高等数学 下

电信各专业自学读本

北京邮电学院函授部编 · 人民邮电出版社出版

高 等 数 学

电信各专业自学讀本

下　　册

北京邮电学院函授部　编

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

《高等数学》自学读本这一套书，是为读者自学或作函授教学用书而编写的。分上中下三册，本书是下册，共十二章（第十九章到第三十章）；内容包括19．级数；20．富氏级数；21．微分方程；22．复数及其运算；23．复变函数；24．初等函数；25．保角变换；26．复变函数的积分；27．台劳级数和罗朗级数；28．留数理论；29．富氏变换；30．拉氏变换。每章、每节都有思考题和习题，并有习题答案。可供科技人员和高中文化程度的读者阅读；大专院校有关专业的师生参考。

高 等 数 学

电信各专业自学读本

下 册

北京邮电学院函授部 编

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

廊坊日报印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　　1930年8月第一版

印张：14 24/32页数：236 1980年8月廊坊第一次印刷

字数：339千字　　　印数：1—30,200册

统一书号：15045 总2400-有5168

定价：1.15元

目　　录

第五篇　级数、微分方程

第六编　复变函数

第七篇　富氏变换与拉氏变换

第五篇　级数、微分方程

第十九章　级　　数

级数是表示函数的一种重要工具。

学习本章时**要求读者**：

1. 理解级数的"收敛"与"和"的概念，掌握级数收敛性的几个判定法。

2. 熟悉函数的台劳级数，特别是e^x、$\cos x$、$\sin x$、$\ln(1+x)$、$(1+x)^m$这五个函数的台劳级数。

3. 理解函数展为幂级数的意义，熟悉各种展开方法。

第一节　数项级数与收敛的概念

一、级数概念

中等数学课程里讲述了等比级数

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1},$$

当 $q\neq1$ 时，它的和是$\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$，即

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}. \tag{1}$$

这种等比级数只是由有限个项组成的。但在处理许多实际问题时，还必须进一步考察由无穷个项组成的级数，这种级数

正是这一章所要研究的对象。下面，我们研究一个具体问题，以便明确这种级数的概念及其现实意义。

我们研究单位圆的面积。

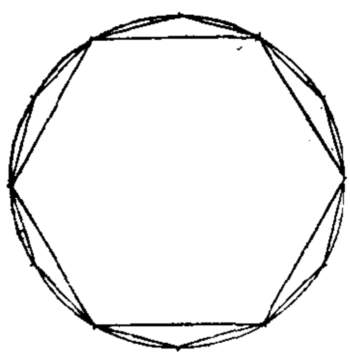

图 19.1

先作一个内接正六边形(图 19.1)，它的面积记做 u_1，则 u_1 就是这个单位圆的面积 s 的一个近似值。

在这六边形的每一边上作一等腰三角形(三角形的顶点在圆周上)，记这六个等腰三角形的面积的总和为u_2，则

$$u_1+u_2$$

(即圆内接正十二边形的面积) 是这单位圆面积 s 的一个较好的近似值。

同样地在这十二边形的边上各作等腰三角形，记这十二个等腰三角形的面积的总和为u_3，则

$$u_1+u_2+u_3$$

(即圆内接正二十四边形的面积) 是这单位圆面积 s 的一个更好的近似值。

依次类推，单位圆的面积 s 近似于

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,$$

n 越大则近似的程度越好。也就是说，只要 n 足够大，单位圆的面积 s 与 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ 之差能任意地小。

如果我们记

$$\begin{aligned}
s_1&=u_1,\\
s_2&=u_1+u_2,\\
s_3&=u_1+u_2+u_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
则可以看出
$$s=\lim_{n\to\infty}s_n.$$
上面的例子向我们提出这样一个任务：s_n是n个数的和，即
$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$
要考虑 s_n 的极限。

如果s_n有极限，设为s，那么我们很自然地记做
$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots. \tag{3}$$
定义　由数列$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$组成的式子
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$
叫做无穷数项级数（简称为**数项级数或级数**）。其中u_1叫做级数的第一项，u_2叫做第二项，等等；u_n叫做**一般项或通项**。

数项级数（4）也简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。例如，级数
$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$
可简记为
$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n;$$
级数
$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$
可简记为
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

思 考 题

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.1)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{2n-1}}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

答：(1) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$；

(2) 0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001；

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5^3}, \frac{1}{5^5}, \frac{1}{5^7}, \frac{1}{5^9}$；

(4) $-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, -\frac{1}{5\cdot 6}$.

2. 写出下列级数的一般项

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$；

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$；

(3) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

答：(1) $\frac{1}{n}$；　　(2) $\frac{1}{2^{n-1}}$；

(3) $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是下面哪一个级数的缩写

(1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$；

(2) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$；

(3) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$.

答：第(3)个。

二、级数的收敛、发散概念

我们现在再回顾一下级数概念的引出。本来，我们所考虑的级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是表示如下的极限

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n),$$

但是，我们在给出级数的定义时没有顾及这一点，而只是将形如 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的表达式叫做数项级数。于是可能有些级数的前 n 项之和 s_n 的极限不存在。例如，级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

的前 n 项之和 s_n 的极限就不存在：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}s_n&=\lim_{n\to\infty}(1+2+3+\cdots+n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\\&=\infty.\end{aligned}$$

由此可见，形式上的级数定义带来了我们原先并不想考虑而性质又很不相同的对象。为了区别这两种性质不相同的级数，我们给以如下的定义。

定义　如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$

的前 n 项之和 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 当 n 无限增大时的极限存在，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=S$$

存在，则称数项级数（4）是收敛的，而极限值 s 就叫做它的和（或称级数收敛于 s），并记做

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots;$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，则称数项级数(4)是发散的。

发散级数没有和，这是发散级数与收敛级数的根本区别。

三、无穷等比级数

现在，我们来研究一个重要的数项级数——无穷等比级数（简称为等比级数或几何级数）

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \tag{5}$$

的收敛性。

要考虑级数的收敛性，就是要考虑 s_n 的极限是否存在。由(1)式知，当 $q\neq1$ 时，等比级数的前 n 项之和是

$$s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

现在分下列各种情况来考察它的极限。

1．如果 $|q|<1$，则当 $n\to\infty$ 时，$q^n\to0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\dfrac{a}{1-q}$。这时，级数是收敛的，而且它的和是 $\dfrac{a}{1-q}$。

2．如果 $|q|>1$，则当 $n\to\infty$ 时，$q^n\to\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在，即级数是发散的。

3．如果 $|q|=1$，又可以分为 $q=-1$、$q=1$ 两种情况来考虑：

当 $q=-1$ 时，级数(5)成为

$$a-a+a-a+a-a+\cdots,$$

于是 s_n 为如下的数列

$$a,\ 0,\ a,\ 0,\ a,\ 0,\cdots,$$

这数列没有极限。因此，当 $q=-1$ 时，级数(5)是发散的。

当 $q=1$ 时，级数(5)成为

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots,$$

它的前 n 项之和是 $s_n=na$。当 $n\to\infty$ 时，$s_n\to\infty$，所以级数是发散的。

综合上面的分析，可得结论：**如果等比级数的公比 q 的绝对值小于1(即 $|q|<1$)，则级数收敛；如果 $|q|\geqslant 1$，则级数发散。**

习　题　19.1

求下列级数的和

1. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots$,　　答：2.

2. $0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots$,　　答：$\frac{1}{9}$.

3. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^7}+\cdots$,　　答：$\frac{5}{24}$.

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$,　　答：1.

提示：级数的一般项 $\frac{1}{n(n+1)}$ 可写成 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，将前 n 项的每一项都写成这种形式之后，可以求出 s_n。

第二节　级数收敛的必要条件

在这一节里我们介绍级数收敛的必要条件。

假设级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

是收敛的，我们来考察，当 $n\to\infty$ 时，它的一般项 u_n 的变化状态应该是怎样的。

因为

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n,$$

$$s_{n-1}=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1},$$

两式相减得

$$u_n=s_n-s_{n-1}。$$

又原设级数是收敛的，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}=s$，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty} s_n-\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=0.$$

我们可以把上面讨论的结果写成下列定理

定理　如果级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛，则它的一般项 u_n 必趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

这定理也可以这样来叙述：**级数的一般项趋于零是级数收敛的必要条件。**

这定理又告诉我们，**如果级数**

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的一般项 u_n 不趋于零，则级数发散(如果收敛，则必定 $\lim u_n=0$，这与假设矛盾，故级数必定是发散的)。由此可以断定

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

$$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\cdots$$

都是发散级数。

应当特别向读者指出：**一般项趋于零只是级数收敛的必要条件，却不是充分条件。即是说：一般项趋于零的级数还不一定收敛。**例如，级数

$$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

的一般项

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时的极限为 0，但级数却是发散的。事实上，

$$\begin{aligned}s_n&=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots\\&\quad+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\\&=\ln(n+1),\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty,$$

故级数是发散的。

习　题　19.2

判定下列级数的敛散性

1\. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$，　　答：发散。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$,　　答：发散。

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,　　答：发散。

第三节　无穷级数的基本性质

根据级数的前 n 项的部分和所组成的数列

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_n,\cdots$$

的敛散性，可以获得级数的几个基本性质。

一、设级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

收敛，它的和是 s，则将这级数各项乘以一个不为零的常数 k 所得的级数

$$ku_1+ku_2+ku_3+\cdots+ku_n+\cdots \tag{2}$$

仍然收敛，它的和是 ks。

证　因为级数(2)的前 n 项的和是

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+ku_3+\cdots+ku_n=ks_n, \tag{3}$$

由此可知，如果级数(1)收敛（即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在)，则级数(2)也收敛（因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ 也存在)，而且级数(2)的和 σ 为

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}ks_n=k\lim_{n\to\infty}s_n=ks.$$

注：由 (3) 式还可以看出，如果 s_n 没有极限，则 σ_n 也不可能有极限，即级数(1)发散则级数(2)也发散。由此可知，**级数的各项乘以一个不为零的常数后它的敛散性总是不变的。**

二、收敛级数可以逐项相加或逐项相减。就是说，如果有两个收敛的级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$
$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma,$$

则级数

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

必定是收敛的，而且它的和就是 $s\pm\sigma$。

这是因为最后一个级数的前 n 项的和为

$$\begin{aligned}&(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=\\&=s_n\pm\sigma_n,\end{aligned}$$

由于 $n\to\infty$ 时，$s_n\to s$，$\sigma_n\to\sigma$，所以上式必定有极限，而且极限值为 $s\pm\sigma$。

三、在级数的前面加上有限项或去掉有限项，不会影响级数的敛散性，不过在收敛的情形，一般说来级数的和要改变.

为确定起见，我们考虑下面两个级数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,$$
$$u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots,$$

第二个是由第一个去掉前两项所得到的。仍用 s_n 表示第一个级数前 n 项的和，用 σ_n 表示第二个级数前 n 项的和。于是有

$$s_n=u_1+u_2+\sigma_{n-2}.$$

由此可见，当 $n\to\infty$ 时，s_n 与 σ_{n-2} 或者同时有极限（依次设极限为 s、σ。这时两级数都收敛），或者同时没有极限(这时两级数都发散)；在有极限时，两级数的和 s 与 σ 有下列关系

$$s=u_1+u_2+\sigma$$

或

$$\sigma=s-(u_1+u_2).$$

例 等比级数$\left(公比 q=\dfrac{1}{2}\right)$