

31488203

高等学校教材

航天器飞行力学

曾颖超 主编

西北工业大学出版社

31488203

V412
13

高等学校教材

航天器飞行力学

曾颖超 主编

李忠应 陆毓峰 曾颖超 编

HK52/23



西北工业大学出版社

1993年12月 西安



C0071906

(陕)新登字 009 号

【内容简介】本书根据现代空间科学的成就与发展,介绍了航天器轨道动力学和姿态动力学的基本内容。书中着重于基本原理的阐述。主要内容有:空间技术和空间环境;轨道摄动、姿态摄动与控制;载人飞行和飞出太阳系的飞行原理。

本书为原航空航天工业部所属高等院校统一编写的专业教材,也可作为从事航天事业的科技工作者的参考书。

高等学校教材
航天器飞行力学

主编 曾颖超
责任编辑 王 璐
责任校对 享 邑

©1993 西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路 127 号 邮编 710072)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0485-X/V · 16(课)

开本 787×1092 毫米 1/16 13.875 印张 335 千字
1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1-2 000 册 定价:5.60 元

前 言

空间科学是一门综合性学科,航天器飞行力学是它最主要的理论基础。从事航天事业的科技工作者都应该具有航天飞行的知识。为满足航空航天高等院校教学和广大科技人员学习及参考的迫切需要,我们编写了《航天器飞行力学》一书,主要作为教材或供工程技术人员参阅。

根据现代空间科学的成就及发展,书中着重于基本原理的阐述,介绍了航天器轨道动力学和姿态动力学的基本内容。全书共分八章,在少学时的情况下以前四章为主。本书后四章内容也是本学科的基本原理,可视教学时数酌情选用。本书第一、四章和第六章由西北工业大学曾颖超编写;第二、三章由北京航空航天大学李忠应编写;第五、八章由西北工业大学陆毓峰编写;李忠应与陆毓峰合写了第七章;由曾颖超任主编,统阅全书。

在本书的编写过程中,参考了国防科学技术大学等兄弟单位的教材和资料,得到了许多同志的热心支持和帮助;王明海教授在百忙中详细审阅了全稿,指正了编写中不足之处,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中之缺点和错误,敬请读者不吝指出。

编 者

1992年4月

目 录

第一章 空间技术和空间环境.....	1
§ 1.1 空间技术	1
§ 1.2 地球和近地空间	2
§ 1.3 高层大气结构	2
§ 1.4 电磁辐射和离子辐射	6
§ 1.5 地球的磁场和磁层	6
§ 1.6 流星	7
第二章 航天器动力学基础.....	8
§ 2.1 天体力学基本知识及其应用	8
§ 2.2 航天器质心动力学方程和姿态动力学方程.....	18
§ 2.3 轨道方程.....	20
§ 2.4 e 和 h 与轨道几何参数的关系	22
§ 2.5 圆锥曲线轨道特性的讨论.....	24
§ 2.6 航天器成为人造卫星的条件.....	29
§ 2.7 正则单位.....	31
第三章 航天器轨道力学	34
§ 3.1 坐标系.....	34
§ 3.2 基本轨道要素.....	36
§ 3.3 轨道要素同位置和速度矢量的关系.....	38
§ 3.4 位置与时间的关系.....	43
§ 3.5 航天器的发射与入轨问题.....	47
§ 3.6 航天器轨道的调整与转移.....	53
§ 3.7 航天器在邻近轨道上的相对运动.....	68
§ 3.8 航天器的交会和对接.....	71
§ 3.9 地球卫星的发射与同步卫星轨道的建立.....	76
第四章 航天器的姿态运动	82
§ 4.1 航天器的姿态动力学问题.....	82
§ 4.2 姿态的无力矩运动.....	86
§ 4.3 卫星的双自旋稳定.....	96

第五章 轨道摄动	102
§ 5.1 基本知识	102
§ 5.2 卫星的摄动运动方程	109
§ 5.3 地球扁率的影响	121
§ 5.4 空气动力摄动和近地轨道上卫星的寿命	125
§ 5.5 月球和太阳引力的影响	131
第六章 姿态摄动与控制	133
§ 6.1 航天器主动姿态控制概述	133
§ 6.2 航天器的环境力矩	135
§ 6.3 航天器姿态的喷嘴控制	143
§ 6.4 飞轮控制	147
§ 6.5 三轴反作用飞轮的姿态分析	152
§ 6.6 偏置角动量飞轮的姿态分析	159
§ 6.7 反作用杆控制的姿态分析	161
第七章 载人飞行	168
§ 7.1 载人飞行器的特点	168
§ 7.2 失重和超重	169
§ 7.3 宇航员的安全与轨道选择	172
§ 7.4 返回再入问题	177
§ 7.5 登月飞行	180
§ 7.6 月球探测器返回轨道	192
§ 7.7 行星际飞行	195
第八章 恒星际飞行	208
§ 8.1 宇宙空间	208
§ 8.2 恒星际航行速度	208
§ 8.3 飞出太阳系的几种方法	212
参考文献	215

第一章 空间技术和空间环境

§ 1.1 空间技术

早在 1 000 多年以前,我国就发明了火药燃烧喷气推进的原始火箭。20 世纪,火箭技术的迅速发展为人类向空间进军创造了条件。“空间”一词在空间技术中具有它特定的含义,系指地球大气层外的空间,又称外层空间或星际空间,简称空间。由于大气密度是随高度逐渐变化的,因此在大气层和外层空间之间没有一个明显的分界线。一般将 150 km 高度以上的空间作为外层空间。

空间技术是一门研究人类如何进入外层空间并利用和开发外层空间的工程技术,或者说是研究将航天器送入外层空间,并进行空间活动的一门工程技术。它的主要内容包括如下三个方面:

(1) 航天器技术。航天器又可称为空间飞行器,亦即是人造地球卫星、载人飞船、星际探测器、空间站和空间运输系统的总称。此项技术是指研究、制造和发展各类航天器的技术。航天器是由本体、通用系统和专用系统组成,它们的共同作用是完成航天器空间飞行的使命。

航天器的通用系统包括轨道控制系统、姿态控制系统、推力装置系统、能源系统、通信系统、遥测系统、遥控系统、跟踪系统、天线系统和温度控制系统。返回的空间飞行器还配备有回收系统,而载人飞船又设置了回收和生命保障系统。不同类型的航天器,由于飞行轨道的设计与控制方式不同,以及姿态稳定与操纵的要求不等,其轨道和姿态控制系统有着较大的区别。

航天器的专用系统视空间飞行任务而确定。通信和广播卫星应设置转发器和专用天线等系统;科学实验卫星应安装实验和观测系统;对地观察卫星的专用系统是遥感装置和数据传输系统。

(2) 运载器技术。航天器除航天飞机外,均不具备离开地球进入空间的能力,而是依赖运载器将它送到外层空间,并获得相应的飞行速度。运载器技术就是研究、制造和发展将航天器送入外层空间,使其能够进入初始预定轨道的技术。运载器基本上大型多级火箭,近 10 年来又使用了航天飞机。

运载器是空间技术的基础,并在很大程度上决定了空间技术发展的规模和程度。运载器的研制需要有发达的工业基础和先进的科学水平,一般估计,要有远程弹道式导弹工业的基础,才能制造多级火箭;研制航天飞机,则要有很强的航空和航天工程和科技力量。

(3) 地面测控技术。它是研究和实现对轨道上运行的航天器进行监视、测量、控制和管理的技术。当航天器在外层空间飞行时,地面则需要及时了解和掌握航天器各功能系统的工作状况,地面测控技术要保证航天器和地面维持经常的联系。地面测控站测量和预报航天器的轨道,对其进行遥控,使航天器按照规定的程序完成轨道保持和轨道变更,以及相应的姿态操纵。地面还要通过测控技术了解航天器内的环境条件,以及宇航员的生理状况等。

地面测控站所需的设备,除一些光学仪器外,基本上都是无线电测量和控制仪器、电子计

算机,以及数字传输和通信等设施。

§ 1.2 地球和近地空间

空间技术的发展已经实现了人类在太阳系的旅行。太阳系是银河系的一员,地球是太阳系九大行星之一。它距太阳平均为 $1.4960 \times 10^8 \text{ km}$, 体积 $1.0832 \times 10^6 \text{ km}^3$, 赤道半径为 6378.164 km , 极半径为 6356.779 km 。其形状像一个扁率为 $1/298.25$ 的扁球体, 实际上是一个不规则体。地球在绕太阳公转的同时不停地自转着, 自转角速度为 $7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

地球的总质量为 $5.976 \times 10^{27} \text{ g}$, 平均密度 5.518 g/cm^3 。它的总面积是 $5.10 \times 10^{18} \text{ cm}^2$ 。地球表面崎岖不平, 陆地上有高山, 海洋里有深沟, 陆地平均高度 860 m , 海洋平均深度 3900 m 。地球内部构造很复杂, 从地表直到 33000 m 深处叫地壳, 最薄的部分在海洋, 只有 5000 m , 最厚的部分在西藏高原, 有 65000 m 。地壳往下直到 $2.9 \times 10^5 \text{ m}$ 处叫地幔。由此一直向下到地心叫地核。随着深度的增加, 温度、压力、密度都呈升高的趋势, 到地心时温度达 6400 K , 压力高达 $3.7 \times 10^{11} \text{ Pa}$, 密度升高到 13 g/cm^3 。

从地球表面上, 直到几十个地球半径范围, 叫做近地空间。绝大多数航天器都在近地空间飞行与活动, 所以近地空间环境与空间技术密切相关。近地空间不但直接关系到航天器的轨道与机动飞行, 而且直接关系到空间技术的发展, 甚至人类的生存, 因此, 掌握近地空间环境是一件十分重要的事情。航天器在此环境内飞行要受到地球引力的作用。按照著名的牛顿万有引力定律, 航天器受到地球的引力 F 等于

$$F = -G \frac{mm_e}{R^2}$$

式中 m_e 是地球的质量; m 是航天器的质量; R 是航天器与地心的距离; G 是万有引力常数, $6.672 \times 10^{-13} \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$, 而地球引力常数 μ 等于

$$\mu = Gm_e$$

在近地空间中, 航天器主要是受地球引力的作用, 其次是受月球、太阳和太阳系其它天体的引力作用。采用实际引力场, 应视地球为非均匀性球体, 分析其它星体产生的实际引力, 乃是一个相当复杂的问题。为精确了解近地空间的引力场, 必须反复实际测算, 才能获得标准的引力场模式。

近地空间环境的其它组成, 将在以下几节予以简要介绍。

§ 1.3 高层大气结构

这里主要介绍高层大气的温度、密度、压力和地球大气的分层。

一、大气密度

大气密度在海平面上的标准值 $\rho_0 = 1.225 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ 。海平面最大密度出现在日出后不久, 200 km 以上大气密度的最大值则出现在地方时 14 点钟, 最小值出现在地方时 4 点钟。航天器的轨道与姿态运动、轨道与姿态摄动、飞行寿命、返回的气动力与气动加热等与大气密度

紧密相关。

大气密度随高度的变化如表 1-1 所示。飞行高度到 165 km, 大气密度仅为海平面的十亿分之一($1/10^9$)。所以, 航天器轨道的近地点一般选择在 160 km 高度以上, 以便减小大气对航天器飞行的影响, 增长它的运行寿命。

表 1-1 大气密度随高度的变化

高度(km)	大气密度(g/cm ³)	高度(km)	大气密度(g/cm ³)
0	1	165	10^{-9}
18	10^{-1}	245	10^{-10}
33	10^{-2}	370	10^{-11}
49	10^{-3}	540	10^{-12}
67	10^{-4}	730	10^{-13}
82	10^{-5}	980	10^{-14}
96	10^{-6}	1 600	10^{-15}
110	10^{-7}	2 750	10^{-16}
125	10^{-8}	5 000	$10^{-18.7}$

二、大气温度

大气温度代表单个分子的平均平动动能, 热量则是所有分子的总动能。海平面大气温度的标准值是 $15^{\circ}\text{C} = 288.15\text{K}$, 其它高度的数据见表 1-2。航天器所处的环境有超高温大气 ($1\,000 \sim 200\,000\text{K}$) 和超低温的背景 (3K)。虽然大气温度极高, 由于空气极为稀薄, 航天器所受的总热量却极少。可见大气温度对航天器本体温度影响甚微, 本体温度主要取决于辐射换热的状态。

表 1-2 大气温度随高度的变化

高度(km)	温度(K)	高度(km)	温度(K)
0	288.15	250	1 400
11	216.65	300	1 500
20	216.65	400	1 500
32	228.65	500	1 600
47	270.65	700	1 600
52	270.65	1 000	1 600
61	252.65	2 000	1 800
69	220.65	3 000	2 000
90	190.65	10 000	15 000
110	254.25	20 000	50 000
118	382.24	30 000	100 000
150	780	50 000	200 000
200	1 200		

三、大气压力

海平面上大气压力的标准值 $p_0 = 1$ 标准大气压 $= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ($\approx 10^5 \text{ Pa}$), 当高度增加时大气压力减小。或者说, 随着高度的增加, 真空度逐渐增加。

大气压力随高度变化的规律如表 1-3 所示。

表 1-3 大气压力随高度的变化

高度(km)	大气压力($\times 10^5 \text{ Pa}$)	高度(km)	大气压力($\times 10^5 \text{ Pa}$)
0	1	135	10^{-8}
16	10^{-1}	220	10^{-9}
31	10^{-2}	350	10^{-10}
48	10^{-3}	520	10^{-11}
65	10^{-4}	730	10^{-12}
80	10^{-5}	1 100	10^{-13}
92	10^{-6}	2 100	10^{-14}
108	10^{-7}	50 000	$10^{-15.8}$

航天器在 160 km 以上高度范围飞行, 属超高真空区域, 其大气压力为 $10^{-1} \sim 10^{-9} \text{ Pa}$ 。超高真空是航天器的基本飞行环境, 它对飞行器有如下一些特殊的作用与影响:

- (1) 真空区没有对流和热传导换热的介质, 航天器与其周围环境的热交换只有辐射方式;
- (2) 真空区空气分子稀薄, 航天器的气动阻力很小;
- (3) 在真空中两个金属表面相接触, 在室温下将产生焊接现象, 称为真空冷焊, 因此设计航天器时, 必须采用防范措施, 避免两个表面相对运动的摩擦系数无限增大;
- (4) 在真空状态, 航天器表面蒸发出的成分不再凝结回表面, 要求使用蒸发稳定性好的材料;
- (5) 真空环境不能采用液体润滑剂, 只能采用低蒸发率的浓性润滑剂。

四、地球大气的分层

地球大气具有明显的分层结构, 根据大气的不同特性, 可以有多种不同的分法。按温度垂直分布特性, 地球大气分为五层: 对流层、平流层、中层、热层和逃逸层(外层); 按电离情况可分为非电离层和电离层; 按成分可分为均匀层和非均匀层; 按其它性质又可分出臭氧层、磁层和等离子层等。每一层都有其自身的特性, 见表 1-4 的简要介绍。

表 1-4 地球大气分层

层	高度(km)	特 征
对 流 层	0—12 ^(极区 8) (赤道 18)	发生强烈对流,有各种气象现象,温度随高度递减
平 流 层	12—50	垂直对流不强烈,多为平流运动,水分少,无气象现象,尘埃少,透明度,臭氧吸收紫外线引起温度随高度递增
中 间 层	50—85	温度随高度递减,77 km 以上有气辉出现
热 层	85—500	温度随高度递增
热 层 顶	500	恒温区开始
外 层 (逃逸层)	>500	1 000 km 以上随高度递增,不考虑分子碰撞,大气分子大多数电离
均 匀 层	<90	大气平均分子量不变
非 均 匀 层	>90	大气开始光化分解和重力分离,比重轻的气体开始在比重重的气体之上
非 电 离 层	<50	大气处于中性原子状态
电 离 层	>50	大气分子部分被电离,有几个电子浓度大的层区:D,E,F ₁ ,F ₂ 层
臭 氧 层	10—70	能吸收波长 2 200—2 900×10 ⁻⁷ m 的紫外线
辐 射 带	内辐射带 600—10 000	主要成分高能带电粒子
	外辐射带 10 000—60 000	主要成分电子
磁 层	磁层顶 6—7 R _* 磁尾长 2000R _* 半 径 20R _*	对带电粒子能起主动控制作用
等离子体层	电离层上方至 4R _*	大气分子全部电离

* R_{*}=6 371 km——地球平均半径。

列表中的电离层是由太阳的紫外线、X 射线、微粒辐射和流星电离等的作用,使高层大气在 50 km 高度以上,几千公里高度以下形成电离状态。在此高度范围内它的分布浓度是不均匀的,且随着经度、纬度、昼夜、季节和太阳黑子的周期而变化,有时也发生一些突然变化。研究电离层结构及其变化规律,有利于正常进行无线电通讯。

高层大气虽然是稀薄的,但是气体粒子流碰撞航天器的表面则可产生气动力效应,只是它比地球引力小。

§ 1.4 电磁辐射和离子辐射

在星际空间太阳是一个巨大的辐射源,每秒钟可向四周辐射出 3.816×10^{26} J 的能量。其中包括 γ 射线、X 射线、紫外线、红外线、可见光、微波和无线电波等各种波长的电磁波。太阳的电磁辐射作用于任何物体表面都会产生压力,通称为光压。在一天文单位处(等于 14.96×10^7 km),光压为 $4.51 \times 10^{-6} - 9.02 \times 10^{-6}$ Pa,具体数值和接收物体表面性质有关。光压是宇宙空间的基本现象之一。

近地空间除电磁辐射外,还有来源于辐射带、太阳宇宙线和银河宇宙线的粒子辐射。

(1) 辐射带。在地球周围,存在着地磁场捕获的大量的带电粒子,它们所占的区域称为辐射带。根据卫星探测,在赤道平面 600—10 000 km 的高度,纬度边界为 40° 左右的一个区域,叫做内辐射带。主要是质子和电子,其中心位置在 3000 km 高空左右;在赤道平面 1 000—60 000 km 高度、纬度边界为 $55^\circ - 70^\circ$ 这个区域叫外辐射带,主要成分是电子,中心位置在 22 000 km 高度左右。

(2) 太阳宇宙线。当太阳耀斑发生时,还同时大量发射高能带电粒子,称为太阳宇宙线。其主要成分是质子,其次是 α 粒子。它们的分布与辐射带粒子相反,主要集中在高纬地带。每年 3,4 月份和 8,9 月份出现较多,1 月和 12 月出现较少。关于太阳宇宙线的准确预报问题,在不久的将来是可以解决的。

(3) 银河宇宙线。这是从银河系各个方向来的高能带电粒子,其成分主要是质子,其次是 α 粒子,其余是各种元素的原子核。

在空间环境,太阳电磁辐射,将在航天器上形成太阳辐射压力,而粒子辐射则威胁着空间飞行。粒子辐射超过某一允许值,会使宇航员感到不舒适、患病甚至死亡;太阳能电池输出减少,半导体器件增益降低,甚至完全毁坏;电磁材料、热力学材料和结构材料等要改变性质等。因此,选择航天器的轨道、飞行时间、耐辐射材料和电子元器件,必须研究和掌握粒子辐射的规律,并采取有效的屏蔽措施。

§ 1.5 地球的磁场和磁层

地球和近地空间存在的磁场称为地磁场,它主要来源于地球内部。经实测南北极磁场强度高于赤道水平处,并存在下列明显的变化:

(1) 磁极位置有着缓慢的移动,纬度移动每 10 年大约 0.04° ,经度移动每 10 年大约 0.07° ;

(2) 地球作为磁体,它的轴与地球的自转轴之间有磁倾角,而且是变化的;

(3) 地磁场总强度在不断下降;

(4) 经常发生几小时或几天的全球性磁暴现象,使磁场强度产生大幅度的变化。

太阳因日冕的高温膨胀,将连续不断地喷射出低能高速粒子流,称作太阳风。地球磁场在它的作用下会被局限在一定范围内,而形成磁层。其结构见图 1-1。以地球平均半径 $R_e = 6\,378$ km 为单位,磁层顶向阳面到地心的距离为 $10R_e$ 。磁层内部结构十分复杂,至今尚未探测清楚,图示结构只是宁静磁层在正午—子夜子午面内的一种基本形状与结构。研究磁层结构及

其变化规律,是保障同步卫星正常执行任务所需要的一件工作。

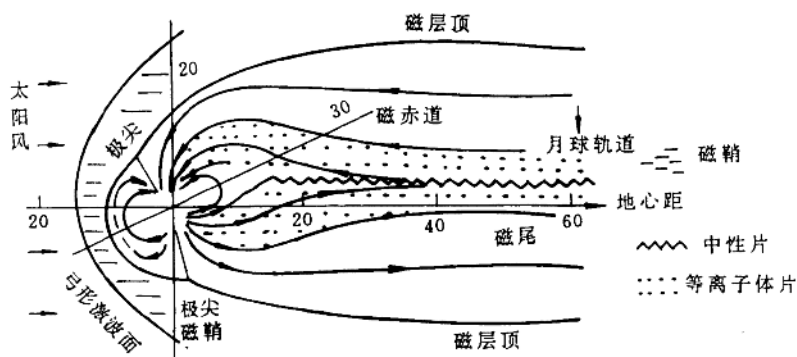


图 1-1 磁层结构示意图

§ 1.6 流星

流星也是太阳系成员之一,具有各种不规则的外形,一般重量只有几百毫克或几毫克,超过几十吨的流星极少。它们按各自的轨道绕太阳运行,当与地球公转相遇时,将以11—73 km/s 的速度冲入地球大气层后生热与发光。每天坠入地球大气层内的流星数量很多,仅重量在 1g 以上的就有 20 000 多颗。

流星物质进入近地空间对人造卫星等有危害作用。质量低于 10^{-7} g,直径小于 100 μm 的小流星可使卫星的光学表面、太阳电池、辐射表面和映像装置等受到损失。再大一点的流星就会造成航天器外壳的裂痕,或更严重的危害。此外,流星对通信、气象和大气结构等的影响,也是一个有价值的研究问题。

第二章 航天器动力学基础

航天器研究人造天体在近地空间、近月空间及太阳系内的飞行。航天器动力学是天体力学的一部分。天体力学是研究任何天体的科学,既研究自然的天体(恒星、行星、行星的卫星、彗星、流星、宇宙尘埃等),也研究人造天体(自动空间飞行器及载人空间飞行器)。航天器动力学与天体力学是不可分的,它包含在天体力学中,使用天体力学的方法,但超出了天体力学的传统范围。

经典的天体力学不研究,也根本用不着研究天体的轨道选择问题,更无需研究姿态的控制与稳定问题。而航天器动力学的核心内容就是轨道的设计,即从可以到达某个天体(月球、火星、金星等)的大量的(其实是无限的)可能轨道中选择一条,这条轨道能使航天器以最小的动力消耗,或最短的飞行时间,用最简单的飞行控制方法,在便于观察的情况下到达需要去的天体;此外航天器动力学为了轨道控制、探测及着陆等的要求,需要对航天器的姿态进行控制与稳定,这就是航天器动力学与经典天体力学的本质区别。

由于航天器动力学是建立在天体力学的基础上并使用着天体力学的方法,因此本章首先将介绍天体力学基本知识,然后建立有心力场中动力学方程并讨论与轨道特性有关的问题。

§ 2.1 天体力学基本知识及其应用

一、开普勒三大定律

亚里斯多德认为圆周运动是唯一合乎自然的完美的运动,因此,天体必定作圆周运动。自他以后,天文学家总是假定行星作圆周运动。然而开普勒根据第谷的精确观测结果进行检验,发现这种理论与观察得到的事实并不一致。于是他尝试用各种几何曲线来拟合对火星位置的观测数据,以科学家特有的严肃认真的精神对待理论计算与观测结果的微小差异。最后他找到了火星运动的轨道是一个椭圆,结果是很理想的。自此以后经过大量的理论计算与归纳总结,于17世纪初叶他相继发表了行星运动的三大定律:

第一定律 各行星的轨道都为椭圆形,太阳位于它的一个焦点上;

第二定律 行星与太阳的连线在相等的时间内扫过的面积相等;

第三定律 行星运动周期的平方和行星与太阳的平均距离的三次方成正比。

这是在前人大量观测数据基础上总结出来的定律,直至目前仍被广大天文工作者及研究空间飞行的人们所应用。

二、牛顿万有引力定律

在1687年出版的《自然哲学的数学原理》一书中,牛顿除了发表他的运动三大定律以外,他还给出了万有引力定律:任何两个质点都互相吸引,吸引力的大小与两质点的质量的乘积成正比,与两质点间的距离平方成反比。这一定律用数学式可表示为

$$F = -\frac{GMm}{R^2} \frac{R}{R} \quad (2-1)$$

式中 M 与 m 为两质点的质量; G 为万有引力常数, 其值为 $6.670 \times 10^{-13} \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$; R 为两质点间的向径; F 为吸引力。图 2-1 所示为质点 M 对 m 的引力, $oxyz$ 为惯性坐标系。根据牛顿运动定律, 物体间的作用总是相互的。质点 m 对 M 同样存在一个大小相等方向相反的作用力。

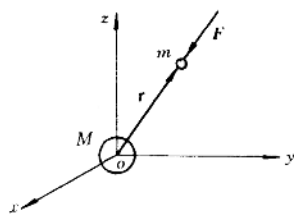


图 2-1 牛顿引力定律

天体虽然是庞大的, 但与天体之间的距离比较起来是很小的, 故仍可作为质点来处理, 因而关于两质点之间的引力定律, 完全适用于两天体之间。当然对于球状的、质量均匀分布的天体, 即使两天体之间距离不大, 两质点之间的引力定律仍是适用的。

但是必须指出, 当天体为质量分布不均匀的非球体时, 其对另一物体的引力则不指向中心, 此时若仍以质点的引力定律来处理, 则必然造成误差。

三、N 体问题

1. N 体运动方程

如何确定 N 个物体在它们之间的相互引力作用下的运动是天体力学的一个经典问题。自牛顿以来这个力学问题一直引起天文学家和数学家们的注意, 但是对一般的 N 体问题还没有解析解, 看来求得解析解的可能性极小。

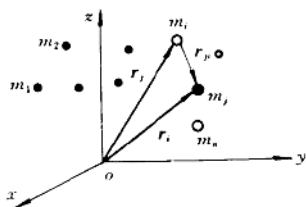


图 2-2 N 体问题

在经典的天体力学中, N 体问题的典型例子有行星绕太阳的运动; 恒星团中恒星的运动; 航天器动力学研究也涉及多体问题, 因为它的运动也是由多个引力场支配的。

设有一个由 n 个物体其质量分别为 $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ 构成的系统, 为描绘物体的运动选一惯性坐标系 $oxyz$, 在该坐标系内, n 个物体的位置分别为 $r_1, r_2, \dots, r_n$, 此系统如图 2-2 所示。

由牛顿万有引力定律, 第 j 个物体 m_j 作用在第 i 个物体 m_i 上的力为

$$F_j = -\frac{f m_i m_j}{r_{ji}^3} r_{ji} \quad (2-2)$$

式中

$$r_{ji} = r_i - r_j$$

作用在第 i 个物体上的所有力的矢量和 F 为

$$F = -\frac{f m_i m_1}{r_{1i}^3} r_{1i} - \frac{f m_i m_2}{r_{2i}^3} r_{2i} - \dots - \frac{f m_i m_n}{r_{ni}^3} r_{ni}$$

上式中没有 $j = i$ 项, 故可将上式简写为

$$F = -f m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} r_{ji} \quad (2-3)$$

根据牛顿动力学第二定律有

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F} = -f m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \quad (2-4)$$

2. N 体问题的相对运动

现设 n 个物体中,第 i 个物体是航天器,它可以在大气层中飞行,因而存在阻力;还可以排出质量产生推力;太阳辐射还会产生压力等等,在其一般运动方程中这些力都应该考虑。此外在近地空间飞行时,由于地球的非球形而产生附加作用力。地球在两极较为扁平,在赤道较为凸出;月球在两极附近和赤道附近均为椭球状。前已指出:牛顿万有引力定律仅适用于质量均匀分布的球状物体。因此引力计算中的误差主要是由于物体的形状造成的,对于近地卫星而言,这个误差的数量级为 10^{-3} g 。这个误差虽然很小,但它会导致一些用开普勒和牛顿理论无法预测的影响。

对于可变质量的物体应用牛顿第二定律有

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{V}_i) = \vec{F}_i$$

由于质量可变(排出质量),故有

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} + \vec{V}_i \frac{dm_i}{dt} = \vec{F}$$

上式通过向径矢量表示为

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\vec{F}_i}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \quad (2-5)$$

$\vec{F}_i$ 为 n 个物体相互作用的引力及其它外力的矢量和,即

$$\vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_{\text{其它}} \quad (\vec{F} \text{ 由式(2-4) 给出})$$

$$\vec{F}_{\text{其它}} = \vec{F}_{\text{阻力}} + \vec{F}_{\text{太阳压力}} + \vec{F}_{\text{干扰}}$$

$\dot{\vec{r}}$ 为第 i 个物体相对于坐标系 $oxyz$ 的速度矢量。

$\dot{m}_i$ 为第 i 个物体质量随时间的变化率(由于排出质量及与相对论有关的效应引起的)。

式(2-5)是二阶非线性微分方程,一般很难求出其解析解。当 $\dot{m}_i = 0, \vec{F}_{\text{其它}} = 0$ 时,式(2-5)即为式(2-4),即

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \quad (2-4)$$

设 m_2 为航天器(或地球卫星), m_1 为地球,而 $m_3, m_4, \dots, m_n$ 为月球、太阳及其它行星,于是对 $i = 1$ 写出运动方程式(2-4)为

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -f \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} \vec{r}_{j1} \quad (2-6)$$

对于 $i = 2$ 的情况,运动方程式(2-4)为

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} \vec{r}_{j2} \quad (2-7)$$

由式(2-3)有

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2-8)$$

于是有

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

将式(2-7)和式(2-6)代入上式得

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} (\mathbf{r}_{j2}) + f \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} (\mathbf{r}_{j1}) \quad (2-9)$$

将其展开成

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = - \left[\frac{f m_1}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_{12}) + f \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j2}^3} (\mathbf{r}_{j2}) \right] - \left[\frac{-f m_2}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_{21}) - f \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{j1}^3} (\mathbf{r}_{j1}) \right] \quad (2-10)$$

其中

$$\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$$

故式(2-10)可改写为

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = - \frac{f(m_1 + m_2)}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_{12}) - \sum_{j=3}^n f m_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\mathbf{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (2-11)$$

这就是 N 体问题的相对运动方程。

3. 干扰二体问题

式(2-11)中 $\ddot{\mathbf{r}}$ 是航天器相对于地球(也可以是行星相对于太阳)运动的加速度矢量,右边第一项是航天器(行星)与地球(太阳)之间的引力加速度,第二项是太阳及其它行星对近地空间飞行器的引力加速度。这个加速度可视为它们对近地飞行器的摄动影响。

式(2-11)可视为干扰二体问题。航天器绕地球运动与行星绕太阳运动一样,其它各星体的摄动力与式中二物体的直接引力相比是很小的。若研究行星绕太阳的运动,因摄动物体(一个行星)的质量与太阳质量的比值是小量,因此式(2-11)右边第二项的影响很小。航天器在近地空间飞行时,它与地球之间的距离和它与月球、太阳、行星之间的距离相比是很小的。也就是 $r_{12} \ll r_{j1}, r_{j2}$ 。因此,在上述两种情况下,对于一次近似,可以忽略后一项的影响。

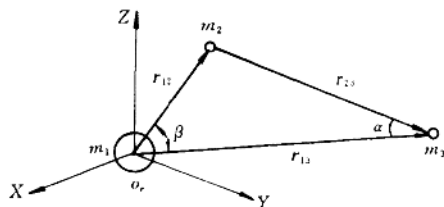


图 2-3 地球、卫星、摄动物体的相对位置

式(2-11)有一个很有价值的应用,即它能确定人造地球卫星轨道由于第三物体(太阳或月球)引力引起的摄动。为此选择一个以地球中心为原点的不旋转坐标系 O_rXYZ ,具有质量为 m_2 的卫星,在此参考系内,位置由矢量 $\mathbf{r}_{12}$ 表示,具有质量为 m_3 的摄动物体,其位置由矢量 $\mathbf{r}_{13}$ 表示;地球的质量为 m_1 。它们的几何关系见图 2-3。这里把地球与卫星之间的加速度称为卫星的主加速度 a_m 。即

$$a_m = \frac{f(m_1 + m_2)}{r_{12}^2} \quad (2-12)$$

卫星的摄动加速度 a_B 是由摄动物体的引力产生的。根据式(2-11),它的大小为

$$a_B = f m_3 \sqrt{\left(\frac{r_{32}}{r_{32}^3} - \frac{r_{31}}{r_{31}^3} \right) \left(\frac{r_{32}}{r_{32}^3} - \frac{r_{31}}{r_{31}^3} \right)}$$

或

$$a_B = f m_3 \sqrt{\frac{1}{r_{32}^4} + \frac{1}{r_{31}^4} - \frac{2 \cos \alpha}{r_{32}^2 r_{31}^2}} \quad (2-13)$$

其中 $r_{13} = r_{31}, r_{31} = -r_{13}$ 。

由图 2-3 可得