高等学校教学参考书

初等数学复习及研究

（立体几何）

朱德祥编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

初等数学复习及研究

（立体几何）

朱德祥编

人民教育出版社

本书系以中学平面几何和立体几何为基础写成的。为了便利读者，特别注意全书内容自成系统，对立体几何知识加以系统地复习与整理和适当地加深与提高。全书内容分五章，分论空间直线与平面、球、轨迹、初等几何变换、面积与体积、简单球面几何与球面三角。编写时注意到与平面几何、解析几何、射影几何、几何基础各科间的联系。每章末附有充分的习题，帮助读者进一步对本课程的理解。

本书可作为师范院校数学系的参考书，中学教师在教学时也可取为参考。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

初等数学复习及研究

立体几何

朱德祥编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

唐山人民印刷厂印装

*

开本 787×1092　印张 7 10/16　字数 183,000

1960年3月第4版　1979年5月第2次印刷

印数 20001—340,000

书号 13012·0340　定价 0.60 元

目　录

第一章　空間直綫与平面

第二章 球·軌迹

第三章 初等几何变换

第四章 面积与体积

第五章 簡单球面几何与球面三角

第一章　空間直綫与平面

1.1 点与直綫、点与平面的相关位置·空間几何公理

我們現在以中学几何以及一年級所学平面几何为基础，来学习立体几何。第一章是这个学习的关鍵部分。

首先介紹初等几何即欧几里得[1]几何公理体系。此地所介紹的，基本上就是1899年希尔伯特[2]在历史成就的基础上所完成的初等几何公理体系。

关于希尔伯特公理体系，在学习平面几何时可能已經介紹过了，此地为了完备和引用方便起見，再重复一下。

点、直綫、平面称为几何元素。几何元素集合起来，便組成我們研究的对象几何图形。以后除非另有声明，將以大写拉丁字母A、B、C等表示点，以小写拉丁字母a、b、c等表示直綫，以小写希腊字母α、β、γ等表示平面。并且当談到两点、两直綫、三平面等等时，我們了解作不相同的两点、两直綫、三平面。

若点A在直綫a上，也就說直綫a通过或含有点A。若点A在平面α上，也就說平面α通过或含有点A。

1.1.1 結合公理

I_1. 通过任意給定的两点有一直綫。

I_2. 通过任意給定的两点至多有一直綫。

I_3. 每一直綫上至少有两点；至少有三点不同在一直綫上。

I_4. 通过任意給定的不共綫三点（即三点不在同一直綫上）

---

① Euclid(約紀元前330—275年)。

② David Hilbert(1862—1943年)。

有一平面；每一平面上至少有一点。

Ⅰ$_5$. 至多有一平面通过任意給定的不共綫三点。

Ⅰ$_6$ 若直綫 a 的两点 A、B 在平面 α 上，則 a 的所有点都在 α 上。这时直綫 a 称为在平面 α 上，或平面 α 通过或含有 a。

Ⅰ$_7$. 若两平面有一公共点，則至少还有一公共点。

Ⅰ$_8$. 至少有四点不同在一平面上。

1.1.2 順序公理

Ⅱ$_1$. 若点 B 介于两点 A、C 之間，則 A、B、C 是一直綫上的不同点，且 B 也介于 C、A 之間。

Ⅱ$_2$. 对于任意两点 A、B，直綫 AB 上至少有一点 C 存在，使 B 介于 A、C 之間。

Ⅱ$_3$. 在共綫三点中，一点介于其他两点之間的情况不多于一次。

Ⅱ$_4$. （帕須[①]公理）。設 A、B、C 是不共綫的三点，a 是平面 ABC 上不通过 A、B、C 中任一点的一直綫，則若 a 有一点介于 A、B 之間，那末它必还有一点介于 A、C 之間或介于 B、C 之間。

1.1.3 合同公理

Ⅲ$_1$. 設 A、B 为一直綫 a 上两点，A' 为同一或另一直綫 a' 上的点，則在 a' 上点 A' 的給定一側有一且只一点 B' 使綫段 AB 合同于或等于綫段 $A'B'$：$AB=A'B'$。并且对于每一綫段，要求

$$AB=BA.$$

Ⅲ$_2$. 設綫段 $A'B'=AB$，$A''B''=AB$，則也有 $A'B'=A''B''$。

Ⅲ$_3$. 設 AB 和 BC 是直綫 a 上沒有公共內点的两綫段，而 $A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直綫 a' 上的两綫段，也沒有公共內点。如果这时有 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，則也有 $AC=A'C'$。

---

① Moritz Pasch(1843—1930)。这公理发表于1882年。

Ⅲ₄. 在平面 α 上給定 $\angle(h,k)$，在同一或另一平面 α' 上給定直綫 a'，而且在平面 α' 上指定了关于直綫 a' 的一側。設 h' 是直綫 a' 上以一点 O' 为原点的射綫。那末在平面 α' 上直綫 a' 的指定一側，有一且只一条以 O' 为原点的射綫 k' 使 $\angle(h,k)=\angle(h',k')$。每个角都要求与自身合同，即 $\angle(h, k)=\angle(h,k)$ 和 $\angle(h, k)==\angle(k,h)$。

即是說：每个角可以唯一地放在給定平面上給定射綫的給定一側。

Ⅲ₅. 設 A、B、C 是不共綫三点，而 A'、B'、C' 也是不共綫三点，如果这时有

$$AB=A'B', AC=A'C', \angle BAC=\angle B'A'C',$$

那末也就有

$$\angle ABC=\angle A'B'C', \angle ACB=\angle A'C'B'.$$

1.1.4 連續公理

Ⅳ₁. (阿基米德① 公理)。設 AB 和 CD 是任意两綫段，那末在直綫 AB 上存在着有限个点 A_1、A_2、$\cdots A_n$，排成这样：A_1 介于 A 和 A_2 之間，A_2 介于 A_1 和 A_3 之間，以下类推，并且綫段 AA_1、A_1A_2、$\cdots A_{n-1}A_n$ 都合同于綫段 CD，而且 B 介于 A 和 A_n 之間(图 1)。

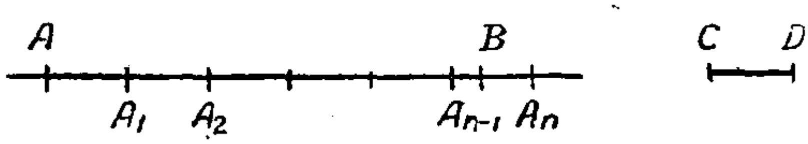

图 1

Ⅳ₂. (康託尔② 公理)。設在一直綫 a 上有由綫段組成的一个无穷叙列 A_1B_1、$A_2B_2\cdots\cdots$，其中在后的每一綫段都包含在前一个內部，并且任意給定一綫段，总有一个足碼 n 使綫段 A_nB_n 比它

① Archimedes(約公元前 287—212)。

② Moritz Cantor(1845—1918)。这公理是 1871 年写成的。

小。那末在直綫 a 上存在一点 X，落在每个綫段 A_1B_1、A_2B_2、……的內部(图 2)。

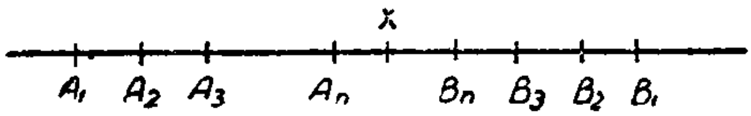

图 2

1.1.5 平行公理Ⅴ　通过直綫外一点至多可引一直綫平行于該直綫。

1.1.6 公理的推論　从这五組公理可以推出欧氏几何全部結論，当然这个过程是十分不簡单的。我們举几个最簡单的为例：从結合公理出发，可以推証下列諸命題。

由公理 I_1 和 I_2 立刻得到

定理 1.　两点决定唯一直綫。

从公理 I_4 和 I_5 得到

定理 2.　不共綫三点决定唯一平面。

定理 3.　一直綫 a 和它外面一点 A 决定唯一平面。

証明：因为直綫 a 上至少有两点 B、C (公理 I_3)，不共綫三点 A、B、C 决定一平面 α (公理 I_4)。这平面 α 通过直綫 a(公理 I_6) 和点 A。又凡通过 a 和 A 的平面都要含三点 A、B、C，所以根据公理 I_5，只能与 α 重合。

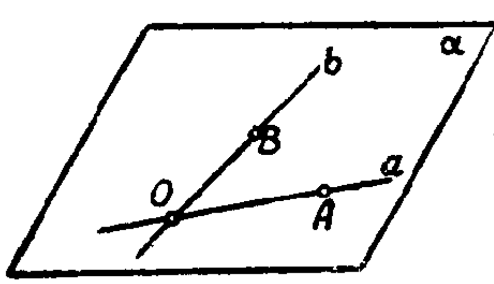

图 3

定理 4.　两相交直綫决定唯一平面。

証明：設两直綫 a、b 相交于点 O (图 3)，由公理 I_3，在 a 上除 O 外还有一点 A，在 b 上除 O 外还有一点 B。根据公理 I_4，不共綫三点 O、A、B 决定一平面 α。这平面 α 既通过 a 又通过 b (公理 I_6)。

此外不再有任何平面既通过 a 又通过 b，因为这样的平面必含

O、A、B 三点，因而与 α 重合。

定理 5. 两平行直綫决定唯一平面。留給讀者自証。

定理 6. 空間至少有四平面六直綫。

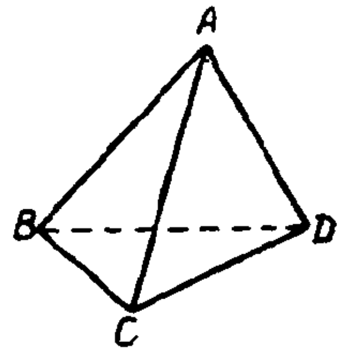

图 4

証明：根据公理 I_8，空間至少有不共面(即不在同一平面上)的四点 A、B、C、D(图 4)。根据公理 I_1，它們决定了六直綫 AB、AC、AD、BC、BD、CD; 根据公理 I_4，它們决定四平面 BCD、ACD、ABD、ABC。

系　不共面的直綫存在。

因 AB 和 CD 便是不共面的直綫。

定理 7. 若两平面公有一点，則必公有一直綫上的点，且此外不再有其他公共点。

証明：設两平面 α、β 有一公共点 A，則至少还有一公共点 B(公理 I_7)。有一直綫 a 通过两点 A、B(公理 I_1)，而由公理 I_6，直綫 a 上所有各点既在 α 上又在 β 上，所以平面 α 和 β 公有直綫 a 上各点。

平面 α 和 β 不能再有其他公共点，否則 α 和 β 便將重合了(定理 3)。証完。

这时平面 α 和 β 称为相交，直綫 a 称为其交綫。所以，若两平面有一公共点，便相交于一直綫。

到此可以看出，运用結合公理可以推出一些命題。但必須指出，只用公理 I_{1-8} 所能証明的几何事实为数甚少，例如从結合公理就不能推出几何元素的集合是无穷的。这样的論証，我們留在几何基础里去談。利用結合公理和順序公理，經过相当复杂的推理，可以証明定理 8—13，在此我們无妨把它們作为公理来引用。

定理 8. 每一直綫上有无穷多点。

定理 9. 每一平面上有无穷多点，而且它們不尽在一直綫上。

定理 10. 共綫三点中有一点也只有一点介于其他两点之間。

定理 11. 若 A、B 为已知点，則在直綫 AB 上有无穷多个点介于 A、B 之間，且有无穷多个点使 B 介于 A 与它們每个点之間。

定理 12. 一直綫上每一点 O 將綫上其余的点分为两类；点 O 介于异类的任两点之間，而不介于同类的任两点之間。

这时我們說点 O 分該直綫为两条半直綫或射綫，O 称为它們的原点或端点。

定理 13. 平面 α 上的一直綫 a 將 α 上除 a 以外的点分为两类；异类两点的联綫段必与直綫 a 相交，而同类两点的联綫段不与直綫 a 相交。

这时我們說直綫 a 分該平面为两半平面，a 称为它們的边緣。

現在我們可以証明：

定理 14. 在每一平面上有无穷多条不都共点的直綫。通过每一点有无穷多条不都共面的直綫。

这命題的証明留給讀者。

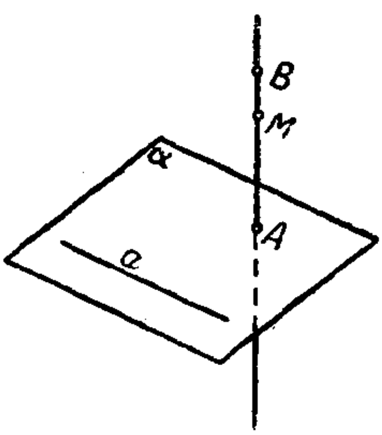

图 5

定理 15. 通过一直綫有无穷多个平面(共軸面)。

証明：設 a 为已知直綫。根据公理 I_3，至少有一点 A 不在 a 上(图 5)。直綫 a 和点 A 决定一平面 α (定理 3)。根据公理 I_8，至少有一点 B 不在平面 α 上。点 A 和 B 决定一直綫 AB(公理 I_1)。直綫 AB 上有无穷多点(定理 8)，其中任一点 M 和直綫 a 决定一平面 μ(定理 3)。由于直綫 AB 和 a 不共面，这些平面 μ 彼此不重合。所以有无穷个平面通过 a。

1.1.7 希尔伯特几何体系的三个基本对象和三个基本关系 希尔伯特取三个基本对象卽点、直綫、平面和三个基本关系卽結合关系(点在直綫上，点在平面上)、順序关系(介于…之間)、合同关系(綫

段的相等,角的相等)作为不加定义的六个基本概念,并要求这些关系满足五組公理 I_{1-8}, II_{1-4}, III_{1-5}, IV_{1-2}, V的要求,建立了初等几何的基础。从此可以建立运动概念、測量理論等等。許多几何事实(特别是平面几何事实)我們就作为可以从公理推导出来而逕加引用。

1.2 空間二直綫的相关位置

由公理 I_2 立刻得到

定理 1. 空間两直綫至多有一公共点。

当两直綫有一个公共点时,就称为相交。从 1.1 定理 4, 我們知道相交直綫是共面的。反过来,从平面几何,共面两直綫却未必相交,并且共面而不相交的两直綫称为平行綫。

从 1.1 定理 6 系,又知道不共面的两直綫存在,所以总結起来就得到

定理 2. 空間两直綫可以有下列各种相关位置:

I. 两直綫不共面,因而也就沒有公共点(不共面直綫);

II. 两直綫共面,这时分为两款:

(*a*)共面而有一公共点(相交直綫);

(*b*)共面而沒有公共点(平行直綫)。

1.2.1 注意 (1) 过去在平面几何, 两直綫不平行便相交。在立体几何,不平行的直綫却未必相交,因为它們可能不共面。重要的还在于另外一面:要断定两直綫平行,不能仅仅証明它們不相交就算完事,首先还要确定它們是共面的。

(2)利用平行公理 V,和平面几何一样,仍然得到:通过已知直綫外一点,有一且仅一直綫与已知直綫平行。事实上,通过已知点而与已知綫平行的直綫,只能在該点与該綫所决定的平面上。

(3)从平行綫的定义,我們知道,平行性有对称性,即是說:若 $a \parallel b$, 則 $b \parallel a$。現在要証明:在空間和在平面上一样,平行性有

傳遞性，卽是說，空間三直綫 a、b、c 間，若有 $a \parallel c$ 和 $b \parallel c$，則亦有 $a \parallel b$。为了証明这个重要性質，我們先証明下面的引理。

1.2.2 引理 設相交两平面各通过两已知平行綫之一，那末它們的交綫平行于这两平行綫。

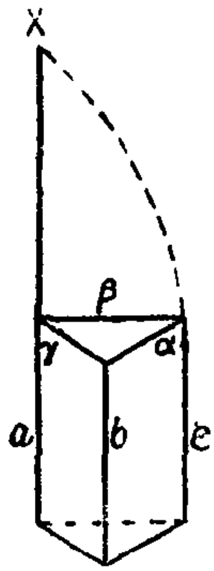

图 6

証明：假設直綫 $a \parallel b$，平面 α 通过 b，平面 β 通过 a，且 α 和 β 相交于直綫 c（图 6）。求証 $c \parallel a$，$c \parallel b$。

我們取 $c \parallel a$ 証之，$c \parallel b$ 仿此証明。

以 γ 表示平行直綫 a 和 b 所在的平面。由于 c 和 a 都在平面 β 上，要断定 $c \parallel a$，只要断定 c 与 a 不可能相交。我們使用反証法。

設直綫 c 和 a 相交于一点 X．一方面，X 在 a 上，因之既在 β 上又在 γ 上。另一方面，X 在 c 上，因之既在 β 上又在 α 上。从此推出 X 既在 γ 上又在 α 上，因而在 γ 和 α 的交綫 b 上。那末 a 和 b 相交于一点 X 了！这矛盾反証了 $c \parallel a$。

1.2.3 定理 3（平行綫的傳遞性）．同平行于第三直綫的两直綫互相平行。

証明：設直綫 $a \parallel c$，$b \parallel c$，求証 $a \parallel b$。

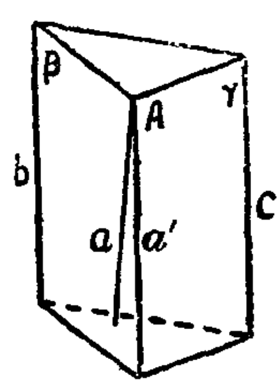

图 7

当三直綫 a、b、c 共面时，从平面几何我們知道这定理成立。当 a、b、c 不共面时証明如下。

在直綫 a 上任取一点 A（图 7），以 β 表示 A 和 b 所决定的平面，以 γ 表示 A 和 c 所决定的平面。由于假設 a、b、c 不共面，而 A 为 a 上任一点，那末 β 和 γ 不会重合。既然 β 和 γ 有一公共点 A，就相交于一直綫 a'（1.1 定理 7）。

由于 $b \parallel c$，β 通过 b，γ 通过 c，且 β 和 γ 相交于 a'，所以根据引理得 $a' \parallel c$ 和 $a' \parallel b$。

但通过点 A 只能有一直綫与 c 平行，而根据假設 a 就是这样一条直綫，所以 a' 即是 a。

从 $a' \parallel b$ 于是就得到我們的結論 $a \parallel b$。

1.2.4 空間二直綫間的角 在討論了空間二直綫三种可能的相互位置(即不共面、相交、平行)，并証明了平行性的傳递性以后，我們来将平面上两直綫夹角或交角的概念，推广于空間二直綫。为了这个，我們先証明

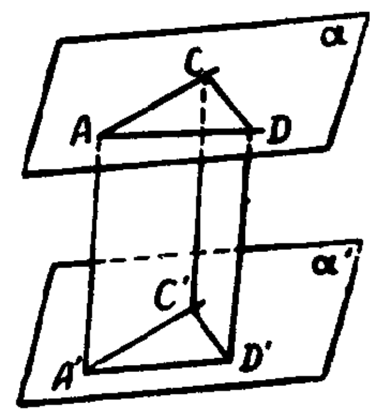

图 8

定理 4. 設两角的边分别同向平行，則此两角相等。

証明：假設两角 A 和 A' 的边分别平行且同向，要証明 $\angle A = \angle A'$。

当这两角在同一平面上时，这定理已在平面几何証过。現在假定它們在两个平面 α 和 α' 上(图 8)。在两角的边上取对应相等的綫段：$AC = A'C'$，$AD = A'D'$，并联結 AA'、CC'、DD'、CD、$C'D'$。

由于 AC 和 $A'C'$ 同向平行且相等，所以 AA' 和 CC' 平行且相等。同理 AA' 和 DD' 平行且相等。由于平行性和等量的傳递性，CC' 和 DD' 平行且相等；从而断定 CD 和 $C'D'$ 平行且相等。

两三角形 CAD 和 $C'A'D'$ 因三边对应相等而全等，$\therefore \angle A = \angle A'$，証完。

系 ①設两角的边分别异向平行，則此两角相等。

②設两角的边分别平行，一同向而一异向，則此两角相补。

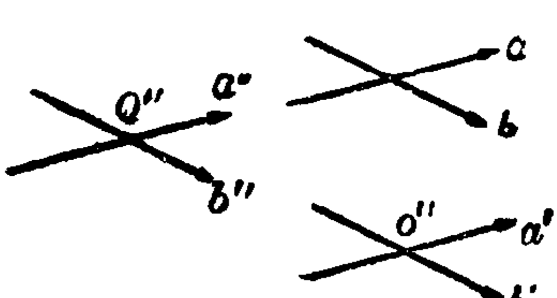

图 9

証明了定理 4 以后，我們就可以来定义不共面二直綫間的角。

設 a、b 为两条不共面直綫(图 9)，为了确定起見，我們各給

它們一个正向。通过空間任意两点 O' 和 O''，各引直綫 a' 和 a'' 与 a 同向平行，各引直綫 b' 和 b'' 与 b 同向平行。根据定理 4，$\angle(a', b')=\angle(a'', b'')$。这个大小因 a、b 而定，而与角頂的选擇无关的角，因此就定义作不共面二直綫間的角。

我們显然可以从(例如)直綫 a 上一点引 b 的平行綫，由这两条相交綫的交角来代表不共面二直綫間的角。

倘若沒有給出 a 和 b 的正向，那末不共面二直綫 a、b 于是也和平面几何里一样，形成两个互补的角。

倘若这两个互补的角相等，即各为一直角，不共面二直綫就称为互相垂直的。这垂直的概念，是平面几何同一概念的推广。

但必須特別注意，在平面几何两条垂直綫一定相交，在空間，不相交的两直綫依然可以垂直。不过当我們說："从一点 A 向一直綫 a 作垂綫"时，指的則是与 a 垂直相交的綫。

1.3 直綫与平面的相关位置

設 α 为一平面，a 为空間一直綫。按照公理 I_6，若 a 有两点在 α 上，則其每一点都在 α 上，于是直綫在平面上，或平面通过或含有該直綫。比如在工业生产上用刀口尺檢查工件的平面性时，观察刀口尺与工件的接触处是否透光，便是应用这个性質。

定理 1. 一平面和不在其上的一直綫至多有一公共点。

若直綫 a 与平面 α 有一且仅一公共点 A，它們就称为相交，A 为交点。若 a 与 α 沒有任何公共点，就說直綫平行于平面(或平面平行于直綫)，記作 $a \parallel \alpha$。

首先指出，与平面 α 相交的直綫存在，因按公理 I_8，必有一点不在 α 上，这样的点与 α 上任一点联綫，就是与 α 相交的一条直綫。

与定平面 α 平行的直綫的存在性，由定理 2 保証。