathrm{span}(\{y_1\},\{y_2\},\cdots,\{y_m\})$若$\{x\}\perp\{y_i\}(i=1,2,\cdots,m)$则$x\perp S$。特别地，若$\{x\}\perp R^n$，则$\{x\}$是零向量。

1.1.3 矩阵的相似变换，酉变换和正交变换

首先介绍相似矩阵和矩阵的相似变换，然后给出一种特殊的相似变换——酉变换。酉变换是与酉矩阵的概念紧密相关的，而正交矩阵又是一种特殊的酉矩阵——实的酉矩阵。

设$[A]$，$[B]\in C^{n\times n}$，如果存在非奇异方阵$[S]\in C^{n\times n}$，使得

$$[B]=[S]^{-1}[A][S] \tag{1-11}$$

成立。则$[B]$与$[A]$相似，记作$[B]\sim[A]$。由式(1-11)所定义的矩阵$[A]$到$[B]$的变换称为相似变换。

矩阵的相似变换具有如下3条性质：

(1)反身性：$[A]\sim[A]$；

(2)对称性：若$[A]\sim[B]$，则$[B]\sim[A]$；

(3)传递性：若$[A]\sim[B]$，$[B]\sim[C]$，则$[A]\sim[C]$。

例1-1 对于二阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},[B]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

存在二阶方阵

$$[S]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},[S]^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

使得$[B]=[S]^{-1}[A][S]$成立，因此$[B]\sim[A]$。另一方面又有

$$[A]=[S][B][S]^{-1}=([S]^{-1})^{-1}[B][S]^{-1}$$

因此$[A]\sim[B]$。

实用中，往往不是需要判断两个给定的矩阵是否相似，而是对于给定的方阵$[A]$，寻找合适的可逆矩阵$[S]$来对$[A]$作相似变换，以产生一个我们感兴趣的矩阵$[B]$。

下面我们讨论酉矩阵和正交矩阵。

设$[U]$是n阶复矩阵，即$[U]\in C^{n\times n}$，如果

$$[U]^H[U]=[I] \tag{1-12}$$

成立，则称$[U]$是酉矩阵。实的酉矩阵是正交矩阵，即如果$[P]\in R^{n\times n}$，且满足

$$[P]^T[P]=[I] \tag{1-13}$$

则称$[P]$是正交矩阵。

酉矩阵和交矩阵有以下基本性质：

(1)单位矩阵是酉矩阵，也是正交矩阵。

(2)若$[U]$是酉矩阵，$[P]$是正交矩阵，则

$$[U]^{-1}=[U]^H,[P]^{-1}=[P]^T$$

(3)若$[U]$是酉矩阵，$[P]$是正交矩阵，则$[U]^H$和$[P]^T$分别也是酉矩阵和正交矩阵。

(4)若$[U]$和$[V]$都是同阶酉矩阵(或正交矩阵)，则$[U]$与$[V]$的乘积$[S]=[U][V]$是酉矩阵(或正交矩阵)。

性质(1)和(2)比较明显，性质(3)实际上可表述为

$$([U]^H)^H([U]^H)=[U][U]^{-1}=[I]$$

而性质(4)则表示为

$$\begin{aligned}([U][V])^H([U][V])&=[V]^H[U]^H[U][V]\\&=[V]^H[V]=[I]\end{aligned}$$

由酉矩阵和正交矩阵的定义可知，n阶酉矩阵$[U]$(或正交矩阵$[P]$)的n个列构成了C^n(或R^n)上的一组规范正交向量组，即

$$\begin{cases}\{u_i\}^H\{u_j\}=\delta_{ij}\\\{p_i\}^T\{p_j\}=\delta_{ij}\end{cases}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1-14}$$

例1-2 二阶方阵