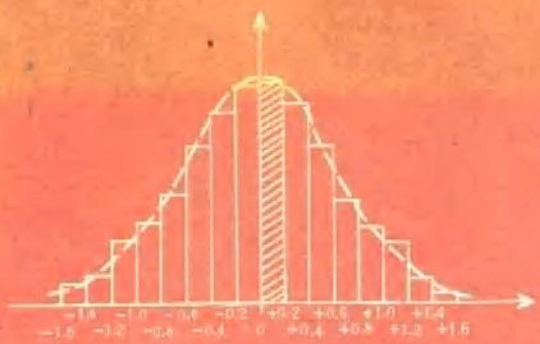

测量平差基础

武汉测绘学院大地测量系
《测量平差基础》编写组编写

测绘出版社

测 量 平 差 基 础

武汉测绘学院大地测量系
《测量平差基础》编写组编写

测 绘 出 版 社

本书详尽介绍了直接平差、间接平差和条件平差的基本理论和解算过程以及精度评定问题。此外还专设两章介绍矩阵平差和适用于电算的逐渐趋近法解线性方程组和点松弛法解误差方程、条件方程的基本理论。可供国民经济各部门测绘人员，从事测量平差计算工作者，各测绘专业有关师生学习参考。

测量平差基础

武汉测绘学院大地测量系

《测量平差基础》编写组编写

*

测绘出版社出版

中国人民解放军第一二〇一工厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32·印张 11 1/16·字数 30 万字

1978 年 6 月第一版·1978 年 6 月第一次印刷

印数 1—50,000 册·定价 1.10 元

统一书号：15039·新61

前　　言

无产阶级文化大革命以来，在毛主席革命路线的指引下，我国测绘事业有了很大的发展。特别是近年来，专业测绘队伍和群众办测绘相结合，近代科学成就在测绘技术中得到广泛应用，测绘系统的生产、科研、教学等各方面工作欣欣向荣，大批新生力量正在茁壮成长，整个测绘战线呈现出一派“旧貌变新颜”的大好形势。为了适应当前社会主义革命和社会主义建设大好形势的发展需要，我们在学院党委的领导下，遵照伟大领袖毛主席关于“**教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合**”的教导，编写了《测量平差基础》这本书，供一般测绘工作人员阅读和参考。

为了便于青年测绘工作人员的自学，我们对书中各章节内容的安排和叙述，努力做到由浅入深，由易到难，由具体到一般，理论联系实际。对于精度的概念、误差传播定律等基础部分力求讲透，并结合举例说明了在应用误差传播定律时应注意的一些问题。为了突出各种平差方法的共性，本书强调了平差的两个原则。为了易于掌握公式推导的规律，加强了线性对称方程组的两个特性的叙述。在说明高斯-杜力特简化格式的计算方法时，总结了“两列规则”。考虑到矩阵在各门学科中的应用已很广泛，在第七章中介绍了矩阵运算的基本规则、矩阵微分以及用矩阵运算方法推导了条件平差和间接平差法。此外，为了适应利用电子计算机解算测量平差问题的需要，在第八章中介绍了逐渐趋近法解线性方程组的基本原理以及用点松弛法解误差方程和条件方程的基本理论。

由于我们学习马克思主义、列宁主义、毛泽东思想不够，业务水平有限，教育革命的实践也较少，本书还会有不少缺点和错误，

诚恳希望同志们提出批评和建议，帮助我们不断地修改提高。

武汉测绘学院大地测量系

《测量平差基础》编写组

一九七六年六月

目　录

绪　论

§1 观测误差

我们对事物的认识总是从实践中开始的。当对某个确定的量进行多次观测时，我们就会发现，在这些所测得的结果之间往往存在着一些差异。例如，对同一段距离重复丈量若干次，量得的长度经常不是完全相等，而是互有差异。另一种情况是，当对若干个量进行观测时，如果已经知道在这几个量之间应该满足某一理论值，那么，我们就会发现，对这些量实际观测的结果则往往不等于其理论上的应有值。例如，从数学上知道一平面三角形三内角之和应等于180°，但对这三个内角进行观测的结果，其和经常不等于其应有值180°，而是有一差异。这些差异称为不符值。在各观测值相互之间或各观测值与其理论上应有值之间存在某些差异的现象，这在测量工作中是经常而又普遍发生的现象。为什么会产生这种差异？这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

误差的发生，有多种多样的原因。概括起来有下列三个方面：

(一)观测工作通常是利用特制的仪器进行的。由于每一种仪器只具有一定限度的精密度，因而使观测结果的精确度受到了一定的限制。例如，在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确无误；此外，仪器本身也有一定的误差，例如，水准仪的视准轴不平行于水准轴，水准尺的分划误差等等，因此，使用这样的水准仪进行观测，也会使得观测的结果产生误差。

(二)由于观测者的感觉器官的鉴别能力有着一定的局限性，所以不论在仪器的安置、照准、读数、……等等方面都会产生误

差。此外，观测者的工作态度是否认真负责，工作时是否仔细小心，这对于在工作中是否会出现差错或误差是一个重要的因素。同样，观测者的操作技术水平也将对观测成果的质量起着不同程度的影响。

(三)观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光、……等等因素都会对观测结果直接发生影响；同时，随着温度的升降、湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，其影响程度也在随时变化，因而在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述仪器、人、外界条件等三个方面的因素是引起误差的主要来源。因此，我们把这三方面的因素综合起来称为“观测条件”。不难想象，观测条件的好坏将与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些，比如说，仪器的精度高一些，仪器本身校正得比较完善，工作时观测者的工作态度认真负责，操作技术熟练些，外界条件对观测有利一些，等等，那么，观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些，因而观测成果的质量就要高一些。反之，观测条件差一些，观测成果的质量就要低一些。所以我们可以说，观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受到上述种种因素的影响，总还是难免使观测的结果产生这样或那样的误差。从这一意义上来说，在测量中产生误差是不可避免的。然而，在客观条件允许的限度内，测量工作者可以而且必须确保观测的结果具有较高的质量。这就要求我们具有较高的政治觉悟，工作中自始至终做到政治挂帅，认真负责，严格要求，既能重视客观条件所起的作用，又能积极主动地采取各种有效措施来避免和克服测量中不利因素的影响，只有这样才能使观测的结果达到较高的质量。

根据测量误差对观测结果的影响的不同，误差可分为系统误

差和偶然误差两种：

（一）系统误差　在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化着，或者保持常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈长，所积累的误差也就愈大；又如经纬仪因校正或整置的不完善而使所测的角度产生误差等等，这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。例如，用钢尺量距时，因温度与检定钢尺时的温度不一致而使所测的距离产生误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等等，这些都是由于外界条件所引起的系统误差。此外，象某些观测者在照准目标时，总是习惯于把望远镜十字丝对准于目标中央的某一侧，也会使观测结果带有系统误差。

（二）偶然误差　在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从表面现象看，该列误差的大小和符号没有规律性，那么，这种误差就称为偶然误差。

例如，在量距时或作水准测量时，估读毫米数的误差；在测角时，用望远镜照准目标时的照准误差等等，都是属于偶然误差。

辩证法告诉我们，事物总是一分为二的。系统误差和偶然误差是观测误差的两个方面，它们在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，那么，偶然误差就属于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，即呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响具有累积的作用，因此它对成果质量的影响也就特别显著。在实际工作中，必须采取各种方法使其消除，或者使其减小到实际上对观测成果的影响可以忽略不计的程度。例如，在进行水准测量时，使前后视距离相等，以消除由于视准轴不平行于水准轴对观测高差所引起的系统误差；预先对量距时用的钢尺进行检定，求出尺长误差的大小，对所量的

距离进行尺长改正，以消除由于尺长误差对所量距离而引起的系统误差等等，都是消除系统误差的方法。

当观测列中已经排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比已经处于次要地位，那么，我们就可以认为该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测列，就称为带有偶然误差的观测列。当观测结果中偶然误差占主导地位时，应该如何处理它，这就是测量平差这一学科所要研究的内容。

最后要强调指出的是，在测量工作整个过程中，除了上述两种性质的误差以外，还可能发生错误。错误的发生，大多是由于工作中的疏忽大意，思想不集中等等原因所造成的。毫无疑问，任何错误的存在，不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费的现象，甚至使工作带来难以估量的损失。为了避免错误的发生，首先要求观测者必须要过细地做工作，同时要采取适当的方法和措施，及时发现错误，以便保证在观测结果中不存在错误。

§2 测量平差的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，因此，在实际工作中，为了提高最后结果的质量，同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，对一条导线边，丈量一次就可得出其长度了，但实际上总要丈量两次或两次以上。一个三角形，只需观测其中的两个内角，即可决定其形状，但通常是观测三个内角。由于观测误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，以便消除这些不符值，同时还要使得消除不符值后的结果，可以认为是被观测量的最可靠的结果。根据具有不符值的原始观测值，如何求出被

观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一任务，就是评定观测值以及最可靠结果的精度。既然观测有误差，就必须知道这些误差对测量成果的影响，考核测量成果的质量是否满足生产建设工作的要求。

概括起来说，测量平差的任务就是：

（1）对一系列带有偶然误差的观测值，采用合理的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。

（2）运用合理的方法来评定测量成果的精度。

第一章　平差原则与精度指标

本章将首先阐述偶然误差的规律性，然后讨论衡量精度的指标，以及根据观测值寻求最可靠的结果所应遵循的原则。

§1-1　偶然误差的规律性

任一被观测的量，客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值。这一数值就称为该被观测量的真值。

设对某量进行了 n 次观测，其观测值为

$$L_1,\ L_2,\ \cdots\cdots,\ L_n.$$

由于各观测值都带有一定的误差，因此，每一观测值与其真值 X 之间必存在一差数 Δ，即

$$\Delta_i = X - L_i \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1-1}$$

式中 Δ 称为真误差，有时简称为误差。在绪论中已经指出测量平差中研究的观测值是不包含系统误差的，因此 Δ 仅指偶然误差。

绪论中指出，偶然误差就其逐个误差的大小或符号而言，从其表面现象来看是没有规律的，即呈现出一种偶然性。辩证唯物主义者认为，偶然性和必然性是互相联系的，偶然性本身始终是服从于内部隐藏着的必然性，而必然性又是通过大量偶然性表现出来的。伟大导师恩格斯指出：**“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐藏着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”**根据无数的测量实践，人们发现在相同观测条件下，大量偶然误差确呈现出一定的规律性。这是客观世界普遍存在着的规律。现在我们通过实例来说明这种规律性。

某地区测量工作中，在相同的观测条件下，独立地❶ 观测了

❶ 这里的“独立”，是指各观测值之间互无影响，即任何一个观测值所产生的误差，都不致影响到其余各观测值的误差大小。

358 个三角形的全部内角。由于观测值带有误差，故三内角观测值之和不等于它们的真值 180°。根据(1-1)式，可由下式

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

算出这 358 个三角形内角和的真误差。式中$(L_1 + L_2 + L_3)_i$表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间 $d\Delta$间隔为 0″.20，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列；统计出现在各误差区间内的个数 ν，并将各误差区间内出现的误差个数 ν 除以误差的总个数 n(此处 n=358)，以求出误差出现于各区间内的相对个数$\frac{\nu}{n}$。其结果列于表 1-1 中。

表 1-1

误差的区间 $d\Delta$	Δ为负值		Δ为正值		备注
	个数 ν	相对个数 ν/n	个数 ν	相对个数 ν/n	
″ ″					
0.00—0.20	45	0.126	46	0.128	等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20—0.40	40	0.112	41	0.115	
0.40—0.60	33	0.092	33	0.092	
0.60—0.80	23	0.064	21	0.059	
0.80—1.00	17	0.047	16	0.045	
1.00—1.20	13	0.036	13	0.036	
1.20—1.40	6	0.017	5	0.014	
1.40—1.60	4	0.011	2	0.006	
1.60以上	0	0	0	0	
和	181	0.505	177	0.495	

从表 1-1 中可以看出，误差的分布情况具有以下几点性质：(1)绝对值小的误差比绝对值大的误差多；(2)绝对值相等的正负误差的个数相近；(3)误差的绝对值有一定的限值。

为了便于以后对误差分布互作比较，下面对 421 个三角形内角和的一组真误差，按照上述方法作了统计，其结果列于表 1-2 中。

表 1-2

误差的区间 dΔ	Δ为负值		Δ为正值		备注
	个数 ν	相对个数 ν/n	个数 ν	相对个数 ν/n	
″　″					
0.00—0.20	40	0.095	37	0.088	等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20—0.40	34	0.081	36	0.085	
0.40—0.60	31	0.074	29	0.069	
0.60—0.80	25	0.059	27	0.064	
0.80—1.00	20	0.048	18	0.043	
1.00—1.20	16	0.038	17	0.040	
1.20—1.40	14	0.033	13	0.031	
1.40—1.60	9	0.021	10	0.024	
1.60—1.80	7	0.017	8	0.019	
1.80—2.00	5	0.012	7	0.017	
2.00—2.20	6	0.014	4	0.009	
2.20—2.40	2	0.005	3	0.007	
2.40—2.60	1	0.002	2	0.005	
2.60以上	0	0	0	0	
和	210	0.499	211	0.501	

表 1-2 中所列的 421 个真误差，尽管其观测条件不同于表 1-1，但从表中可以看出：愈接近于零误差的区间，其相对个数愈大；随着离开零误差愈来愈远，其相对个数亦逐渐递减；且出现于正负误差区间内的相对个数，基本上相等。因而，从上表的误差分布情况来看，与表 1-1 内误差分布的情况具有相同的性质。

在无数的测量结果中，都显示出如前所述的几个性质。因而，人们总结出偶然误差的特性如下：

(1) *在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值；*

(2) *绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的可能性较大；*

(3) *绝对值相等的正误差与负误差出现的可能性相等；*

(4) 偶然误差的简单平均值，随着观测次数的无限增加而趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=0$$

在本书中，为了简便，经常用〔 〕表示和数。故上式通常写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0. \tag{1-2}$$

上述第四个特性是由第三个特性导出的。第三个特性说明了，在大量偶然误差中，正负误差有互相抵消的性能。因此当 n 无限增大时，真误差的简单平均值必然趋向于零。

这里要指出的是，对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差，它必然都具有上述的四个特性。而且，当观测值的个数 n 愈大时，这种特性就表现得愈为明显。偶然误差的这种特性，也称为统计规律性。

为了表达误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式外，还可以利用图形来表达。图 1-1 及图 1-2 就是分别根据表 1-1 及表 1-2 中的数据绘制的。

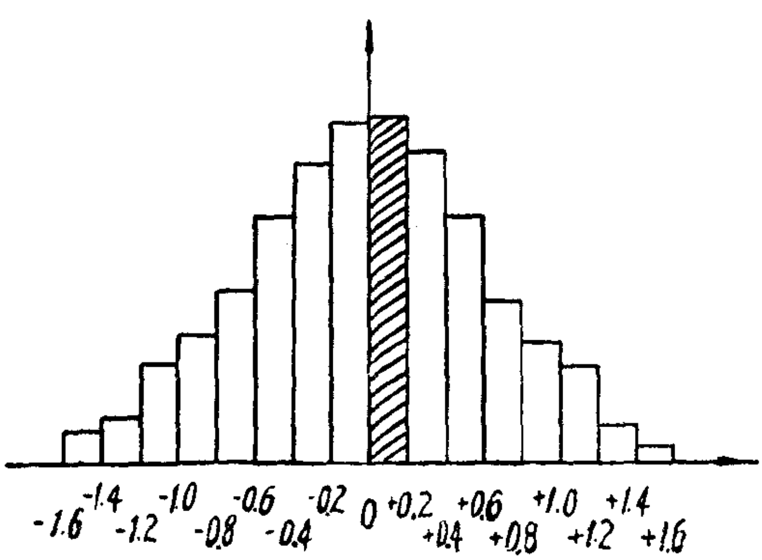

图 1-1