



高等学校教材

电力系统分析

上册

东南大学 诸骏伟 主编



高 等 学 校 教 材

电 力 系 统 分 析

上 册

东南大学 诸骏伟 主编

中国电力出版社

内 容 提 要

《电力系统分析》分上、下两册，其中上册由东南大学诸骏伟主编，主要介绍电力系统稳态分析和复杂故障分析；下册由西安交通大学夏道止主编，主要介绍电力系统暂态过程分析。

本书为《电力系统分析》上册，共分四章：第一章讲述电力系统潮流计算，除了各种常规潮流算法外，还介绍电力系统最优潮流及交直流系统潮流计算。第二章讲述电力系统状态估计，包括各种估计算法，坏数据的检测和识别以及网络拓扑分析、网络结构辨识。第三章讲述电力系统静态安全分析，包括电力系统静态等值，预想事故评定及预想事故自动选择。第四章讲述电力系统复杂故障分析。

本书作为高等学校电力系统及其自动化专业研究生教材，也可作为高等学校电力系统及其自动化专业本科生和电力工程技术人员的参考书籍。

图书在版编目 (CIP) 数据

电力系统分析 上册/诸骏伟主编. -北京: 中国电力出版社, 1995. 11 (1998 重印)

高等学校教材

ISBN 7-80125-598-4

I. 电… I. 诸… III. 电力系统-分析-高等学校-教材 IV. TM711

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 01229 号

中国电力出版社出版

(北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>)

北京密云红光印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

1995 年 11 月第一版 1998 年 9 月北京第二次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 11.375 印张 256 千字

前 言

本书为高等学校电力系统及其自动化专业研究生硕士学位课程“电力系统分析”的教材,是在1989年春全国高校电力工程类专业教学委员会电力系统教学组会议上决定编写的,并于同年秋由本教学组组织会议通过了本书编写大纲。

该书分为上下两册,分别由东南大学及西安交通大学承担编写任务,本书是上册,内容侧重于电力系统稳态分析。

全书共分四章,其中第一章介绍电力系统潮流计算。潮流计算是电力系统稳态分析的基本内容,因而也是本书中篇幅最长的一章。本章除了详细介绍电力系统常规潮流的各种计算方法之外,对于近年来日益受到重视的最优潮流问题以及正在不断增多的交直流系统的潮流计算也作了比较详细的论述。

第二章及第三章涉及与电力系统安全监控有关的内容。目前在电力系统中建立以计算机为基础的能量管理系统(EMS)已是一个普遍趋势,EMS的运转有赖于一个可靠而完整的实时数据库。本书第二章介绍电力系统状态估计,内容包括各种估计算法、不良数据的检测与识别,最后简略地介绍电力系统网络拓扑分析和网络结构辨识。

第三章介绍电力系统静态安全分析。为了加强电力系统的安全性,在已经普遍建立的SCADA的基础上,实现安全分析功能已是一个必然趋势。本章介绍电力系统静态等值、预想事故评定及预想事故自动选择。

第四章介绍电力系统复杂故障分析。故障过程原是一个暂态过程,但对于仅着眼于研究其中某一个瞬间的周期性分量的实用计算来说,仍可以归之为一个稳态分析范畴的问题。本章主要介绍使用对称分量法计算电力系统复杂故障的方法。但是为了给读者提供一个研究故障暂态过程的基础,特增加了可用于研究故障暂态过程的各种坐标变换的介绍。

作为一本研究生教材,本书在内容安排上注意了和大学本科课程的衔接。在内容叙述时力求讲清基本概念,并适当介绍有关课题的最新进展及发展方向。

本书第一章由诸骏伟编写,第二、第三章由单渊达编写,第四章由陈珩编写。全书由诸骏伟任主编。

本书初稿蒙上海交通大学吴际舜教授主审,廖培鸿和黄家裕两位教授也分别审稿第二、四章,他们均提出了不少宝贵的意见和建议,得益匪浅,在此深表谢意。

由于编者水平有限,书中有错误和不妥之处,请广大读者批评指正。

编 者

1994年12月

目 录

前 言

第一章 电力系统潮流计算	1
第一节 概述	1
第二节 潮流计算问题的数学模型	2
第三节 高斯—塞德尔法	4
第四节 牛顿—拉夫逊法	6
第五节 快速解耦法	12
第六节 保留非线性潮流算法	18
第七节 最小化潮流算法	33
第八节 潮流计算中的自动调整	38
第九节 最优潮流问题	44
第十节 交直流电力系统的潮流计算	60
第十一节 几种特殊性质的潮流计算问题简介	70
后记	73
第二章 电力系统状态估计	74
第一节 概述	74
第二节 电力系统运行状态的表征与可观察性	76
第三节 最小二乘估计	79
第四节 静态最小二乘估计的改进	85
第五节 支路潮流状态估计法	92
第六节 电力系统的递推状态估计	98
第七节 不良数据的检测	101
第八节 不良数据的残差搜索辨识法	105
第九节 不良数据的估计辨识法	108
第十节 电力系统网络拓扑分析及网络结构辨识的基本概念	109
后记	111
第三章 电力系统静态安全分析	113
第一节 概述	113
第二节 电力系统静态等值	115
第三节 基本节点与基本支路	124
第四节 支路开断模拟	125
第五节 发电机开断模拟	134
第六节 预想事故的自动选择	138
后记	143

第四章 电力系统复杂故障分析.....	145
第一节 用于故障分析的坐标变换	145
第二节 简单故障的再分析	154
第三节 用于故障分析的两端口网络方程	159
第四节 复杂故障分析	163
后记	171
参考文献	173

第一章 电力系统潮流计算

第一节 概 述

作为研究电力系统稳态运行情况的一种基本电气计算，电力系统常规潮流计算的任务是根据给定的网络结构及运行条件，求出整个网络的运行状态，其中包括各母线的电压、网络中的功率分布以及功率损耗等等。

潮流计算的结果，无论是对于现有系统运行方式的分析研究，还是对规划中供电方案的分析比较，都是必不可少的。它为判别这些运行方式及规划设计方案的合理性、安全性和经济性提供了定量分析的依据。

此外，在进行电力系统的静态及暂态稳定计算时，要利用潮流计算的结果作为其计算的基础；一些故障分析以及优化计算也需要有相应的潮流计算作配合；潮流计算往往成为上述计算程序的一个组成部分。以上这些，主要是在系统规划设计及运行方式分析安排中的应用，属于离线计算的范畴。

随着现代化的调度控制中心的建立，为了对电力系统进行实时安全监控，需要根据实时数据库所提供的信息，随时判断系统当前的运行状态并对预想事故进行安全分析，这就需要进行广泛的潮流计算，并且对计算速度等还提出了更高的要求，从而产生了潮流的在线计算。

由上可见，潮流计算是电力系统中应用最为广泛、最基本和最重要的一种电气计算。

潮流计算问题在数学上一般是属于多元非线性代数方程组的求解问题，必须采用迭代计算方法。

自从 50 年代中期开始利用电子计算机进行潮流计算以来，潮流计算是电力系统各种问题中投入研究力量最多的领域之一，出现了大量的研究成果。这些成果除了开拓了各种特殊性质的潮流计算问题之外，更多的是属于为了提高计算性能而陆续提出的各种具体算法。

对于一个潮流算法，其基本要求可归纳成以下四个方面^[1]：

- (1) 计算速度；
- (2) 计算机内存占用量；
- (3) 算法的收敛可靠性；
- (4) 程序设计的方便性以及算法扩充移植等的通用灵活性。

这四点要求也成为本章后面评价各种潮流算法性能时所依据的主要标准。

本章在对潮流计算问题的数学模型进行简单的回顾以后，将首先转入三种最基本的潮流算法：高斯—塞德尔法、牛顿法和快速解耦法的讨论。这三种算法的基本原理在大学本科的《电力系统分析》教材^[2,3]中已作过介绍，但鉴于这些方法的重要性，将在大学本科《电力系统分析》教材的基础上作进一步的讨论。

牛顿法的特点是将非线性方程线性化。70年代后期,有人提出采用更精确的模型,即将泰勒级数的高阶项也包括进来,希望以此提高算法的性能,这便产生了保留非线性的潮流算法。另外,为了解决病态潮流计算,出现了将潮流计算表示为一个无约束非线性规划问题的模型,并称之为最小化潮流算法。本章第六、七两节将分别介绍这两类算法。

一些实际用于生产的潮流程序往往在上述基本潮流的框架内再加入模拟实际系统运行控制特点的自动调整计算功能,这部分内容将在本章第八节中予以介绍。

60年代中期,结合电力系统经济调度工作的开展,针对经典的经济调度方法的不足,开辟了一个新的研究领域,称之为最优潮流问题。这种以非线性规划作为计算模型的潮流问题能够统筹兼顾电力系统的经济性、安全性和电能质量,因而受到很大的重视,发展很快,其应用领域正在不断扩大。我们将在本章第九节中以较大的篇幅讨论这种潮流问题。

和交流输电比较,直流输电具有不少固有的特点。70年代以后,随着晶闸管(可控硅)换流器的问世,促进了直流输电的迅速发展,一批批新的线路正在建设或已经投运,我国也已经建成了葛洲坝—上海高压直流 $\pm 500\text{kV}$ 输电工程,因此研究交直流系统的潮流计算就成为十分必要,这方面的内容将在本章第十节中详细讨论。

最后,本章第十一节将简单介绍几种特殊用途的潮流计算问题。

以上是在本章内将要讨论的主要内容。

第二节 潮流计算问题的数学模型

电力系统是由发电机、变压器、输电线路及负荷等组成,其中发电机及负荷是非线性元件,但在进行潮流计算时,一般可用接在相应节点上的一个电流注入量来代表。因此潮流计算所用的电力网络系由变压器、输电线路、电容器、电抗器等静止线性元件所构成,并用集中参数表示的串联或并联等值支路来模拟。结合电力系统的特点,对这样的线性网络进行分析,普遍采用的是节点法,节点电压与节点电流之间的关系为

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}} \quad (1-1)$$

$$\text{或} \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}} \quad (1-2)$$

其展开式分别为

$$\dot{I}_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \dot{U}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-3)$$

$$\dot{U}_i = \sum_{j=1}^n Z_{ij} \dot{I}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

上四式中: $\mathbf{Y}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 Y_{ij} 、 Z_{ij} 分别为节点导纳矩阵、节点阻抗矩阵及其相应的元素; n 为电力系统节点数。

但是在工程实际中,已知的节点注入量往往不是节点电流而是节点功率,为此必须应用联系节点电流和节点功率的关系式

$$\dot{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-5)$$

将上式代入式 (1-3)、式 (1-4) 得到

$$\frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i} = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \dot{U}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-6)$$

$$\text{或} \quad \dot{U}_i = \sum_{j=1}^n Z_{ij} \frac{P_j - jQ_j}{\dot{U}_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-7)$$

这就是潮流计算问题最基本的方程式，是一个以节点电压 $\dot{U}$ 为变量的非线性代数方程组。由此可见，采用节点功率作为节点注入量是造成方程组呈非线性的根本原因。由于方程组为非线性的，因此必须采用数值计算方法、通过迭代来求解。而根据在计算中对这个方程组的不同应用和处理，就形成了不同的潮流算法。

对于电力系统中的每个节点，要确定其运行状态，需要有四个变量：有功注入 P 、无功注入 Q 、电压模值 U 及电压相角 θ 。 n 个节点总共有 $4n$ 个运行变量要确定。再观察式 (1-6) 或式 (1-7)，总共包括 n 个复数方程式，如果将实部与虚部分开，则形成 $2n$ 个实数方程式，由此仅可以解得 $2n$ 个未知运行变量。为此在计算潮流以前，必须将另外 $2n$ 个变量作为已知量而预先给以指定。也即对每个节点，要给定其两个变量的值作为已知条件，而另两个变量作为待求量。

按照电力系统的实际运行条件，根据预先给定的变量的不同，电力系统中的节点又可分成 PQ 节点、 PV 节点及 $V\theta$ 节点或平衡节点三种类型。对应于这些节点，分别对其注入的有功、无功功率，有功功率及电压模值以及电压模值和相角加以指定；并且对平衡节点来说，其电压相角一般作为系统电压相角的基准（即 $\theta=0^\circ$ ）。

交流电力系统中的复数电压变量可以用两种坐标形式来表示

$$\dot{U}_i = U_i e^{j\theta_i} \quad (1-8)$$

$$\text{或} \quad \dot{U}_i = e_i + jf_i \quad (1-9)$$

而复数导纳为

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad (1-10)$$

将式 (1-8)、式 (1-9) 以及式 (1-10) 代入以导纳矩阵为基础的式 (1-6)，并将实部与虚部分开，可得到以下两种形式的潮流方程。

潮流方程的直角坐标形式为

$$P_i = e_i \sum_{j \in i} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) + f_i \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \quad (1-11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$Q_i = f_i \sum_{j \in i} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - e_i \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \quad (1-12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

潮流方程的极坐标形式为

$$P_i = U_i \sum_{j \in i} U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (1-13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$Q_i = U_i \sum_{j \in i} U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (1-14)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

以上各式中, $j \in i$ 表示 Σ 号后的标号为 j 的节点必须直接和节点 i 相联, 并包括 $j=i$ 的情况。这两种形式的潮流方程通称为节点功率方程, 是牛顿—拉夫逊法等潮流算法所采用的主要数学模型。

对于以上潮流方程中的有关运行变量, 还可以按其性质的不同再加以分类, 这对于进行例如灵敏度分析以及最优潮流的研究等, 都是比较方便的。

每个节点的注入功率是该节点的电源输入功率 P_{Gi} 、 Q_{Gi} 和负荷需求功率 P_{Li} 、 Q_{Li} 的代数和。负荷需求的功率取决于用户, 是无法控制的, 所以称之为不可控变量或扰动变量。而某个电源所发的有功、无功功率则是可以由运行人员控制或改变的变量, 是自变量或称为控制变量。至于各个节点的电压模值或相角, 则属于随着控制变量的改变而变化的因变量或状态变量; 当系统中各个节点的电压模值及相角都知道以后, 则整个系统的运行状态也就完全确定了。若以 p 、 u 、 x 分别表示扰动变量、控制变量、状态变量, 则潮流方程可以用更简洁的方式表示为

$$f(x, u, p) = 0 \quad (1-15)$$

根据式 (1-15), 潮流计算的含义就是针对某个扰动变量 p , 根据给定的控制变量 u , 求出相应的状态变量 x 。

第三节 高斯—塞德尔法

以导纳矩阵为基础, 并应用高斯—塞德尔迭代的算法是在电力系统中最早得到应用的潮流计算方法。

首先研究算法的基本构成, 并讨论最简单的情况, 即电力系统中除平衡节点外, 其余都属于 PQ 节点。

由式 (1-6) 可以得到

$$\dot{U}_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i^* - jQ_i^*}{\dot{U}_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} \dot{U}_j \right] \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (1-16)$$

式中： P_i 、 Q_i 为节点给定的注入有功、无功功率。

假定节点 1 为平衡节点，其给定电压为 $\dot{U}_1$ 。平衡节点不参加迭代。于是对应于这种情况的高斯—塞德尔迭代格式为

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i^{(k)}} - Y_{i1}\dot{U}_1 - \left(\sum_{j=2}^{i-1} Y_{ij}\dot{U}_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n Y_{ij}\dot{U}_j^{(k)} \right) \right] \quad (1-17)$$

$(i = 2, 3, \dots, n)$

上式是该算法的最基本的迭代计算公式。从一组假定的 $\dot{U}_i$ 初值出发，依次进行迭代计算，迭代收敛的判据是

$$\max_i |\dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)}| < \varepsilon \quad (1-18)$$

式中： k 为迭代次数。当系统存在 PV 节点时，对应于这类节点的迭代计算过程稍有不同，详细介绍可阅参考文献 [2]，此处不再赘述。

以下着重对算法的计算性能和特点加以讨论。

本算法的突出优点是原理简单，程序设计十分容易。导纳矩阵是一个对称且高度稀疏的矩阵，因此占用内存非常节省。

根据式 (1-17)，可以对这个算法每次迭代所需的计算量加以估计。由于一般电力网络每个节点都平均只和 2~4 个相邻节点相联，相应的节点导纳矩阵每行的非零非对角元个数也是如此，于是式 (1-17) 中圆括号内所包括的累加项数目也只有 2~4 项，因而计算量很小。就每次迭代所需的计算量而言，是各种潮流算法中最小的，并且和网络所包含的节点数成正比关系。

本算法的主要缺点是收敛速度很慢。因为根据上述迭代计算公式，各节点电压在数学上是松散耦合的，也即经过一次迭代，每个节点电压值的改进只能影响到和这个节点直接相联的少数几个节点电压的修正，所以节点电压向最后收敛解点的接近非常缓慢。另外应值得注意的是，算法达到收敛所需的迭代次数与所计算网络的节点数目有密切的关系，迭代次数将随着所计算网络节点数的增加而直接上升，从而导致了计算量的急剧增加。因此在用于较大规模电力系统的潮流计算时，速度显得非常缓慢。

为提高算法收敛速度，常用的一种方法是在迭代过程中加入加速因子 α ，即取

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \dot{U}_i^{(k)} + \alpha(\dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)}) \quad (1-19)$$

式中： $\dot{U}_i^{(k+1)}$ 是通过式 (1-17) 求得的节点 i 电压的第 $(k+1)$ 次迭代值； $\dot{U}_i^{(k+1)}$ 则是实际采用的节点 i 电压的第 $(k+1)$ 次迭代值； α 为加速因子，一般取 $1 < \alpha < 2$ 。

采用这个算法的另一个重要限制是对于某些具有下述所谓病态条件的系统^[4]，计算往往会发生收敛困难：

- (1) 节点间相位角差很大的重负荷系统；
- (2) 包含有负电抗支路（如某些三绕组变压器或线路串联电容等）的系统；
- (3) 具有较长的辐射形线路的系统；

(4) 长线路与短线路接在同一节点上，而且长短线路的长度比值又很大的系统。

此外，平衡节点所在位置的不同选择，也会影响到收敛性能。

为了克服基于节点导纳矩阵的高斯—塞德尔迭代法的这些缺点，60年代初提出了基于节点阻抗矩阵的高斯—塞德尔迭代法。这里为了对其计算性能进行讨论，仅列出系统中除平衡节点（设为节点1）外，其余都属PQ节点的最简单情况的迭代公式，至于其完整的算法可参考文献[5]。上述最简单情况的迭代公式为

$$\dot{I}_j^{(k)} = \frac{P_j - jQ_j}{\dot{U}_j^{(k)*}} \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (1-20)$$

$$\dot{U}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} Z_{ij} \dot{I}_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n Z_{ij} \dot{I}_j^{(k-1)} \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (1-21)$$

式中，平衡节点的电流不能用式（1-20）进行计算，具体计算方法也见参考文献[5]，在此不赘述。

由于节点阻抗矩阵是一个满阵，在迭代公式（1-21）中，每个节点电压与网络中所有节点的电流都有关联，在迭代过程中，某个节点的电压的改进会对所有节点的电压改进作出贡献，因而这种算法的收敛速度比较快。其达到收敛所需的迭代次数与所计算网络的节点数关系不大，并且对上述的病态条件也并不那么敏感。这种算法的主要缺点是阻抗矩阵所占用的内存量大，而且阻抗法每迭代一次都要顺次取出阻抗矩阵中的每一个元素进行运算，因此每次迭代的计算量很大，随着系统规模的扩大，这些缺点就更加突出。故而在牛顿法潮流出现后，即很少再被使用。

目前基于节点导纳矩阵的高斯—塞德尔法在一定的场合下仍在使用，例如所计算的网路规模很小而可用的计算机内存又非常少的情况；另外，有一些算法如牛顿法等对于待求量的迭代初始估计值要求比较高，在本算法不发散的情况下可以作为提供较好初值的一个手段，一般只需迭代1~2次就可以满足要求。

第四节 牛顿—拉夫逊法^[6]

一、牛顿—拉夫逊法的一般概念

牛顿—拉夫逊法（简称牛顿法）在数学上是求解非线性代数方程式的有效方法。其要点是把非线性方程式的求解过程变成反复地对相应的线性方程式进行求解的过程，即通常所称的逐次线性化过程。

对于非线性代数方程组

$$f(x) = 0 \quad (1-22)$$

即

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-23)$$

在待求量 x 的某一个初始估计值 $x^{(0)}$ 附近，将上式展开成泰勒级数并略去二阶及以上的高阶项，得到如下的经线性化的方程组

$$f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = 0 \quad (1-24)$$

上式称之为牛顿法的修正方程式。由此可以求得第一次迭代的修正量

$$\Delta x^{(0)} = -[f'(x^{(0)})]^{-1}f(x^{(0)}) \quad (1-25)$$

将 $\Delta x^{(0)}$ 和 $x^{(0)}$ 相加, 得到变量的第一次改进值 $x^{(1)}$ 。接着就从 $x^{(1)}$ 出发, 重复上述计算过程。因此从一定的初值 $x^{(0)}$ 出发, 应用牛顿法求解的迭代格式为

$$f'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}) \quad (1-26)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (1-27)$$

上两式中: $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 对于变量 x 的一阶偏导数矩阵, 即雅可比矩阵 J ; k 为迭代次数。

由式 (1-26) 和式 (1-27) 可见, 牛顿法的核心便是反复形成并求解修正方程式。牛顿法当初始估计值 $x^{(0)}$ 和方程的精确解足够接近时, 收敛速度非常快, 具有平方收敛特性。

二、牛顿潮流算法的修正方程式

在将牛顿法用于求解电力系统潮流计算问题时, 由于所采用 $f(x)$ 的数学表达式以及复数电压变量采用的坐标形式的不同, 可以形成牛顿潮流算法的不同形式。

以下讨论用得最为广泛的 $f(x)$ 采用功率方程式模型^①, 而电压变量则分别采用极坐标和直角坐标的两种形式。

(一) 极坐标形式

令 $\dot{U}_i = U_i \angle \theta_i$, 则采用极坐标形式的潮流方程是:

对每个 PQ 节点及 PV 节点, 根据式 (1-13), 有

$$P_i^s - U_i \sum_{j \in i} U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) = \Delta P_i = 0 \quad (1-28)$$

对每个 PQ 节点, 根据式 (1-14), 有

$$Q_i^s - U_i \sum_{j \in i} U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) = \Delta Q_i = 0 \quad (1-29)$$

将上述方程式在某个近似解附近用泰勒级数展开, 并略去二阶及以上的高阶项后, 得到以矩阵形式表示的修正方程式为

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ n-m-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta U/U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-m-1 \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

式中: n 为节点总数; m 为 PV 节点数, 雅可比矩阵是 $(2n-m-2)$ 阶非奇异方阵。

雅可比矩阵各元素的表示式如下

^① 也有 $f(x)$ 采用电流方程式模型的算法, 见参考文献[7、8]。

$$H_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} -U_i U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) & (j \neq i) \\ U_i^2 B_{ii} + Q_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-31)$$

$$N_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial U_j} \cdot U_j = \begin{cases} -U_i U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) & (j \neq i) \\ -U_i^2 G_{ii} - P_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-33)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} U_i U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) & (j \neq i) \\ U_i^2 G_{ii} - P_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-35)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial U_j} U_j = \begin{cases} -U_i U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) & (j \neq i) \\ U_i^2 B_{ii} - Q_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-37)$$

(二) 直角坐标形式

令 $\dot{U}_i = ei + jf_i$, 在这里, 潮流方程的组成与上不同, 对每个节点, 都有二个方程式, 所以在不计入平衡节点方程式的情况下, 总共有 $2(n-1)$ 个方程式。

对每个 PQ 节点, 根据式 (1-11) 和式 (1-12) 有

$$P_i - \sum_{j \in i} [e_i (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) + f_i (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j)] = \Delta P_i = 0 \quad (1-39)$$

$$Q_i - \sum_{j \in i} [f_i (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - e_i (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j)] = \Delta Q_i = 0 \quad (1-40)$$

对每个 PV 节点, 除了有与式 (1-39) 相同的有功功率方程式之外, 还有

$$(U_i^s)^2 - (e_i^2 + f_i^2) = \Delta U_i^2 = 0 \quad (1-41)$$

采用直角坐标形式的修正方程式为

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ n-m-1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta U^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} \quad (1-42)$$

雅可比矩阵各元素的表示式如下

$$H_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} -(G_{ij} e_i + B_{ij} f_i) & (j \neq i) \\ - \sum_{j \in i} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) - G_{ii} e_i - B_{ii} f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-43)$$

$$N_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial U_j} = \begin{cases} B_{ij} e_i - G_{ij} f_i & (j \neq i) \\ - \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) + B_{ii} e_i - G_{ii} f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-44)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} B_{ij} e_i - G_{ij} f_i & (j \neq i) \\ - \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) + B_{ii} e_i - G_{ii} f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-45)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial U_j} = \begin{cases} B_{ij} e_i - G_{ij} f_i & (j \neq i) \\ - \sum_{j \in i} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) + B_{ii} e_i - G_{ii} f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-46)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial e_j} = \begin{cases} B_{ij}e_i - G_{ij}f_i & (j \neq i) \\ \sum_{j \in i} (G_{ij}f_j - B_{ij}e_j) + B_{ii}e_i - G_{ii}f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-47)$$

$$(1-48)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial f_j} = \begin{cases} G_{ij}e_i + B_{ij}f_i & (j \neq i) \\ - \sum_{j \in i} (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + G_{ii}e_i + B_{ii}f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-49)$$

$$(1-50)$$

$$R_{ij} = \frac{\partial \Delta U_i^2}{\partial e_j} = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ -2e_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-51)$$

$$(1-52)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial \Delta U_i^2}{\partial f_j} = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ -2f_i & (j = i) \end{cases} \quad (1-53)$$

$$(1-54)$$

仔细分析以上两种类型的修正方程式，可以看出两者具有以下共同特点。

(1) 修正方程式的数目分别为 $2(n-1) - m$ 及 $2(n-1)$ 个，在 PV 节点所占比例不大时，两者的方程式数目基本接近 $2(n-1)$ 个。

(2) 雅可比矩阵的元素都是节点电压的函数，每次迭代，雅可比矩阵都需要重新形成。

(3) 分析雅可比矩阵的非对角元素的表示式可见，某个非对角元素是否为零决定于相应的节点导纳矩阵元素 Y_{ij} 是否为零。因此如将修正方程式按节点号的次序排列，并将雅可比矩阵分块，把每个 2×2 阶子阵如 $\begin{bmatrix} H_{ij} & N_{ij} \\ M_{ij} & L_{ij} \end{bmatrix}$ 等作为分块矩阵的元素，则按节点号顺序而构成的分块雅可比矩阵将和节点导纳矩阵具有同样的稀疏结构，是一个高度稀疏的矩阵。

(4) 和节点导纳矩阵具有相同稀疏结构的分块雅可比矩阵在位置上对称，但由于 $H_{ij} \neq H_{ji}$ 、 $N_{ij} \neq N_{ji}$ 、 $M_{ij} \neq M_{ji}$ 、 $L_{ij} \neq L_{ji}$ 等，所以雅可比矩阵不是对称阵。

复习并分析这些特点非常重要，因为正是修正方程式的这些特点决定了牛顿法潮流程序的主要轮廓及程序特色。

三、修正方程式的处理和求解

在本节的开头就已提到，牛顿算法的核心就是反复形成并求解修正方程式。因此如何有效地处理修正方程式就成为提高牛顿法潮流程序计算速度并降低内存需量的关键所在。

从算法的发展过程来看，在 50 年代末就已经提出了牛顿法潮流的雏形。当时先是用迭代法求解修正方程式，但遇到迭代法本身不收敛的问题。以后改用高斯消去法等直接法求解，但如前所分析，修正方程式的数目在 $2(n-1)$ 左右，如果不利用雅可比矩阵的稀疏特性，当网络节点数增加为 N 倍，存储雅可比矩阵的内存量将正比于 N^2 倍和利用直接法求解修正方程的计算量将正比于 N^3 倍地增长。这就限制了牛顿法潮流程序的解题规模，从而使得这种方法的推广应用一度止步不前。其后正是人们注意到了雅可比矩阵高度稀疏的特点，求解修正方程式时采用了稀疏程序设计技巧，并且发展了一套在消元过程中旨在尽量保持其稀疏性、以减少内存需量并提高计算速度的有效方法（即著名的最优顺序消去法^[9]），