黄忠恕著

波谱分析方法及其在水文气象学中的应用

气象出版社

波谱分析方法
及其在水文气象学中的应用

黄忠恕 著

内 容 简 介

波谱分析是近代科学技术中作数据分析的一种重要方法。本书介绍了富里叶级数和富里叶变换的基础知识、谐波分析和能谱分析计算方法以及在水文、气象分析预报中的应用等问题。

本书可供从事气象、水文、地震、地理等学科的科研技术人员应用参考，亦可供大专院校有关专业的师生教学参考。

波谱分析方法
及其在水文气象学中的应用
黄忠恕 著
气 象 出 版 社 出 版
（北京西郊白石桥路46号）
北 京 印 刷 一 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行　全国各地新华书店经售
开本：787×1092 1/32　字数：140千字　印张：6.75
印数：1—3,500
1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷
科技新书目：35—99　统一书号：13194·0087
定价：0.70 元

前　言

作为一种数学方法，富里叶级数和富里叶变换的应用十分广泛。在概率论、随机过程和数值积分等应用数学领域中是一种重要的数学变换方法，在地球物理学中是资料分析的一种重要工具。富里叶级数和富里叶变换的应用一般称为波谱分析。

波谱分析(包括谐波分析和能谱分析)方法近年来在天气分析和天气预报中的应用越来越普遍，受到广大水文气象工作者的重视,这决不是偶然的。首先,这是因为许多看起来是复杂的水文气象现象都存在着简单的谐振因子。例如:洪水波的传播，大气环流和气象要素的时空变化等，都可以相当好地作为谐振变化处理。其次,波谱分析的数学方法简单严谨,物理意义清晰易懂。从数学上看,波谱分析属于正交分解方法的一种,但比较其它的正交分解方法,如自然正交函数、正交多项式、车贝雪夫多项式和球函数等,具有更明确的物理意义。从物理角度看,波谱分析是一种滤波器。它具有很宽的频带,既可实现低通滤波，也可实现高通滤波或带通滤波,应用非常方便。第三,波谱分析既是一种分析方法，也是一种预报工具。它能实现分析和预报相结合,这是目前的一些统计预报方法的一个突出优点。

在早期的气候分析和长期天气预报中，就应用了谐波分析方法研究气象要素变化的周期性、各种周期的统计意义以及周期外延预报,它是波谱分析的先驱。直到现在,谐波分析方法仍然广泛应用。大气长波和超长波变化是近年来中期天气预报研究的重要对象之一,许多研究表明,中期天气过程与指数循环和超长波活动有密切关系。在一般天气气候分析中，如环流的季

节变化、大型环流转换过程、行星尺度天气系统（极涡、副高、大气活动中心等）的分析和水文资料整理等，谐波分析方法仍具有明显的优越性。本世纪五十年代以来，由于电子计算机的应用，富里叶级数展开的谐波分析分法逐渐为富里叶变换的谱方法所代替，谱方法已成为当代地球物理学研究的重要手段之一。

本书的内容主要包括三个方面，即波谱分析原理、计算方法和应用问题。波谱分析原理简单来说就是富里叶级数和富里叶变换；或者说离散谱分析源于富里叶级数，连续谱分析源于富里叶变换。因此掌握富里叶级数和富里叶变换知识是进行谱分析不可缺少的数学基础，这是第一章的主要内容。我们在介绍数学原理时力求简明扼要，只有特别重要的数学公式才给出详细推导证明，一般的公式则着重说明其意义和应用，而不作推证。有兴趣深入研究原理的读者，可参阅有关的专著。第二章讨论波谱的计算方法。无论是离散谱或连续谱分析，都包括函数式和随机序列（离散观测数据）这样两类计算问题。前者是数学研究的内容，具有一般性和理论性，是后者的理论依据，仅作一般的讨论就够了。而后者是应用科学的问题，具有特殊性和实用性，是前者的实际补充，也是本书的重点，故尽可能充分地介绍各种实用的谱计算方法，给出具体计算步骤和实例，便于读者应用参考。本章还对比较新的有发展前途的谱方法，如快速富里叶变换、最大熵谱法和序贯谱方法等也作了简要提示。第四、五两章讨论了谱分析在水文气象分析预报中的应用问题。由于谱分析的应用是非常广泛，在本书中也不可能做到全面评论，因此这里介绍的内容大部分是作者多年来学习和应用谱方法解决水文气象问题的经验总结，希望对读者能起到举一反三的作用。第三章介绍了谱分析中经常应用的一些有关谱成分显著性统计检验的方法，并提出对周期分量作成因分析的必要性

和可能性。

过去，作者运用谱分析方法处理了不少水文气象分析和预报问题，曾在一些总结中[1,2]有过零星讨论。本书仅对波谱分析方法和应用问题作一比较系统的总结。但是，由于作者水平关系，问题一定不少，敬请批评指正。

在运用谱分析方法和总结中，得到章淹同志的帮助和鼓励。么枕生、李麦村和王绍武等同志审阅了原稿并提出许多中肯的意见，特此致谢。

目　录

第一章　波谱分析原理

利用富里叶级数能够将周期函数展开为无穷多个频率为基频整数倍的谐振动之和，而富里叶变换则能将非周期函数表示为无穷连续频域区间上的积分和，这就是波谱分析所依据的基本原理。在本书中，我们的目的在于波谱分析应用，因此本章的内容仅涉及波谱分析所必备的基础知识。

§1.1　简谐振动——谐波

振动运动是我们日常生活中处处都能观察到的一种重要的和普遍的物理运动形式。振动在时间和空间上的传播称之为波。例如：物理学中的电磁波、声波、气象学中的温压长波、气旋波，水文学中的洪水波等。一般来说，这些振动及其波的图形是复杂多变的。我们注意到，在各种振动及其波的复杂图形中，有一种最简单而又和谐的振动，这就是简谐振动，其波的形式通常可用正弦（以 sin 表示）或余弦（以 cos 表示）三角函数来描述，简称为谐波。简谐振动的基本特征是作用力F与位移X成正比例，而方向相反。如单摆运动就是简谐振动的一个实例。其数学表达式为

$$F=-\beta X(\beta>0) \tag{1.1}$$

而位移可写成

$$\begin{aligned}X(t)&=c\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi_0\right)\\&=c\sin(\omega t+\phi_0)\end{aligned} \tag{1.2}$$

或

$$X(t)=c\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta_0\right)$$
$$=c\cos(\omega t+\theta_0) \qquad (1.2')$$

式中，c 是振动运动的最大位移，一般称为振幅或波幅，其单位与位移X相同。T 称为周期，是完成一个整循环振动所需要的时间或空间尺度(在空间情况下，它又称为波长)。$\omega=\frac{2\pi}{T}$为圆频率或角速度，单位是弧度·秒$^{-1}$ 或角度·秒$^{-1}$。$\omega t+\phi_0$ 和 $\omega t+\theta_0$ 为 t 时刻运动的位相，其中 ϕ_0 和θ_0 为 $t=0$ 时的位相，亦称初始位相。由三角函数关系可知，$\phi_0=\frac{\pi}{2}+\theta_0$。

用(1.2)式描写的振动称正弦波，(1.2′)式描写的为余弦波。由于正弦函数和余弦函数可以互换，它们的波形相同，统称为谐波。因此，波幅 c 、周期T(或圆频率 ω)和初始位相 ϕ_0(或θ_0)为确定谐波的三个重要参数。当这三个参数为已知，谐波图形也就唯一地被确定了。

(1.2)式还可以展开成

$$X(t)=c\sin\phi_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+c\cos\phi_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$=a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+b\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad (1.3)$$

同样(1.2′)式也可展开成

$$X(t)=c\cos\theta_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)-c\sin\theta_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$=a'\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+b'\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad (1.3')$$

上两式中，$a=c\sin\phi_0$，$b=c\cos\phi_0$；

$a'=c\cos\theta_0$，$b'=-c\sin\theta_0$。

(1.3)和(1.3′)式表示具有波幅 c 和初始位相 $\phi_0(\theta_0)$ 的正弦(余弦)波可以分解为两个波幅分别为 a 和 b (a' 和 b') 而初始位相均为零的正弦波和余弦波之和，这两个子波的周期保持不变。

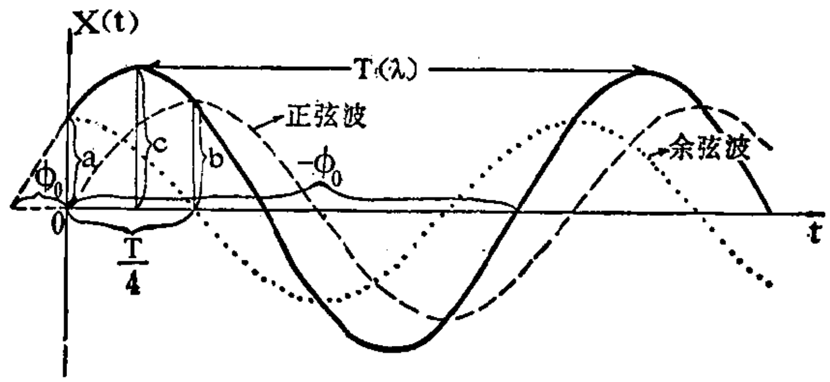

图 1.1 谐波及其分解子波的图形和主要参数的几何意义

谐波及其分解后的子波图形和它们的主要参数的几何意义见图 1.1。图中实线为谐波 $X(t)=c\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi_0\right)$ 的位移时间变化曲线，谐波的波幅 c 为波峰点(或波谷点)至横坐标(平衡位置)的垂直距离，一般取为正值。两相邻波峰(波谷)间的时差(距离)即为周期 T (波长 λ)。原点处的位相就是初始位相 ϕ_0。我们可以看到，在一个完整周期(波长)内，位移有两次为零值(即与横坐标有两个交点)。如果我们称位移从负值变为正值之间的零位移为正零位移，那么，正弦波的初始位相就等于坐标原点至第一个正零位移之间的位相差。余弦波的初始位相则为坐标原点至第一个波峰点之间的相差。从原点向左取为正(ϕ_0)，向右取为负($-\phi_0$)。图中点线和虚线为分解的余弦波和正弦波(请读者应用上述原则判别其初始位相都为零，周期或波长与分解前的谐波相同)，其波幅 a 和 b 分别为余弦波和正弦波与谐波的第一个交点处的位移。余弦波的第一个交点在纵坐标轴上，

因此分解出的余弦波波幅 a 就是谐波在纵坐标轴上的截距。而正弦波与谐波的第一个交点位于从坐标原点至$\frac{1}{4}$个周期处。与谐波波幅 c 不同点在于，分解后的余弦波和正弦波波幅 a 和 b 可以是正值(第一个交点位于横坐标上方)，也可以是负值(第一个交点位于横坐标下方)，它取决于谐波的初始位相 ϕ_0。a 和 b 的绝对值在 0 至 c 之间变化，即

$$0\leqslant|a|\leqslant c,0\leqslant|b|\leqslant c$$

正确理解和熟练掌握谐波参数及其分解图形的几何意义对于谐波分析是很重要的。

还要指出，谐波是一种既简单而又重要的波，这不仅是因为无论在日常生活中或在自然科学中我们都可以观察到谐振现象，对于我们更重要的还在于，复杂的周期现象都可以分解为一些波幅、周期和初始位相各不相同的谐波因子。换句话说，简单的谐波可以组合成复杂的周期波。正如一部复杂的机器可以分解为许多简单的部件和零件，而简单的零部件又可以组合成复杂的机器一样。这就是波谱分析的基本思想。在解析方法中，能够进行这种分解的依据，就是富里叶级数展开和富里叶变换法则。

§ 1.2 波谱的概念

“谱”或“光谱”(spectrum)一词来源于拉丁语动词“specio”，表示“想象”的意思[3]。负有对客观事物进行观察、分析和思考以后所得到的事物的形象和样子。牛顿首先将“谱”一词引入物理学中，用“光谱”的概念来描述光的波动性质。由此演变而来的“波谱”或“谱”的概念则具有更广泛的意义。

波动是物质运动的一种普遍形式。对波动特征的物理描

述，产生了一系列的“波参数”，如波幅、位相、周期、频率、波长、强度、功率和能量等。人们所观察到的许多物理现象，往往是具有多种物理特征的“混合波”，它们的波参数在一定的范围内变化。例如：可见光的波长在3800—7600埃之间，无线电波频率在10^5—10^9赫兹。天气现象和大气环流变化也是一种多频振荡，波长的水平尺度从10^{-2}—10^4公里，时间尺度从10^{-3}—10^2小时以上。波谱指的是波参数之间的一种变化关系，例如波幅-周期谱(幅谱)、位相-频率谱(相谱)就是表明波幅与周期、位相与频率的变化关系。从数学意义讲，波谱就是函数，波谱分析就是阐明波参数的函数关系。因此，波谱分析方法有解析法和模拟法之分。模拟法主要用于物理学和工程学，象各种摄谱仪、谐振器和电子示波器等，三棱分光镜是一种最简单的波谱模拟分析器；解析法是通过数值计算的办法建立波参数的函数关系。本书讨论的波谱分析方法属于解析法。

早期的波谱分析，应用对已知周期函数或时间序列进行富里叶级数展开的方法得到离散谱(线谱)，一般称为谐波分析或调和分析。这种方法虽属古典，但它的优点是计算简便。特别是具有确定的年、日周期变化的气象要素提供了充分的谐波分析实例。在波谱分析已有了重大发展的今天，谐波分析仍然没有失去其应用意义。五十年代发展起来的能谱(功率谱)分析是根据对函数作富里叶变换来实现的，这种方法能够获得连续谱(带谱)估计，它的应用比谐波分析广泛。六十年代，出现了一种目的在于提高富里叶变换计算速度的新方法，称为快速富里叶变换(简称FFT方法)。近年来，还发展了一些新的谱分析方法，例如：最大熵谱分析、时空谱分析、非平稳序列谱分析、非等间隔资料谱分析，二元资料谱分析和序贯谱分析等。这些方法的出现和应用，对水文气象分析是十分有益的。

§ 1.3 富里叶级数与谐波分析

在第一节我们给出了谐波的概念及其数学表达式，并从三角函数变换关系得到：初始位相不为零的谐波可以分解为两个更简单的谐波之和，它们的初始位相都为零，波幅取决于被分解的谐波的波幅和初始位相而周期（或频率）保持不变。现在，我们把这种分解推广到一般的周期函数。

一、富里叶定理

［定理］ 任一函数 $f(t)$，在满足一定的条件下，可以表示为一无穷正弦项（或余弦项）三角级数之和。

这一定理是法国数学家约瑟夫·富里叶(J. Fourier, 1807年）在研究热传导问题时提出来的。它可以用几种不同的数学式表示为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin(k\,\omega\,t+\phi_{k,0}) \tag{1.4}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(k\,\omega\,t+\theta_{k,0}) \tag{1.5}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\,\omega\,t)+b_k\sin(k\,\omega t)] \tag{1.6}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k e^{ik\omega t} \tag{1.7}$$

等式(1.4)至(1.7)的右边三角函数级数称为函数 $f(t)$的富里叶级数。这些等式具有同等的意义，可以根据习惯和方便选择其中之一。这种变换称为对函数 $f(t)$ 的富里叶级数展开，如果 $f(t)$为离散序列，则称为谐波分析。

式中 a_k, b_k($k=0,1,2,\cdots,b_0\equiv 0$)称为富里叶系数，$k$ 是展开区间谐波分量的波数，c_k，$\phi_{k,0}$($\theta_{k,0}$)是 k 波的波幅和初始位

相；而$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$，$\omega$为基本圆频率，$T$为基本周期，$\nu$为基本频率。$k\nu$，$k\omega$和$\frac{T}{k}$为$k$波的频率、圆频率和周期。可见，谐波分量的(圆)频率是基频的整数倍，而谐波分量的周期是基本周期的$1/k$倍。

因为

$$\left.\begin{aligned}
a_k&=c_k\sin\phi_{k,0}=c_k\cos\theta_{k,0}\\
b_k&=c_k\cos\phi_{k,0}=-c_k\sin\theta_{k,0}\\
d_k&=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)\\
d_{-k}&=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)
\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}
a_k&=d_k+d_{-k}\\
b_k&=i(d_k-d_{-k})\\
c_k^2&=a_k^2+b_k^2=4\,d_kd_{-k}\\
\mathrm{tg}\,\phi_{k,0}&=\frac{a_k}{b_k}\\
\mathrm{tg}\,\theta_{k,0}&=-\frac{b_k}{a_k}
\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

由(1.8)和(1.9)式可以看出，基本周期T（基本圆频率ω）确定后，计算富里叶系数a_k和b_k是谐波分析的基本问题。

二、欧拉(Euler)-富里叶公式

为了得到富里叶系数的计算式，我们需要记住并用到下面几个重要的三角函数的定积分公式：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=0\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=0\\&(m\neq n)\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=0\\&(m\neq n)\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx=\pi\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\pi\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

上式中m，n都是正整数，x为自变量。定积分的上、下限不一定要求$-\pi$和π，只要积分区间为2π上面各式仍然成立。公式(1.10)和(1.11)的意义留在下面去讨论。

1．求系数a_0

为了方便，以x代换ωt，(1.6)式改写为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx] \tag{1.13}$$

对(1.13)式两边在2π区间求积分，得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\right.$$

$$\left.+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right]$$

利用(1.10)式化简上式，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0$$

由此可得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{1.14}$$

因此，富里叶级数的常数项$\frac{a_0}{2}$为$f(x)$在展开区间的平均值。

2．求系数 $a_k(k=1,2,3,\cdots)$

以 $\cos nx$ 乘(1.13)式，然后在 2π 区间积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right]$$

用(1.10)至(1.12)式代入上式化简，等式右边除了第二项当 $n=k$ 时不为零外，其余全为零。则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = a_k\pi$$

由此可得

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \tag{1.15}$$

当 $k=0$ 时，$\cos kx\equiv 1$，(1.15)式就变为(1.14)式。因此(1.14)式是(1.15)式的特例。

3．求系数 $b_k(k=1,2,3\cdots)$

同样以 $\sin nx$ 乘(1.13)式，然后在 2π 区间积分并化简，可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \tag{1.16}$$

到此，我们得到确定全部富里叶系数的完整公式如下：