

目 录

第一章 绪 论	(1)
一、测试技术与林业机械	(1)
二、测试工作的内容和测试系统	(2)
三、课程的内容和特点	(3)
第二章 信号及其分析	(4)
第一节 信号的分类及描述	(4)
一、信号的分类	(4)
二、信号的描述	(5)
第二节 周期信号及其离散频谱	(5)
一、周期信号的幅值域分析	(5)
二、傅里叶级数的三角函数展开式	(7)
三、傅里叶级数的复指数函数展开式	(11)
第三节 非周期信号及其连续频谱	(14)
一、傅里叶变换	(14)
二、傅里叶变换的主要性质	(18)
三、几种典型信号的频谱	(22)
第四节 随机信号	(25)
一、随机过程及其描述	(26)
二、随机信号的主要特征参数	(27)
第五节 信号分析和处理	(27)
一、测试信号的幅值域分析	(28)
二、测试信号的时间域分析	(30)
三、测试信号的频率域分析	(38)
四、测试信号的数字量分析	(44)
第三章 测试系统的基本特性	(49)
第一节 测试系统	(49)
第二节 测试系统的静态特性	(50)
一、测量误差	(50)
二、静态特性	(51)
第三节 测试系统的动态特性	(52)
一、线性系统	(52)
二、动态特性	(56)
三、多环节系统的传输特性分析	(67)
四、实现不失真测试的条件	(72)
第四节 测试装置动态特性的测定	(74)
一、用频率响应法求测试装置的特性参数	(74)

二、原函数响应法求测试装置的特性参数	(75)
第四章 位移的测量	(78)
第一节 常用的位移传感器	(78)
一、变阻器式位移传感器	(79)
二、电感式位移传感器	(80)
三、电容式位移传感器	(83)
四、旋转变压器式角位移传感器	(85)
第二节 显式记录仪器	(86)
一、笔式记录仪	(86)
二、光镜示波器	(87)
第五章 振动测试	(92)
第一节 机械振动概述	(92)
一、外力所引起的单自由度系统的受迫振动	(93)
二、基础运动所引起的单自由度系统的受迫振动	(94)
三、旋转机械的不平衡所引起的振动	(95)
第二节 激振与激振器	(97)
一、激振	(97)
二、激振器	(100)
第三节 测振与测振传感器	(103)
一、压电式速度传感器	(103)
二、压电式加速度传感器	(105)
三、传感器的常用校准方法	(110)
第四节 振动的分析仪器	(111)
一、振动仪	(111)
二、用滤波技术的辅助分析仪器	(112)
三、相关分析和功率谱分析	(118)
第五节 振动测试实例	(118)
一、抽气振动的测试与分析	(118)
二、林用车辆座椅振动特性的测试分析	(121)
第六章 噪声测试	(128)
第一节 噪声的物理量度	(129)
一、声学测量单位制	(129)
二、声压和声压级	(130)
三、声强和声强级	(130)
四、声功率与声功率级	(131)
五、响度及响度级	(132)
六、等响曲线	(133)
七、计权声级	(134)
八、噪声指数	(135)
第二节 噪声测量仪器	(136)
一、传声器	(137)
二、声级计	(139)

三、磁带记录仪	(141)
第三节 噪声测量	(147)
一、风力灭火机噪声的测量	(147)
二、便携式制砂机噪声测量	(148)
三、木工刨机、刨床的噪声测量与分析	(150)
第七章 电阻应变技术及力的测量	(152)
第一节 电阻应变片	(152)
一、应变片的工作原理	(152)
二、应变片的工作特性	(154)
三、应变片的类型及选用	(155)
第二节 电桥电路	(156)
一、直流电桥	(156)
二、交流电桥	(159)
第三节 电阻应变仪	(160)
一、电阻应变仪的分类和组成	(160)
二、电阻应变仪中的信号调制与解调	(162)
第四节 力的测量	(167)
一、测力传感器	(167)
二、测力传感器的标定	(168)
三、切削力的测量	(170)
四、扭矩的测量	(181)
第八章 温度的测量	(185)
第一节 温标	(185)
第二节 基本测温方法	(185)
一、接触式测温	(185)
二、非接触式测温	(188)
第九章 木材动态参数的测量	(191)
第一节 木材的振动特性	(191)
一、木材的纵向振动	(191)
二、木材的横向振动	(192)
三、木材的扭转振动	(194)
四、木材振动测试的激振方法	(194)
第二节 木材的声学特性	(198)
一、声速	(199)
二、声速测试方法	(200)
三、木材的声辐射品质因素	(201)
四、木材的声衰减	(201)
五、木材的声阻抗	(202)
第三节 木材检测技术的发展	(202)
一、原木光电检测仪	(202)
二、声发射技术的应用	(203)

第十章 微型计算机在测试技术中的应用	(205)
第一节 微机化测试系统的构成	(205)
一、微机的基本结构	(205)
二、微机主要性能指标	(206)
三、微机的分类	(206)
四、微机化测试系统的类型	(207)
第二节 测试系统的信号通道	(209)
一、前向通道的结构特点	(209)
二、A/D转换	(211)
三、后向通道的结构特点	(214)
四、D/A转换	(214)
第三节 标准接口总线	(216)
一、概述	(216)
二、数据通讯方式	(217)
三、异步串行通讯接口总线RS-232C	(218)
四、通用仪器接口总线 GP-IB	(221)
第四节 微机化测试系统实例分析——智能转速表	(224)
一、概 述	(224)
二、技术指标	(224)
三、系统硬件设计	(225)
四、系统软件设计	(227)
主要参考文献	(228)

第一章 绪 论

一、测试技术与林业机械

测试是人们认识客观事物的重要技术手段。人类在长期的生产活动和科学实验中体会到,科学技术的发展是离不开测试工作的。在测试技术落后的时代,人们只能依赖自己的感觉器官和一些简陋的机械量具去观测客观世界的各种现象,所探索的领域也只限于人类感觉器官所能达到的范围。生物显微镜的发明,使生物学的研究进入了细胞领域,射电望远镜则使近代宇宙观测伸展到了外星系。现代科学技术已经能够揭示许多尖端领域中的奥秘,如宏观的宇宙天体,微观的基本粒子,极低温的超导现象,极高温的核聚变等等。这些领域的扩大都是由于测试技术发展的结果。

诚然,现代测试方法和仪器的出现,是科学技术发展的结果,然而,任何一项新的科学技术的发现和发展,又都是以精确的测试为基础的。这方面的例子是很多的。譬如,双级隔振系统油锯的研制成功,就是在对原来油锯进行振动的检测与分析的基础上,采用橡胶和弹簧双级合理组合隔振的办法,将从发动机到油锯手把的振动传递通道进行有效的隔离,从而使油锯手把上的振动大大降低。再如,木材在干燥过程中的声发射现象的发现,以及声发射测试仪器设备的发展和完善,使得木材干燥过程的控制可以实现理想的应力控制,从而可以避免和减少木材在干燥室内由于干燥应力过大使木材开裂造成的损失。可见,先进的测试技术是科学技术发展必不可少的条件,也是科学技术现代化的重要标志之一。

我国的林业机械,经过多年的努力,已具有了相当的技术水平和一定的生产能力,研究、设计和制造了多种类适合于我国国情的林业机械和木材加工机械。但是还存在着品种不够齐全,产品的技术水平和质量不够高等问题。今后在学习和吸收外国先进技术的同时,还需加强对现有产品的改进、新产品的研制和新技术的开发工作。测试技术不仅能为产品质量和性能的改进提供客观的评价,为新产品的设计提供基础数据,而且是进行探索性的、创造性的技术发明的有力手段。

林业机械的种类繁多,其结构和原理等方面的特点各异。从测试工作的角度来看,林业机械的特点,首先是振动和噪声大。不少林业机械由于工作原理和工作条件方面的原因,工作时产生的振动和噪声远高于其它专业机械。例如,在林业生产中广泛使用的动力机械油锯,在高速转下工作时,手把处的振动加速度最大可达 280m/s^2 ,耳旁噪声高达 107dB(A) ;割灌机在满负荷工作时噪声达 98dB(A) ;烟雾机在喷雾液时的噪声达 110dB(A) ;木工圆锯机的噪声更高在 $110\sim 120\text{dB(A)}$ 。这样大的振动和噪声已经成为一种公害,各国的林业机械研究人员正在努力研究各种林业机械的减振降噪措施,如上面提到的双级隔振油锯就是瑞典 Husqvarna 公司研制的。

其次,林业机械的工作对象主要是木材。木材是一种天然的弹塑性材料,它材质不均匀,各向异性,含水率随时间变化,并且不同的树种的上述特性的差异很大。木材的这些物理力

学性质给林业机械的研制和使用带来很多特殊问题。例如木材的切削力,由于木材构造的非均匀性和各向异性,造成木材的切削力是一种随机力,除常值分量外还有动态分量,且动态分量的比例较大,在切削加工过程中,对木工刀具和机械设备进行随机激励,成为木材切削加工的振动和噪声大的原因之一。

第三,由于林业机械特别是手提、背负和肩挂式的机械,人机关系密切。因此,人体的生理特征,各部位对振动的敏感频率范围等是研制林业机械的重要依据,也是要检测的内容。比如在林区公路上行驶的林用运材车,由于路面崎岖不平所产生的低频振动(10Hz以内,加速度值在 $1\sim 2\text{m/s}^2$),通过座椅传给驾驶员,若座椅弹簧的刚度设计不当,使座椅系统的固有频率与人体垂直振动敏感频率 $4\sim 8\text{Hz}$ 重合,则会产生共振,使驾驶员无法坚持工作,甚至会造成身体上的损伤。

综上所述,可见林业机械的发展同测试技术息息相关,林业机械工程技术人员,除了应掌握测试技术的基础理论和测试方法外,还应该了解林业机械在测试方面的特殊问题。

二、测试工作的内容和测试系统

测试工作的目的是为了获得有关研究对象的状态、运动和特征等方面的信息。对于像机械系统这一类的物理系统,有些信息是可以直接检测到的,而有些信息则不能直接检测到。如一弹簧在外力的冲击下产生振动,弹簧的固有频率是可以直接测得的,弹簧的刚度和阻尼也是可以通过简单的计算获得。但是,对于一个回转圆盘的不平衡量的大小及其位置的信息则不容易直接测得,而需要通过检测这一不平衡量在回转时使支承受到一附加的动态力所引起的振动。用传感器检测支承处的动载荷或振动信号,并对信号进行分析处理,才可以获得圆盘不平衡量的大小和角度位置的信息。不平衡量大小和位置的信息是寓于所检测的信号之中,所以说信号是信息的载体。一般说来,对于某一信息总有多与其对应的信号。这种信息表现形式的多样性给检测技术带来了极大的方便。譬如,对应于“物体受热”这一信息,反映出来的是“温度上升”、“体积膨胀”、“磁导率变化”、“电导率变化”以及“红外线辐射加大”等等,检测其中任一信号都可以获得“物体受热”这一信息。

1. 测试工作的内容

从信息科学的角度来看,测试工作的内容是:

(1) 选择与某种信息相对应的信号表现方式,并确定两者之间的定性、定量关系,以开辟新的检测技术领域。例如,对于木材干燥过程中“应力增加形成微裂纹”这一信息,人们发现了“声发射”信号,以及微裂纹孕育、发生、发展过程与声发射信号的定性、定量关系,从而开辟了声发射检测技术的新领域。

(2) 对反映某一信息的多种形式的信号,在不同的条件下,寻找最佳的信号获取、变换、存贮、传输、显示等的方法、手段与设备。这一项内容包括了如前面所举的回转圆盘不平衡的例子中,从附加动态力信号的拾取,到得出不平衡量的大小和角度位置的信息的记录显示的整个过程的工作。是测试工作的主要内容,由一具体的测试系统来完成。

图1-1是一典型的测试系统。从被测对象上拾取信号的办法可以用某种方式的激励,使被测对象产生表征其特征(信息)的信号,并用传感器检测这种信号;也可以用传感器检测研究对象在工作过程中所产生的特征信号。一般情况下由传感器所拾取的信号是非电物理量,为了传输、变换和显示记录的方便,而由传感器转换成电信号输出。中间变换部分是对传感器

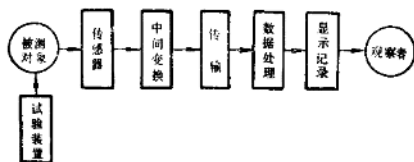


图 1-1 测试系统框图

输出的很微弱的电信号进行加工，如将信号放大、调制与解调、阻抗变换等等。经过这样的加工之后，测试信号便成为一种便于传输的适合于进行数据处理的信号。经过处理后的信号，将所需要的信息完全显露出来，通过显示和记录供人们观测分析。

2. 测试系统的优点

上述测试系统是一典型的非电量电测系统。这种测试系统的突出优点是：

- (1) 可以将不同的被测参数转换成相同的电量，因而可以使用相同的仪器；
- (2) 输出的电信号可作远距离传输，利于远距离操作与自动控制；
- (3) 可以对参数进行动态测量，测量记录其瞬时值与变化过程；
- (4) 在检测微弱信号以及瞬态过程测量方面是其它非电量测量法所不能比拟的；
- (5) 由于可输出电量信号，易于和许多后续数据处理仪器或计算机连用，从而能对复杂的测量结果进行分析、运算及处理。

因此，在现代测试技术中，非电量电测法应用很广。本课将只讨论非电量电测的基本理论、测试原理和方法。

三、课程的内容和特点

本课程所讲授的是林业机械工程中动态测试的基本理论和工程中常见物理量如振动、噪声、力、温度、位移等的测试方法，以及信号处理和分析的基本知识。本书基本上是按测试参量编写的，常用传感器、中间变换电路、记录仪器等均分散在有关参量章节中介绍。

本课程对于林业机械工程专业是一门技术基础课。通过本课程的学习，培养学生具有进行动态测试所必须的基本知识和技能，能够根据测试要求选择合适的测试仪器，组成简单的测试系统，进行一般的测试工作。并为进一步学习、研究和处理工程中的测试问题打下基础。

学生学完本课程后，应掌握以下几方面的知识：

- (1) 信号的时域、频域描述及频谱分析、相关分析、功率谱分析和信号的数字化分析；
- (2) 测试装置的静态、动态特性和不失真测试的条件，以及一、二阶系统的动态特性；
- (3) 常用传感器、中间变换器、记录仪器的工作原理及应用；
- (4) 林业机械工程中常见物理量的测试原理和方法。

测试技术课程的理论性和实践性均很强，在学习过程中要注意理论和实践的结合，要重视动手能力的培养，加强实验教学环节，只有这样才能真正学到动态测试技术。

第二章 信号及其分析

所谓信号是指随时间变化的各种物理量,是时间的函数。它可以是非电物理量,如机器的振动和噪声、切削过程中的切削力、机械运动的位移、速度等。也可以是电量,如电流或电压、电容的电荷、线圈的磁通等。后者被称为电信号。从信号的获得、变换到传输、显示等方面来看,电信号最为方便。所以在生产实践和科学研究中,经常把要测的非电物理量转换成电信号,一般都转换成电压或电流信号。一个测试信号中包含着多种信息,有我们需要的信息,也有不需要的信息,即所谓干扰。信号分析的目的就是从测试信号中提取有用的信息,剔除各种干扰。

第一节 信号的分类及描述

一、信号的分类

根据信号随时间变化的规律性,信号可分为确定性信号和随机信号两大类。

(一) 确定性信号

是指可以用数学关系式或图表明确描述其变化的信号,可以准确预计未来任意时刻的信号值。确定性信号又可分为周期信号和非周期信号。

(1) 周期信号。是指依一定的时间间隔周而复始变化的信号。它满足下列关系式:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-1)$$

式中: T ——周期。

图 2-1 为一集中参数单自由度振动系统作无阻尼自由振动时的物理模型,振动时的位移 $x(t)$ 是一确定性的周期信号,可以用下式来描述质量块的准确位置:

$$x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) \quad (2-2)$$

式中: X_0 ——振动幅值的最大值;

k ——弹簧刚度;

m ——质量;

φ_0 ——初始相位;

t ——时间。

(2) 非周期信号。是指能够用确定的数学关系式描述,但不具有周期重复性质的信号。

图 2-2 (a) 为一矩形脉冲信号;图 2-2 (b) 为一指数衰减信号两者均为非周期信号。

(二) 随机信号

是指无法用明确的数学关系式描述的信号,因而也不能预测其未来值。但它具有某些统计特性,可以用概率统计方法由过去估计其未来。例如汽车行驶时的振动、木材切削力的动态分量等均属这类信号。

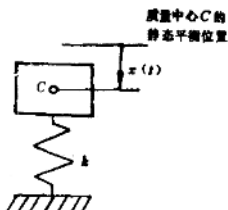


图 2-1 单自由度振动系统

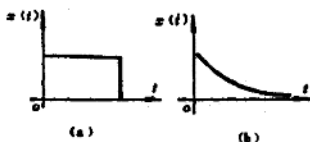


图 2-2 非周期信号
(a) 矩形脉冲信号；(b) 指数衰减信号

此外，根据信号独立变量的取值特点，还可分为连续信号和离散信号。连续信号是指信号的独立变量的取值是连续的。若独立变量的取值是离散的，则称离散信号。图2-3(a)是连续(模拟)信号，图2-3(b)是离散信号。若信号的独立变量和幅值都是离散的且都用数字表示，则称之为数字信号。

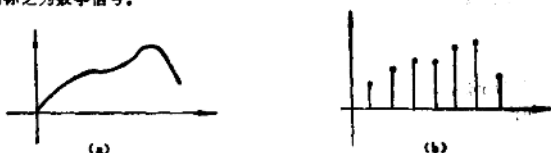


图 2-3 连续信号与离散信号
(a) 连续信号；(b) 离散信号

二、信号的描述

动态测试中所记录的信号一般都是以时间为独立变量的函数，称为信号的时域描述。时域描述法简单、直观，但是不能明确地揭示出信号的频率成分。为了了解信号的频率结构以及各频率成分的幅值和相位，需对信号进行频谱分析。即把时域信号通过傅里叶分析变换成频域信号，在频域内描述信号的特性。除时域和频域描述外，还有幅值域和时延域描述等。

所谓“域”的不同，是指描述信号的图形中横坐标独立变量的不同。时域描述中，独立变量是时间 t ，频域描述的独立变量是频率 f (或圆频率 ω)，而幅值域和时延域中的独立变量分别为幅值 x 和时延 τ 。同一信号在不同域中描述，是为了从不同的角度了解信号的特征，是解决不同性质问题的需要。譬如在机器的故障诊断中，为了寻找振源要对信号进行频谱分析；而为了求木材的对数衰减量(木材的阻尼)，需要记录木材自由衰减振动的波形，则需进行时域分析。

第二节 周期信号及其离散频谱

一、周期信号的幅值域分析

最简单的周期信号是简谐信号，即正(余)弦信号，其时域的数学表达式如式 2-2，被

形如图 2-4 所示。周期信号的峰值、绝对均值、均方值和均方根值（有效值）是在幅值域内对周期信号的强度和能量的描述。各值的定义如下（参看图 2-4）：

1. 峰值 x_p

$$x_p = |x(t)|_{\max} \quad (2-3)$$

是指信号可能出现的最大瞬时值，测试前对信号的峰值要有足够的估计，以便确定测试系统的动态范围，使之不致产生削波现象，保证能真实地反映被测信号的最大值。

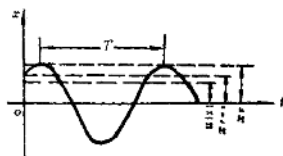


图 2-4 周期信号的幅值域描述

2. 均值 μ_x

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (2-4)$$

是周期信号的常值分量。式中 T 为周期。

3. 绝对均值 $\mu_{|x|}$

$$\mu_{|x|} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (2-5)$$

是周期信号全波整流后的平均值。

4. 有效值 x_{rms}

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (2-6)$$

是信号的均方根值，反映了信号功率的大小。

5. 均方值 ϕ^2

$$\phi^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (2-7)$$

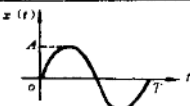
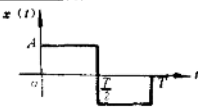
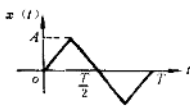
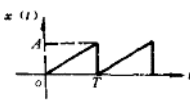
它反映了信号的平均功率。

表 2-1 列举了几种典型周期信号的上述各值之间的数量关系。从表中可以看出，信号的均值、绝对均值、有效值和峰值之间的关系与波形有关。在检测周期信号上述各参数时，可以使用三值电压表来测量，也可用普通的电工仪表来测量。峰值 x_p 可根据波形折算或用能记忆瞬峰示值的仪表测量，也可用示波器测量。均值 μ_x 可用直流电压表测量，均方值 ϕ^2 可用真均方电压表测量。

应当注意的是，一般的交流电压表均按有效值刻度，但是它所测量的并不是信号的有效值，而是信号的峰值 x_p ，或者是信号的绝对均值 $\mu_{|x|}$ 。这是因为峰值或绝对均值的电压检波电路比有效值的电压检波电路要简单、便宜得多。不过，这就要求电压表表盘的刻度值应按峰值或绝对均值与有效值之间的比例关系来刻度，否则电压表的输出量就不是有效值。但是从表 2-1 可以看出峰值、绝对均值和有效值之间的比例关系对于不同的波形是不同的。如果交流电压表是按正弦信号的比例关系标定的，那么用来测量其它复杂的周期信号将产生测量误差。

由于上述原因，在使用按均方值刻度的交流电压表时，需要预先确知它的电压检波电路

表 2-1 几种典型信号的幅度

名称	波形图	x_p	μ_x	μ_{1x}	x_{rms}
正弦波		A	0	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$
方波		A	0	A	A
三角波		A	0	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
锯齿波		A	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$

是属于何种类型。为此可用以下方法：

对于正弦信号，若 $\mu_x = 0$ ，则前述几个参数有如下关系：

瞬时值 $x(t) = A \sin 2\pi f t$

峰值 $x_p = A$

绝对均值 $\mu_{1x} = \frac{2}{\pi} A = 0.636 A$

有效值 $x_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} A = 0.707 A$

检测时可用峰值相等的正弦波和方波输入该电压表，若读数相等，则说明该电压表具有峰值电压检波电路；若正弦波所测得的数据为方波的 0.707 倍，则为真正的有效值检波电路，若正弦波的读数为方波的 0.636 倍，则知是绝对均值检波电路。这样就可以根据波形来修正电压表的读数了。

二、傅里叶级数的三角函数展开式

复杂的周期信号一般只具有取值周期重复的特点，其频率、振幅和相角并非是一一的。根据高等数学中的级数理论，在有限区间 J ，任何周期函数 $x(t)$ 如满足狄里赫利条件，都可展开成傅里叶级数。傅里叶级数的三角函数展开式为：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2-8)$$

式中: a_0 、 a_n 、 b_n ——是傅里叶系数。

傅里叶系数由下列公式定义:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中: T ——周期信号 $x(t)$ 的周期;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ——周期信号的基频;

$n=1, 2, 3, \dots$ 。

式 2-8 可以改写成另一种表达形式:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2-10)$$

式中: A_n ——为各频率成分的振幅, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$;

φ_n ——各频率成分的初相角, $\varphi_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$;

把式 2-10 展开为:

$$x(t) = a_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2-11)$$

可见, 周期信号 $x(t)$ 可以展开成许多项之和。第一项 a_0 是周期信号的均值(直流分量)。第二项是圆频率为 ω_0 的余弦, $n=1$ 是该周期信号的基波, ω_0 称基频, 其周期与周期信号的周期相同。此后各项均为基频 ω_0 整数倍的余弦(也可以用正弦表示), 称为基波的第 $n(n=2, 3, \dots)$ 次谐波。

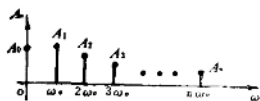
还可看出, 周期信号中各次谐波的振幅 A_n 和相角 φ_n 都是谐波频率 $n\omega_0$ 的函数, 即:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = f_1(n\omega_0), \quad \varphi_n = \arctg \frac{-b_n}{a_n} = f_2(n\omega_0)$$

它们分别为该周期信号的幅值频谱函数和相位频谱函数。图 2-5 是它们的频谱图, 其中 $A_n - n\omega_0$ 是幅值频谱图如图 2-5(a); $\varphi_n - n\omega_0$ 是相位频谱图, 如图 2-5(b)。

傅里叶级数及其频谱函数和频谱图是对周期函数的频域描述, 揭示了该周期函数的频率成分和各频率成分的幅值和相位。

在计算周期函数的傅里叶级数的系数时, 利用奇函数在对称区间 $(-a, a)$ 内积分为零的特性, 可使傅里叶级数的计算大为简化。



(a)



(b)

图 2-5 频谱图

(a)幅值频谱图; (b)相位频谱图

(1) 若周期函数 $x(t)$ 为一奇函数, 即 $x(t) = -x(-t)$, 则 $x(t)\cos n\omega_0 t$ 也将为奇函数, 积分后使傅里叶级数的系数 $a_0 = 0$ 、 $a_n = 0$, 傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (2-12)$$

(2) 若周期函数 $x(t)$ 为一偶函数, 即 $x(t) = x(-t)$, 则 $x(t)\sin n\omega_0 t$ 将为奇函数, 积分后使傅里叶级数的系数 $b_n = 0$, 其傅里叶级数为:

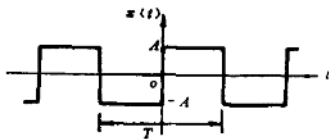
$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (2-13)$$

为了说明周期函数展开成傅里叶级数及频谱的概念, 下面用一周期方波的例子来说明。

例1 求图 2-6 所示的非对称性周期方波的傅里叶级数及其频谱。

如图所示的时域波形, 其周期为 T , 幅值为 A 。一个周期中的表达式为:

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t = 0, \frac{T}{2}, -\frac{T}{2} \\ -A & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \quad (2-14)$$



根据公式 2-9 求傅里叶系数:

图 2-6 周期方波

因 $x(t)$ 为一奇函数, 所以 $a_0 = 0$, $a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2A}{T} \left[\left. \frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left. \frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right|_0^{\frac{T}{2}} \right] \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \left[1 - \cos \left(-n\omega_0 \frac{T}{2} \right) - \cos \left(n\omega_0 \frac{T}{2} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{4A}{n\omega_0 T} \left[1 - \cos \left(n\omega_0 \frac{T}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-15)$$

因

$$\omega_s T = 2\pi$$

所以

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

当 $n=1$ 时

$$b_1 = \frac{2A}{\pi} [1 - (-1)] = \frac{4A}{\pi}$$

$n=2$ 时

$$b_2 = 0$$

$n=3$

$$b_3 = -\frac{4A}{3\pi}$$

$n=4$

$$b_4 = 0$$

$n=5$

$$b_5 = \frac{4A}{5\pi}$$

.....

.....

其傅里叶级数展开式为:

$$x(t) = -\frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_s t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_s t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_s t + \dots \right) \quad (2-16)$$

各次谐波的相位, 由于非对称性周期方波的展开式是以正弦函数形式表达的, 与式2-11比较其相位差 $\pi/2$, 即:

$$A \cos(n\omega_s t + \varphi_n) = A \sin(n\omega_s t + \pi/2 + \varphi_n)$$

初相位为 $\pi/2 + \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} = \pi/2$

$$\varphi_n = 0^\circ$$

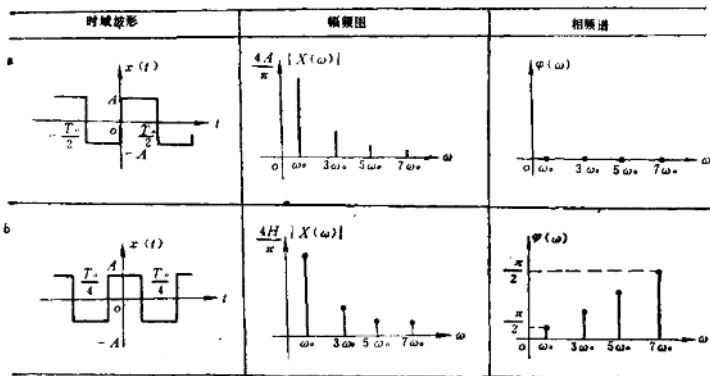


图 2-7 周期方波的频谱

(a) 非对称周期方波; (b) 对称周期方波

图2-7(a)是周期方波的时域波形和时域的频谱图及相频图,对照式2-16可见该周期方波是一系列幅值和频率不等的相角为零的正弦波叠加而成。且只包含基波和奇次谐波,其幅值以 $1/n$ 的规律收敛。若将该周期方波的时域波形沿时间轴向左移 $T/4$,便成为对称于纵坐标轴的周期方波,图2-7(b)是该方波的时域波形及频谱图,时移前后周期方波的幅频谱相同,相频不同,各谐波分量产生 $\frac{1}{2}n\pi$ 的相移。

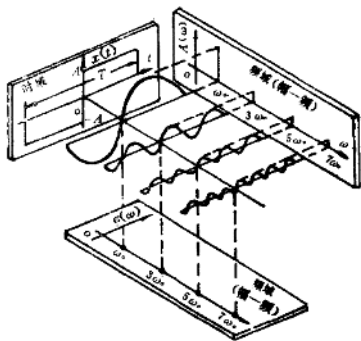


图 2-8 周期方波的描述

图 2-8 形象地表示了非对称周期方波在时域和频域描述的相互关系。表明该周期信号在时域内可分解成一系列奇次谐波,在频域内揭示了各次谐波的幅值与相位随频率变化的情况。

三、傅里叶级数的复指数函数展开式

傅里叶级数还可以写成复指数形式。虽然复指数信号在实际上是无法产生的,但是它概括了多种情况,可以用来描述各种基本信号,在信号分析中是一种非常重要的基本信号。

根据欧拉公式:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (2-17)$$

或

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \quad (2-18)$$

$$\sin \omega t = \frac{j}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \quad (2-19)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$

将式 2-18、式 2-19 代入式 2-8 得:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}(e^{-jn\omega t} + e^{jn\omega t}) + \frac{jb_n}{2}(e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t}) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right] \end{aligned} \quad (2-20)$$

令

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (2-21)$$

则

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-22)$$

因当 $n=0$ 时 $e^{jn\omega t} = 1$

所以

$$c_0 = c_n e^{jn\omega t} |_{n=0}$$

则式 2-22 可写成:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (2-23)$$

这便是傅里叶级数的复指数函数形式, 式中的系数 c_n , 可将式 2-9 代入式 2-21 求出:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (2-24)$$

c_n 是一个复数, 可以写成实部和虚部之和:

$$c_n = R_n e^{j\varphi_n} + j I_n e^{j\varphi_n} = |C_n| e^{j\varphi_n} \quad (2-25)$$

$$\text{其中 } |C_n| = \sqrt{R_n^2 + I_n^2} \quad (2-26)$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{I_n c_n}{R_n c_n} \quad (2-27)$$

模 $|C_n|$ 代表了该次谐波的幅值, φ_n 代表了该次谐波的相位。 C_n 将该周期函数各次谐波的幅值和相位全部包含在内了, C_n 就是周期函数的频谱函数, 它与三角函数展开式各参数的关系为:

$$C_0 = a_0$$

$$R_n c_n = \frac{1}{2} a_n$$

$$-I_n c_n = \frac{1}{2} b_n$$

$$|C_n| = \frac{1}{2} A_n$$

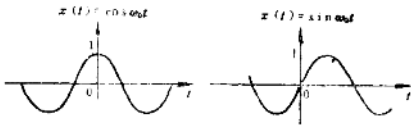
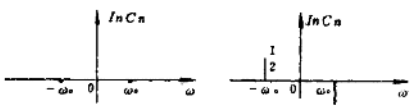
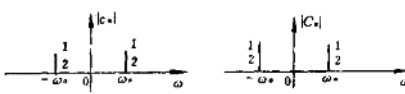
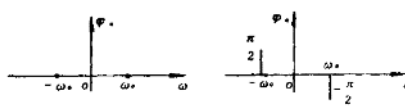
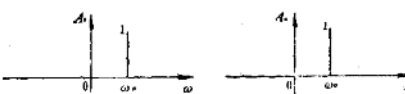
傅里叶级数的三角函数展开式是用正(余)弦作基本函数族, 而复指数形式的表达式是用 $e^{jn\omega_0 t}$ 作基本函数族, 二者之间的关系由欧拉公式表示。单项的正(余)弦信号在变复指数表达式时变成了两项, 而引入一个 $-n\omega_0$, 原来正(余)弦函数仅在 $n\omega_0$ 处有一根谱线, 现在变成了在 $n\omega_0$ 和 $-n\omega_0$ 两处各有一根谱线, 其幅值为原幅值的一半。所以称三角函数展开式的频谱为单边频谱, 而用复指数形式展开所得的频谱为双边频谱。

表 2-2 列出了正余弦函数的实、虚部频谱图(单、双边频谱)。根据欧拉公式 2-17、2-18 可知余弦函数只有实频谱, 正弦函数只有虚频谱, 且其实频谱总是偶对称的, 虚频谱总是奇对称的。

综上所述周期信号的频谱具有以下几个特点:

(1) 周期信号的频谱是离散的, 称离散性;

表 2-2 正弦函数频谱图

时域函数波形	
实频谱	
虚频谱	
双边幅值频谱	
双边相位频谱	
单边幅值频谱	

(2) 每条谱线只出现在与基波频率成整数倍的位置, 此特性称谐波性。

(3) 周期信号的幅值频谱具有收敛性, 即各次谐波的幅值随谐波次数的增高而减小。因此, 在频谱分析中可以不考虑一些高次谐波分量的影响。