



# 第一篇 数值计算

## 第一章 插 值

### 1.1 一元全区间不等距插值

#### 一、功能

给定  $n$  个不等距结点  $x_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $y_i=f(x_i)$ , 用拉格朗日 (Lagrange) 插值公式, 计算指定插值点  $t$  处的函数近似值  $z=f(t)$ 。

#### 二、方法说明

为了避免龙格 (Runge) 现象对计算结果的影响, 在  $n$  个结点中自动选择八个结点进行插值, 且使指定插值点  $t$  位于它们的中间。即选取满足  $x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < t < x_{k+4} < x_{k+5} < x_{k+6} < x_{k+7}$  的八个结点, 利用七次拉格朗日插值多项式计算插值点  $t$  处的函数近似值  $z=f(t)$ , 即

$$z = \sum_{i=k}^{k+7} y_i \prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{k+7} [(t - x_j) / (x_i - x_j)]$$

当插值点  $t$  位于包含  $n$  个结点的区间外时, 将仅取区间某端的四个结点进行插值; 而当插值点  $t$  靠近  $n$  个结点的两端时, 选取的结点数将少于八个。

#### 三、函数语句

double aalgrg(x,y,n,t)

#### 四、形参说明

$x$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个结点的值  $x_i$ , 要求  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ 。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放  $n$  个给定结点上的函数值  $y_i=f(x_i)$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ )。

$n$ ——整型变量。给定结点的个数。

$t$ ——双精度实型变量。存放指定插值点的值。

#### 五、函数程序 (文件名: aalgrg.c)

```
double aalgrg(x,y,n,t)
```

```
int n;
```

```

double t,x[],y[];
{ int i,j,k,m;
  double z,s;
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0];return(z);}
  if (n==2)
    { z=(y[0]*(t-x[1])-y[1]*(t-x[0]))/(x[0]-x[1]);
      return(z);
    }
  i=0;
  while ((x[i]<t)&&(i<n)) i=i+1;
  k=i-4;
  if (k<0) k=0;
  m=i+3;
  if (m>n-1) m=n-1;
  for (i=k;i<=m;i++)
    { s=1.0;
      for (j=k;j<=m;j++)
        if (j!=i) s=s*(t-x[j])/(x[i]-x[j]);
      z=z+s*y[i];
    }
  return(z);
}

```

六、例：已知一元不等距列表函数如下：

| $i$   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_i$ | 0.10     | 0.15     | 0.25     | 0.40     | 0.50     |
| $y_i$ | 0.904837 | 0.860708 | 0.778801 | 0.670320 | 0.606531 |
| $i$   | 6        | 7        | 8        | 9        | 10       |
| $x_i$ | 0.57     | 0.70     | 0.85     | 0.93     | 1.00     |
| $y_i$ | 0.565525 | 0.496585 | 0.427415 | 0.394554 | 0.367879 |

表中各函数值  $y_i$  具有六位有效数字，利用拉格朗日插值公式计算插值点  $t=0.63$  处的函数近似值。

主函数程序(文件名:aalgrg0.c)为：

```
#include "aalgrg.c"
```

```

#include "stdio.h"
main( )
{ double t,z;
  static double x[10]={0.10,0.15,0.25,0.40,0.50,0.57,0.70,0.85,
                      0.93,1.00};
  static double y[10]={0.904837,0.860708,0.778801,0.670320,0.606531,
                      0.565525,0.496585,0.427415,0.394554,0.367879};
  t=0.63; z=aalgrg(x,y,10,t);
  printf("t=%6.3f,    z=%e\n",t,z);
}

```

运行结果为:  $t=0.630$ ,  $z=5.32591e-01$

## 1.2 一元全区间等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个等距结点  $x_i = x_0 + ih$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $y_i = f(x_i)$ , 用拉格朗日 (Lagrange) 插值公式, 计算指定插值点  $t$  处的函数近似值  $z = f(t)$ 。

### 二、方法说明

同1.1节

### 三、函数语句

```
double ablgrg(x0,h,n,y,t)
```

### 四、形参说明

$x_0$ ——双精度实型变量。等距结点中的第一个结点值。

$h$ ——双精度实型变量。等距结点的步长。

$n$ ——整型变量。等距结点的个数。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放  $n$  个等距结点上的函数值。

$t$ ——双精度实型变量。指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: ablgrg.c)

```

double ablgrg(x0,h,n,y,t)
int n;
double x0,h,t,y[ ];
{ int i,j,k,m;
  double z,s,xi,xj;
  float p,q;
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0]; return(z); }
  if (n==2)

```

```

    { z=(y[1]*(t-x0)-y[0]*(t-x0-h))/h; return(z);
    }
if (t>x0)
    { p=(t-x0)/h; i=(int)p; q=(float)i;
      if (p>q) i=i+1;
    }
else i=0;
k=i-4;
if (k<0) k=0;
m=i+3;
if (m>n-1) m=n-1;
for (i=k;i<=m;i++)
    { s=1.0; xi=x0+i*h;
      for (j=k; j<=m; j++)
          if (j!=i)
              { xj=x0+j*h;
                s=s*(t-xj)/(xi-xj);
              }
      z=z+s*y[i];
    }
return(z);
}

```

六、例：设函数  $y=e^{-x}$  的函数列表如下(函数值  $y_i$  具有六位有效数字)：

|       |          |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $i$   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
| $x_i$ | 0.1      | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      |
| $y_i$ | 0.904837 | 0.818731 | 0.740818 | 0.670320 | 0.606531 |
| $i$   | 6        | 7        | 8        | 9        | 10       |
| $x_i$ | 0.6      | 0.7      | 0.8      | 0.9      | 1.0      |
| $y_i$ | 0.548812 | 0.496585 | 0.449329 | 0.406570 | 0.367879 |

计算在插值点  $t=0.25, 0.63, 0.95$  处的函数近似值。

在利用本函数时,其中  $x_0=0.1, h=0.1, n=10$ 。

主函数程序(文件名: ablgrg.c)为:

```

#include "stdio.h"
#include "ablgrg.c"
main( )

```

```

{ double x0,h,t,z;
  static double y[10]={0.904837,0.818731,0.740818,0.670320,0.606531,
                        0.548812,0.496585,0.449329,0.406570,0.367879};
  x0=0.1; h=0.1;
  t=0.25; z=ablgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=0.63; z=ablgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=0.95; z=ablgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
}

```

运行结果为:

```

t=0.250,    z=7.78801e-01
t=0.630,    z=5.32592e-01
t=0.950,    z=3.86741e-01

```

### 1.3 一元三点不等距插值

#### 一、功能

给定  $n$  个不等距结点  $x_i$  ( $i=0,1,2,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $y_i=f(x_i)$ , 用抛物插值公式计算指定插值点  $t$  处的函数近似值  $z=f(t)$ 。

#### 二、方法说明

设  $n$  个不等距结点为  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ , 其相应的函数值为  $y_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ )。

为了计算指定插值点  $t$  处的函数近似值, 选取最靠近插值点  $t$  的三个结点, 即如果  $x_k < t < x_{k+1}$ , 则当  $|x_k - t| > |t - x_{k+1}|$  时, 取三个结点为  $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$ , 而当  $|x_k - t| < |t - x_{k+1}|$  时, 取三个结点为  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ , 然后用抛物插值公式计算  $t$  点的函数近似值, 即

$$z = \sum_{i=m}^{m+2} y_i \prod_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{m+2} [(t - x_j)/(x_i - x_j)]$$

其中:

当  $|x_k - t| > |t - x_{k+1}|$  时,  $m=k$ ;

当  $|x_k - t| < |t - x_{k+1}|$  时,  $m=k-1$ 。

如果插值点  $t$  位于包含  $n$  个结点的区间外, 则取区间某端的两个结点作线性插值。

#### 三、函数语句

```
double  aclgrg(x,y,n,t)
```

#### 四、形参说明

$x$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点的值。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点上的函数值。

$n$ ——整型变量。给定不等距结点的个数。

t——双精度实型变量。指定插值点的值。

## 五、函数程序(文件名: acldrg.c)

```
#include "math.h"
double acldrg(x,y,n,t)
int n;
double t,x[],y[];
{ int i,j,k,m;
  double z,s;
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0]; return(z); }
  if (n==2)
    { z=(y[0]*(t-x[1])-y[1]*(t-x[0]))/(x[0]-x[1]);
      return(z);
    }
  if (t<=x[1]) { k=0; m=2; }
  else if (t>=x[n-2]) { k=n-3; m=n-1; }
  else
    { k=1; m=n;
      while (m-k!=1)
        { i=(k+m)/2;
          if (t<x[i-1]) m=i;
          else k=i;
        }
      k=k-1; m=m-1;
      if (fabs(t-x[k])<fabs(t-x[m])) k=k-1;
      else m=m+1;
    }
  z=0.0;
  for (i=k; i<=m; i++)
    { s=1.0;
      for (j=k; j<=m; j++)
        if (j!=i) s=s*(t-x[j])/(x[i]-x[j]);
      z=z+s*y[i];
    }
  return(z);
}
```

六、例：设给定列表函数如下(其函数值精确到末位数字)：

|          |         |         |         |         |         |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x$      | 1.615   | 1.634   | 1.702   | 1.828   | 1.921   |
| $y=f(x)$ | 2.41450 | 2.46459 | 2.65271 | 3.03035 | 3.34066 |

用抛物插值法求  $f(x)$  在  $x=1.682, 1.813$  处的函数近似值。

主函数程序(文件名: aclgrg0.c)为

```
#include "stdio.h"
#include "aclgrg.c"
main( )
{ double t,z;
  static double x[5]={1.615,1.634,1.702,1.828,1.921};
  static double y[5]={2.41450,2.46459,2.65271,3.03035,3.34066};
  t=1.682; z=aclgrg(x,y,5,t);
  printf("x=%6.3f, f(x)=%e\n",t,z);
  t=1.813; z=aclgrg(x,y,5,t);
  printf("x=%6.3f, f(x)=%e\n",t,z);
}
```

运行结果为:

$x=1.682, \quad f(x)=2.59624e+00$

$x=1.813, \quad f(x)=2.98281e+00$

## 1.4 一元三点等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个等距结点  $x_i = x_0 + ih$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) 上的函数值  $y_i = f(x_i)$ , 用抛物插值公式计算指定插值点  $t$  处的函数近似值。

### 二、方法说明

同1.3节。

### 三、函数语句

```
double adlgrg(x0,h,n,y,t)
```

### 四、形参说明

$x_0$ ——双精度实型变量。给定  $n$  个等距结点中的第一个结点值。

$h$ ——双精度实型变量。给定  $n$  个等距结点的步长。

$n$ ——整型变量。给定等距结点的个数。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个等距结点上的函数值。

$t$ ——双精度实型变量。存放指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: adlgrg.c)

```
#include "math.h"
```



```

double adlgrg(x0,h,n,y,t)
int n;
double x0,h,t,y[ ];
{ int i,j,k,m;
  double z,s,xi,xj;
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0]; return(z); }
  if (n==2)
    { z=(y[1]*(t-x0)-y[0]*(t-x0-h))/h;
      return(z);
    }
  if (t<=x0+h) { k=0; m=2; }
  else if (t>=x0+(n-3)*h) { k=n-3; m=n-1; }
  else
    { i=(int)((t-x0)/h)+1;
      if (fabs(t-x0-i*h)>=fabs(t-x0-(i-1)*h))
        { k=i-2; m=i; }
      else { k=i-1; m=i+1; }
    }
  z=0.0;
  for (i=k;i<=m;i++)
    { s=1.0; xi=x0+i*h;
      for (j=k;j<=m;j++)
        if (j!=i)
          { xj=x0+j*h; s=s*(t-xj)/(xi-xj); }
      z=z+s*y[i];
    }
  return(z);
}

```

六、例：设函数  $f(x)=e^{-x}$  在10个等距结点上的函数值如下表(函数值具有六位有效数字)：

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x$      | 0.1      | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      |
| $e^{-x}$ | 0.904837 | 0.818731 | 0.740818 | 0.670320 | 0.606531 |
| $x$      | 0.6      | 0.7      | 0.8      | 0.9      | 1.0      |
| $e^{-x}$ | 0.548812 | 0.496585 | 0.449329 | 0.406570 | 0.367879 |

计算在插值点  $t=0.23, 0.63, 0.95$  处的函数近似值。

在利用本函数时,  $x_0=0.1, h=0.1, n=10$ 。

主函数程序(文件名: adlgrg0.c)为:

```
#include "stdio.h"
#include "adlgrg.c"
main( )
{ double t,z,x0,h;
  static double y[10]={0.904837,0.818731,0.740818,0.670320,0.606531,
                      0.548812,0.496585,0.449329,0.406570,0.367879};
  x0=0.1; h=0.1;
  t=0.23; z=adlgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=0.63; z=adlgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=0.95; z=adlgrg(x0,h,10,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
}
```

运行结果为:

$t=0.230, \quad z=7.94497e-01$

$t=0.630, \quad z=5.32567e-01$

$t=0.950, \quad z=3.86716e-01$

## 1.5 有理不等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个不等距结点  $x_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $y_i=f(x_i)$ , 利用有理插值法计算指定插值点  $t$  处的函数近似值。

### 二、方法说明

设给定的  $n$  个不等距结点为  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ , 相应的函数值为  $y_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ), 则可以构造一个  $n$  节连分式

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{x-x_0}{b_1} + \frac{x-x_1}{b_2} + \dots + \frac{x-x_{n-2}}{b_{n-1}}$$

其中常数项  $b_0$  及部分分母  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  由下列递推公式计算:

$$\varphi_0(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_{i+1}(x_j) = \frac{x_j - x_i}{\varphi_i(x_j) - \varphi_i(x_i)}, \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, n-2 \\ j = i+1, \dots, n-1 \end{matrix}$$

$$b_i = \varphi_i(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1$$

在实际进行插值计算时,一般在指定插值点  $t$  的前后各取四个结点就够了。此时,计算八节连分式的值  $\varphi(t)$  作为插值点  $t$  处的函数近似值。

### 三、函数语句

```
double aepq(x,y,n,t)
```

### 四、形参说明

$x$ ——双精度实型一维数组,长度为  $n$ 。存放给定的  $n$  个不等距结点值。

$y$ ——双精度实型一维数组,长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点上的函数值。

$n$ ——整型变量。给定不等距结点的个数。

$t$ ——双精度实型变量。指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: aepq.c)

```
#include "math.h"
double aepq(x,y,n,t)
int n;
double t,x[],y[];
{ int i,j,k,m,l;
  double z,h,b[8];
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0]; return(z); }
  if (n<=8) { k=0; m=n; }
  else if (t<x[4]) { k=0; m=8; }
  else if (t>x[n-5]) { k=n-8; m=8; }
  else
  { k=1; j=n;
    while (j-k!=1)
    { i=(k+j)/2;
      if (t<x[i-1]) j=i;
      else k=i;
    }
    k=k-4; m=8;
  }
  b[0]=y[k];
  for (i=2;i<=m;i++)
  { h=y[i+k-1]; l=0;
    for (j=1;j<=i-1;j++)
      if (l==0)
        { if (fabs(h-b[j-1])+1.0==1.0) l=l+1;
```

```

        else h=(x[i+k-1]-x[j+k-1])/(h-b[j-1]);
    }
    b[i-1]=h;
    if (l!=0) b[i-1]=1.0e+35;
}
z=b[m-1];
for (i=m-1;i>=1;i--) z=b[i-1]+(t-x[i+k-1])/z;
return(z);
}

```

六、例：设函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  的10个不等距结点处的函数值如下表(具有六位有效数字)：

|        |           |           |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | -1.00     | -0.80     | -0.65     | -0.40     | -0.30     |
| $f(x)$ | 0.0384615 | 0.0588236 | 0.0864865 | 0.200000  | 0.307692  |
| $x$    | 0.00      | 0.20      | 0.45      | 0.80      | 1.00      |
| $f(x)$ | 1.00000   | 0.500000  | 0.164948  | 0.0588236 | 0.0384615 |

利用有理插值计算  $t=-0.85$  及  $t=0.25$  处的函数近似值。

主函数程序(文件名：aepq0.c)为：

```

#include "stdio.h"
#include "aepq.c"
main( )
{ double t,z;
  static double x[10]={-1.0,-0.8,-0.65,-0.4,-0.3,
                      0.0,0.2,0.45,0.8,1.0};
  static double y[10]={0.0384615,0.0588236,0.0864865,0.2,0.307692,1.0,
                      0.5,0.164948,0.0588236,0.0384615};
  t=-0.85; z=aepq(x,y,10,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=0.25; z=aepq(x,y,10,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
}

```

运行结果为：

```

t=-0.850,    z=5.24591e-02
t=0.250,     z=3.90244e-01

```

## 1.6 有理等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个等距结点  $x_i = x_0 + ih$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) 上的函数值  $y_i = f(x_i)$ , 利用有理插值法计算指定插值点  $t$  处的函数近似值。

### 二、方法说明

同1.5节。

### 三、函数语句

```
double afpq(x0,h,n,y,t)
```

### 四、形参说明

$x_0$ ——双精度实型变量。 $n$  个等距结点中的第一个结点值。

$h$ ——双精度实型变量。 $n$  个等距结点的步长。

$n$ ——整型变量。给定等距结点的个数。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放  $n$  个等距结点上的函数值。

$t$ ——双精度实型变量。指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: afpq.c)

```
#include "math.h"
double afpq(x0,h,n,y,t)
int n;
double x0,h,t,y[ ];
{ int i,j,k,m,l;
  double z,hh,xi,xj,b[8];
  z=0.0;
  if (n<1) return(z);
  if (n==1) { z=y[0]; return(z); }
  if (n<=8) { k=0; m=n; }
  else if (t<(x0+4.0*h)) { k=0; m=8; }
  else if (t>(x0+(n-5)*h)) { k=n-8; m=8; }
  else { k=(int)((t-x0)/h)-3; m=8; }
  b[0]=y[k];
  for (i=2;i<=m;i++)
  { hh=y[i+k-1]; l=0;
    for (j=1;j<=i-1;j++)
      if (l==0)
        { if (fabs(hh-b[j-1])+1.0==1.0) l=l+1;
          else
            { xi=x0+(i+k-1)*h;
```

```

        xj=x0+(j+k-1)*h;
        hh=(xi-xj)/(hh-b[j-1]);
    }
}
b[i-1]=hh;
if (l!=0) b[i-1]=1.0e+35;
}
z=b[m-1];
for (i=m-1;i>=1;i--)
    z=b[i-1]+(t-(x0+(i+k-1)*h))/z;
return(z);
}

```

六、例：设函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  的11个等距结点上的函数值如下表(具有六位有效数字)：

|        |           |           |          |           |           |         |
|--------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|---------|
| $x$    | -1.00     | -0.80     | -0.60    | -0.40     | -0.20     | 0.00    |
| $f(x)$ | 0.0384615 | 0.0588236 | 0.100000 | 0.200000  | 0.500000  | 1.00000 |
| $x$    | 0.20      | 0.40      | 0.60     | 0.80      | 1.00      |         |
| $f(x)$ | 0.500000  | 0.200000  | 0.100000 | 0.0588236 | 0.0384615 |         |

利用有理插值法计算在插值点  $t = -0.75$  及  $t = -0.05$  处的函数近似值。

在利用本函数时,  $x_0 = -1.00, h = 0.20, n = 11$ 。

主函数程序(文件名: afpq0.c)为

```

#include "stdio.h"
#include "afpq.c"
main( )
{ double x0,h,t,z;
  static double y[11]={0.0384615,0.0588236,0.1,0.2,0.5,1.0,0.5,0.2,0.1,
    0.0588236,0.0384615};
  x0=-1.0; h=0.2;
  t=-0.75; z=afpq(x0,h,11,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
  t=-0.05; z=afpq(x0,h,11,y,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
}

```

运行结果为：

t=-0.750,      z=6.63901e-02

t=-0.050, z=9.41176e-01

## 1.7 埃尔米特不等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个不等距结点  $x_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $f(x_i)$  及一阶导数值  $f'(x_i)$ , 用埃尔米特(Hermite)插值公式计算指定插值点  $t$  处的函数近似值  $f(t)$ 。

### 二、方法说明

设函数  $f(x)$  在  $n$  个不等距结点  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$  上的函数值及一阶导数值分别为:

$$y_i = f(x_i), y'_i = f'(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1$$

则  $f(x)$  可用埃尔米特插值多项式

$$P_{2n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [y_i + (x - x_i)(y'_i - 2y_i l'_i(x_i))] l_i^2(x)$$

近似代替。其中:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} [(x - x_j)/(x_i - x_j)]$$
$$l'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_j}$$

在实际进行插值计算时,为了减少计算工作量,用户可以适当地将远离插值点的结点抛弃。通常,只需取插值点  $t$  的前后各四个结点就够了。

### 三、函数语句

double aghmt(x,y,dy,n,t)

### 四、形参说明

x——双精度实型一维数组,长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点的值。

y——双精度实型一维数组,长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点上的函数值。

dy——双精度实型一维数组,长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个不等距结点上的二阶导数值。

n——整型变量。给定的不等距结点数。

t——双精度实型变量。指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: aghmt.c)

```
double aghmt(x,y,dy,n,t)
```

```
int n;
```

```
double t,x[],y[],dy[];
```

```
{ int i,j;
```

```
double z,p,q,s;
```

```
z=0.0;
```

```
for (i=1;i<=n;i++)
```

```
{ s=1.0;
```

```
for (j=1;j<=n;j++)
```

```

        if (j!=i) s=s*(t-x[j-1])/(x[i-1]-x[j-1]);
        s=s*s;
        p=0.0;
        for (j=1;j<=n;j++)
            if (j!=i) p=p+1.0/(x[i-1]-x[j-1]);
        q=y[i-1]+(t-x[i-1])*(dy[i-1]-2.0*y[i-1]*p);
        z=z+q*s;
    }
    return(z);
}

```

六、例：设函数  $f(x)=e^{-x}$  在10个不等距结点上的函数值及一阶导数值如下表(具有六位有效数字)：

| $x$     | 0.10      | 0.15      | 0.30      | 0.45      | 0.55      |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$  | 0.904837  | 0.860708  | 0.740818  | 0.637628  | 0.576950  |
| $f'(x)$ | -0.904837 | -0.860708 | -0.740818 | -0.637628 | -0.576950 |
| $x$     | 0.60      | 0.70      | 0.85      | 0.90      | 1.00      |
| $f(x)$  | 0.548812  | 0.496585  | 0.427415  | 0.406570  | 0.367879  |
| $f'(x)$ | -0.548812 | -0.496585 | -0.427415 | -0.406570 | -0.367879 |

利用埃尔米特插值公式计算在插值点  $t=0.356$  处的函数近似值  $f(t)$ 。

主函数程序(文件名: aghmt0.c)为：

```

#include "stdio.h"
#include "aghmt.c"
main( )
{ int i;
  double t,z;
  static double x[10]={0.1,0.15,0.3,0.45,0.55,0.6,0.7,0.85,0.9,1.0};
  static double y[10]={0.904837,0.860708,0.740818,0.637628,0.576950,
                        0.548812,0.496585,0.427415,0.406570,0.367879};
  double dy[10];
  for (i=0;i<=9;i++) dy[i]=-y[i];
  t=0.356; z=aghmt(x,y,dy,10,t);
  printf("t=%6.3f, z=%e\n",t,z);
}

```

运行结果为：  $t=0.356$ ,  $z=7.00480e-01$



## 1.8 埃尔米特等距插值

### 一、功能

给定  $n$  个等距结点  $x_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 上的函数值  $f(x_i)$  及一阶导数值  $f'(x_i)$ , 利用埃尔米特(Hermite)插值公式计算指定插值点  $t$  处的函数近似值  $f(t)$ 。

### 二、方法说明

同1.7节。

### 三、函数语句

```
double ahhmt(x0,h,n,y,dy,t)
```

### 四、形参说明

$x_0$ ——双精度实型变量。给定  $n$  个等距结点中的第一个结点值。

$h$ ——双精度实型变量。给定  $n$  个等距结点的步长。

$n$ ——整型变量。给定等距结点的个数。

$y$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个等距结点上的函数值。

$dy$ ——双精度实型一维数组, 长度为  $n$ 。存放给定  $n$  个等距结点上的一阶导数值。

$t$ ——双精度实型变量。存放指定插值点的值。

### 五、函数程序(文件名: ahhmt.c)

```
double ahhmt(x0,h,n,y,dy,t)
int n;
double x0,h,t,y[],dy[];
{ int i,j;
  double z,s,p,q;
  z=0.0;
  for (i=1;i<=n;i++)
    { s=1.0; q=x0+(i-1)*h;
      for (j=1;j<=n;j++)
        { p=x0+(j-1)*h;
          if (j!=i) s=s*(t-p)/(q-p);
        }
      s=s*s;
      p=0.0;
      for (j=1;j<=n;j++)
        if (j!=i) p=p+1.0/(q-(x0+(j-1)*h));
      q=y[i-1]+(t-q)*(dy[i-1]-2.0*y[i-1]*p);
      z=z+q*s;
    }
  return(z);
}
```