Б·П· 吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

上册

范宪臣 刘冠军
张春林 陈广桐 编

山东科学技术出版社
一九八五年·济南

内容简介

这套书汇集3193道习题的详细解答，分三册出版，内容广泛，题目类型多，适用面宽。

上册包括分析引论（函数与极限）、函数的微分法、函数的极值和导数的几何应用、不定积分、定积分；中册包括多元函数、重积分与曲线积分、级数；下册包括微分方程、近似计算。

全套书充分考虑了数学分析本身的系统性、逻辑性和严密性，注意到广大工科类大学生学习高等数学的特点和需要。无论对于初学者，还是有关课程的教师，都是一本理想的学习用书和参考书。

Б·П·吉米多维奇
工科用数学分析问题解答
上 册
范宪臣 刘冠军 张春林 陈广桐 编
*
山东科学技术出版社出版
（济南市南郊宾馆西路中段）
山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本 28.5印张 566千字
1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷
印数：1—16,500
书号 13195·147 定价 5.00元

J911571

出版说明

数学分析（又称微积分学）是整个高等数学的基础，它在自然科学的各个领域中，有着广泛的应用。数学分析作为一门课程，正在成为愈来愈多专业的必修课。

Б·П·吉米多维奇是苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《工科用数学分析中的问题和练习》一书，包括了从数学分析的各个方面精选出来的3193道习题，内容丰富，针对性强，适用面广。该书在苏联已连续印刷十次，在我国也有较大的影响。书中的许多习题，都广泛地被我国多种高等数学教材所采用。

我们邀请具有丰富教学经验的教师将该书的全部习题做了解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时写得比较扼要，以期对广大学习数学分析的读者起到启发、引导作用，以利于培养独立思考能力和掌握解题技能技巧。有关专业的教师亦可作为教学参考书。

山东大学郭大钧教授以及孙经先同志对全书做了仔细的审校。

这本习题解答集，对普通高等工科院校的大学生，以及电视大学、函授大学和其他业余大学的学生同样适用，对自学者也会有很大帮助。

本书编审过程中出现的某些误解、差错，恳请指正，不胜感激。

1985年6月

目　录

第一章　分析引论

§1. 函数的概念

1° 实数　有理数和无理数统称实数。实数 a 的绝对值由下式定义：当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；当 $a<0$ 时，$|a|=-a$。对任意两个实数 a 和 b，三角不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

成立。

2° 函数的定义　设 E 是给定的一个实数集，如果对 E 中的每一个 x 值，总存在唯一的实数 y 与之对应，则 y 称为定义在 E 上的 x 的（单值）函数，或因变量。x 称为自变量。y 是 x 的函数，可以记为 $y=f(x)$，$y=F(x)$ 等等。

如果对于实数集合 E 的每一个 x 值，都对应着 y 的一个或几个实数值，则 y 称为定义在集合 E 上的 x 的多值函数。本书中，如不特别说明，"函数"一词总是指单值函数。

3° 函数的定义域　使给定函数有定义的全体 x 值称为这个函数的定义域，有时也称存在域。

函数的定义域的最简单的情形为：闭区间 $[a, b]$，即适合不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合；或开区间 (a, b)，即适合不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合。也有构造比较复杂的函数的定义域（参见21题）。

4° 反函数　如果对方程 $y=f(x)$，存在函数 $x=g(y)$，使得 $y\equiv f[g(y)]$，则函数 $x=g(y)$，或按标准记号写作 $y=g(x)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数。显然，$g[f(x)]\equiv x$，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数。

在一般情况下，对方程 $y=f(x)$，可以确定一个多值的反函数

$x=f^{-1}(y)$，使对函数 $f(x)$的一切y 值，$y\equiv f(f^{-1}(y))$都成立。

5° 复合函数和隐函数　如果自变量 x 的函数 y 是由一串等式 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$等所给出，则这个函数称为复合函数。

由因变量没有解出的方程所给出的函数称为隐函数。例如，由方程 $x^3+y^3=1$ 可以确定 y为 x 的隐函数。

6° 函数的图形表示　在平面 XOY上，由满足方程 $y=f(x)$的点构成的集合，称为函数$y=f(x)$的图形。

1．证明：如果 a，b 为实数，则

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

证　因为 $a=(a-b)+b$，所以，$|a|\leqslant|a-b|+|b|$. 由此得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b| \text{ 和 } |a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|。$$

因而，有　$|a-b|\geqslant||a|-|b||$. 又因为

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|,$$

故有

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2．证明下列等式：

1）$|ab|=|a|\cdot|b|$；　　2）$|a|^2=a^2$；

3）$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq0)$；　　4）$\sqrt{a^2}=|a|$。

证　1）　当$a=0$或$b=0$时，等式显然成立；当$a\neq0$，$b\neq0$时，若 a，b 同号，有

$$ab=|ab|=|a||b|;$$

若 a，b 异号，有

$$|a||b|=-ab=|-ab|=|ab|.$$

综上所述证得

$$|ab|=|a||b|.$$

2） 由绝对值定义及 1）可知

$$a^2=|a^2|=|a\cdot a|=|a|\cdot|a|=|a|^2.$$

3） 由 1）可知

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0).$$

4） 由 2）可得

$$\sqrt{a^2}=\sqrt{|a|^2}=|a|.$$

3．解不等式：

1）$|x-1|<3$；　　2）$|x+1|>2$；

3）$|2x+1|<1$；　　4）$|x-1|<|x+1|$.

解 1） 由$|x-1|<3$，得

$$-3<x-1<3,$$

所以，不等式$|x-1|<3$的解为

$$-2<x<4.$$

2） 由$|x+1|>2$，得

$$x+1>2 \quad 或 \quad x+1<-2,$$

所以，不等式有解　$x>1$ 或 $x<-3$.

3） 由$|2x+1|<1$，得

$$-1<2x+1<1,$$

故解为　　$-1<x<0$.

4） 两边平方，得

$$(x-1)^2<(x+1)^2,$$

解之，得　　$x>0$.

4．如果$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$，求$f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$.

解 因为$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，

所以，
$$f(1)=f(2)=f(3)=0,$$
$$f(-1)=(-2)(-3)(-4)=-24,$$
$$f(0)=(-1)(-2)(-3)=-6,$$
$$f(4)=3\times 2\times 1=6.$$

5．如果 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$， 求 $f(0)$， $f\left(-\frac{3}{4}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)}$．

解 $f(0)=1$， $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，$f(-x)=\sqrt{1+x^2}$，

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$，$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$．

6．设 $f(x)=\arccos(\lg x)$，求 $f\left(\frac{1}{10}\right)$， $f(1)$，$f(10)$．

解 $f\left(\frac{1}{10}\right)=\arccos\left(\lg\frac{1}{10}\right)=\arccos(-1)=\pi$，

$$f(1)=\arccos(\lg 1)=\arccos(0)=\frac{\pi}{2},$$

$$f(10)=\arccos(\lg 10)=\arccos 1=0.$$

7．已知$f(x)$是线性函数，且$f(-1)=2$和$f(2)=-3$，求这个函数．

解 设所求函数$f(x)=ax+b$．因为 $f(-1)=2$和$f(2)=-3$，所以，有

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ 2a+b=-3, \end{cases}$$

解之，得 $a=-\frac{5}{3}$， $b=\frac{1}{3}$，于是，所求函数为

$$f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}.$$

8．如果 $f(0)=1$，$f(1)=0$ 和 $f(3)=5$，求二次有理整函数 $f(x)$．

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$．因为 $f(0)=1$，$f(1)=0$ 和 $f(3)=5$，所以，有

$$\begin{cases} 9a+3b+c=5, \\ a+b+c=0, \\ c=1 \end{cases}$$

解之，得 $a=\frac{7}{6}$，$b=-\frac{13}{6}$，$c=1$．

故所求函数为

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1.$$

9．如果把函数 $f(x)$ 在区间 $4\leqslant x\leqslant 5$ 上看作是线性的，已知 $f(4)=-2$，$f(5)=6$，求 $f(4.3)$ 的近似值（函数的线性插值）．

解 因为 $f(x)$ 在 $4\leqslant x\leqslant 5$ 上是线性的，所以

$$\frac{f(5)-f(4.3)}{f(4.3)-f(4)}=\frac{5-4.3}{4.3-4}.$$

将 $f(4)=-2$ 和 $f(5)=6$ 代入上式，得 $f(4.3)=0.4$．

10．利用绝对值的记号，将函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 如果\ x\leqslant 0; \\ x, & 如果\ x>0, \end{cases}$$

用单一式子写出．

解 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$．

确定下列函数的存在域．

11．1） $y=\sqrt{x+1}$；　　2） $y=\sqrt[3]{x+1}$．

解 1） 函数的存在域为满足不等式 $x+1\geqslant 0$ 的实数 x 的集合．解之，得函数的存在域为 $[-1, +\infty)$．

2） 函数的存在域为满足不等式 $-\infty<x+1<+\infty$ 的实数 x 的集合．解之，得存在域为 $(-\infty, +\infty)$．

12． $y=\frac{1}{4-x^2}$．

解 函数存在域为满足 $x\neq\pm 2$ 的一切实数．

13．1） $y=\sqrt{x^2-2}$；　　2） $y=x\sqrt{x^2-2}$．

解 1） 函数的存在域为满足不等式 $x^2-2\geqslant 0$ 的实数 x 的集合．解之，得存在域为 $-\infty<x\leqslant-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}\leqslant x<+\infty$．

2） 函数的存在域为满足不等式 $x^2-2\geqslant 0$ 的实数 x 的集合．解之，得存在域为 $-\infty<x\leqslant-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}\leqslant x<+\infty$．

14． $y=\sqrt{2+x-x^2}$．

解 函数的存在域为满足不等式 $2+x-x^2\geqslant 0$ 的实数 x 的集合．解之，得函数的存在域为 $-1\leqslant x\leqslant 2$．

15. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

解 $y_1=\sqrt{-x}$ 的存在域为 $x\leqslant 0$， $y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ 的存在域为 $x>-2$，所以y 的存在域为$-2<x\leqslant 0$。

16. $y=\sqrt{x-x^3}$。

解 函数的存在域为满足不等式 $x-x^3\geqslant 0$ 的实数 x 的集合．解之，得存在域为$0\leqslant x\leqslant 1$　和　$-\infty<x\leqslant -1$.

17. $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

解 函数的存在域为满足不等式$\dfrac{2+x}{2-x}>0$ 的实数 x 的集合．解之，得存在域为$-2<x<2$．

18. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

解 函数的存在域为满足不等式$\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}>0$ 的实数 x的集合．解之，得存在域为$-1<x<1$ 和 $2<x<+\infty$.

19. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

解 函数的存在域为满足不等式$-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant 1$ 的实数 x 集合．解之，得存在域为$-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$．

20. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 当$-1 \leqslant \lg\frac{x}{10} \leqslant 1$时，函数$y$值才有定义。因此函数的存在域为满足不等式$\frac{1}{10} \leqslant \frac{x}{10} \leqslant 10$的实数$x$的集合。解之，得存在域为$1 \leqslant x \leqslant 100$。

21. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

解 当$\sin 2x \geqslant 0$时，函数y值才有定义，即x必须满足

$$2k\pi \leqslant 2x \leqslant (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

即
$$k\pi \leqslant x \leqslant k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

故函数的存在域为

$$k\pi \leqslant x \leqslant k\pi+\frac{\pi}{2} \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

22. 设$f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$，求

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \text{ 和}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

解 因为
$$\begin{aligned} f(-x)&=2(-x)^4-3(-x)^3-5(-x)^2\\ &\quad+6(-x)-10\\ &=2x^4+3x^3-5x^2-6x-10, \end{aligned}$$

所以，
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=2x^4-5x^2-10,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-3x^3+6x.$$

23. 定义在对称区间$-l<x<l$上的函数$f(x)$，如果满足$f(-x)=f(x)$，则称为偶函数，如果满足$f(-x)=$

$-f(x)$，则称为奇函数。

指明下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数：

1） $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$；

2） $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$；

3） $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$；

4） $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$；

5） $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$。

解 1） 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^x)=f(x)$，所 以，

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\text{是偶函数。}$$

2） 因为 $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$

$$=-(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=-f(x),$$

所以，$f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$为奇函数。

3） 因为 $f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}$

$$=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x),$$

所以，$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 为偶函数。

4） 因为 $f(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，

所以，$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$为奇函数。

5） 因为 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\lg\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以，$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数。

24. 证明：定义在区间$-L<x<L$中的任意函数$f(x)$可表示为奇函数和偶函数的和的形式。

证 因为 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

$$+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

而$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$为偶函数，$\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$为奇函数，于是，$f(x)$可以表示为奇函数和偶函数的和的形式。

25. 证明：两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数，而偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证 设 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 都是偶函数，$H_1(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$。则 $H_1(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)\cdot g_1(x)=H_1(x)$，即$H_1(x)$是偶函数。故两个偶函数的乘积是偶函数。

设 $f_2(x)$，$g_2(x)$都是奇函数，$H_2(x)=f_2(x)\cdot g_2(x)$。则 $H_2(-x)=f_2(-x)\cdot g_2(-x)=[-f_2(x)]\cdot[-g_2(x)]=f_2(x)\cdot g_2(x)=H_2(x)$，即$H_2(x)$是偶函数。故两个奇函数的乘积是偶函数。

设 $f_3(x)$ 是偶函数，$g_3(x)$ 是奇函数，$H_3(x)=f_3(x)\cdot g_3(x)$。则$H_3(-x)=f_3(-x)\cdot g_3(-x)=f_3(x)\cdot[-g_3(x)]$

$=-H_3(x)$，即$H_3(x)$是奇函数。故偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

26．如果存在这样一个正数 T（函数的周期），使得对于属于函数$f(x)$的定义域的任意 x，都有 $f(x+T)\equiv f(x)$，则称$f(x)$是周期函数。

确定下列函数中哪些是周期函数，且对周期函数求出它的最小周期 T：

1）$f(x)=10\sin 3x$；

2）$f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$；

3）$f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$；　　4）$f(x)=\sin^2 x$；

5）$f(x)=\sin\sqrt{x}$。

解　1）因为 $f(x)=10\sin 3x=10\sin(3x+2\pi)$

$$=10\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right),$$

所以，$f(x)$是周期函数，且$T=\frac{2}{3}\pi$。

2）因为　$f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$

$$=a\sin(\lambda x+2\pi)+b\cos(\lambda x+2\pi)$$

$$=a\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$+b\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$=f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right),$$

所以，$f(x)$是周期函数，且$T=\frac{2\pi}{\lambda}$（$\lambda>0$）。

3） 因为 $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}=\sqrt{\operatorname{tg}(x+\pi)}=f(x+\pi)$，所以，$f(x)$是周期函数，且 $T=\pi$。

4） 因为 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x+2\pi)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(x+\pi)=f(x+\pi),$$

所以，$f(x)=\sin^2 x$ 是周期函数，且 $T=\pi$.

5） 我们证明，不存在正实数$T>0$，使对所有的$x\geqslant 0$成立

$$\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}.$$

事实上，若有$T>0$，使上式成立。令$x=0$，得$\sin\sqrt{T}=0$，从而$\sqrt{T}=n\pi$，n为某正整数；又令$x=\pi^2$，则$\sin\sqrt{\pi^2+T}=0$，故$\sqrt{\pi^2+T}=m\pi$，m是某正整数，即$\sqrt{\pi^2+n^2\pi^2}=m\pi$，从而$m^2-n^2=1$，$m>n$，即$(m+n)(m-n)=1$。由于$m$，$n$都是正整数，且$m>n$，故$m+n\geqslant 3$，$m-n\geqslant 1$，从而$(m+n)(m-n)\geqslant 3$，出现了矛盾。由此可知，$f(x)=\sin\sqrt{x}$不是周期函数。

27．如图1·1所示，在AB上任取一点M，过M做AB的垂线MN交折线段ADC于N。试将线段$y=MN$的长度和图形$ABCD$位于MN右方部分的面积S表为$x=AM$的函数。