中学数理化读物

数学习题集

（综合部分）

北京出版社

中学数理化读物

数 学 习 题 集

（综合习题）

《数学习题集》编写组

北 京 出 版 社

中学数理化读物

数学习题集

（综合习题）

《数学习题集》编写组

*

北京出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 4.25印张 84,000字

1979年9月第1版 1979年9月第1次印刷

印数 1—100,000

书号：7071·605 定价：0.31元

编 辑 说 明

为了帮助广大青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料以及习题集等不同种类的数学、物理、化学方面的书籍。

在编写时，注意从实际出发，参照中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学技术和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

目　　录

习　题

1. 若方程 $x^2-(m+2)x+m+7=0$ 的两根的平方和为某直角三角形斜边的平方，而此三边成等差数列，且其最短边为3，求m的值.
2. 已知三角形的三边成等差数列，周长为36厘米，面积为54平方厘米，求三边长.
3. 一个三角形的二边分别为5厘米和3厘米，其夹角的余弦为方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，求此三角形的面积.
4. 在$\triangle ABC$中，角B, A, C成等差数列，内切圆与BC切于D，且$BD=2$, $DC=5$，求各边.
5. 已知四个正数，前三个数成等差数列，其和为48；后三个数成等比数列；其最后一个数为$y=21+4x-x^2$的极值。求这四个数.
6. 方程 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ 中，a、b、c为实数，试证：a、b、c 成等比数列，其公比为x.
7. 试证：(1)若三角形的三个角成等差数列，且最大边为最小边的二倍，则此三个角之比为1:2:3；(2)若三角形的三条边成等差数列，且最大角为最小角的二倍，则三边长之比为 4:5:6.
8. 在半径为R的圆内接正六边形中，依次连接各边的中点

得新的正六边形，在新的正六边形的各边依次连接各边的中点又得新的正六边形，如此无限继续下去，求此无限个正六边形的周长之和.

9. 设$\triangle ABC$的三条边成等比数列，则以它的三条高为边的三角形和$\triangle ABC$相似.

10. 三角形的三边是a、b、c，方程$a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$有等根，且知$\lg 2+\lg b-\lg a=\lg\left(1+\frac{c}{a}\right)$，求三角形各边的比.

11. 直角三角形的三边若成等差数列，则其内切圆的半径等于公差.

12. 半径为r的圆内有一直径AB，在圆周上取一点C，作AB的垂直平分线交AC、BC(或其延长线)于P、Q. 设$OP=p$, $OQ=q$，求证$\lg p$、$\lg r$、$\lg q$成等差数列.

13. 在$\triangle ABC$中，$\sin A$、$\sin B$、$\sin C$若成等差数列，试证$\cot\frac{A}{2}$、$\cot\frac{B}{2}$、$\cot\frac{C}{2}$同样组成等差数列.

14. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C成等差数列，且

$$\log_4\sin A+\log_4\sin C=-1,$$

三角形的面积为$\sqrt{3}$，求三边长.

15. 若$\log_2 x+\log_2\left(x-\frac{3}{8}\right)+2^{\log_2 4}=0$，求数列

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots$$

之和.

16. 二次方程$x^2-2ax+a^2-b^2=0$与$x^2-2ax+3a^2-b^2=0$ $(a>0, b>0)$的根成等差数列，求a、b的最小整数值.

17. 甲,乙两个二次方程有实根，甲的二根的等差中项等于乙的二根的等比中项；而甲的二根的等比中项等于乙的二根的等差中项. 证明这些根的绝对值必相等.

18. 若$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=1$,试证$\operatorname{tg}\gamma$是$\operatorname{tg}\alpha$,$\operatorname{tg}\beta$的等比中项.

19. 若边长为a,b,c的$\triangle ABC$中，a^2,b^2,c^2成等差数列，试证$\operatorname{ctg}A,\operatorname{ctg}B,\operatorname{ctg}C$亦成等差数列.

20. 等比数列$a,ar,ar^2,\cdots ar^{n-1},\cdots$的前$n$项和为$S$，积为$P$，它们的倒数之和为$T$，试证 $P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$.

21. 确定锐角α的值，使方程$x^4-10x^2\operatorname{tg}^2\alpha+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=0$的四个实数根成等差数列，并以此数列的公差作为$\alpha$角所在的直角三角形中的斜边长，求该三角形的内切圆与外接圆面积之比.

22. 把连续奇数按1个，2个，3个，···顺次分组，即(1)，(3,5)，(7,9,11)，(13,15,17,19)，···求第n组中的数的和.

23. 设直线l_1和l_2的斜率是方程$6x^2-x-1=0$的两个根，求直线l_1和l_2的交角.

24. 设$\sin\alpha$和$\sin\beta$是方程$x^2-(\sqrt{2}\cos 20^\circ)x+\left(\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)=0$的两个根，其中$\alpha$和$\beta$都是锐角，求$\alpha$、$\beta$的度数.

25. 线段PQ长为p，在两端的同侧分别作垂线PS,QR,它

们的长分别为 1 和 q. 以线段 RS 为直径作圆，与 PQ 相交，如果它的一个交点为 T，求证 PT，TQ 为方程 $x^2-px+q=0$ 的二根.

26. 设方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，且 $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=3:2$，求 p、q 的值.

27. 已知 A、B 是直角三角形的两个锐角，而 $\sin A$ 和 $\sin B$ 是方程 $4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+K=0$ 的两个根，求 A、B 和 K 之值.

28. 已知 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$ 为 $x^2+px+q=0$ 的两个根，试用 p、q 表达 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值.

29. 若方程 $x^2-4x\cos 2\theta+2=0$ 和 $2x^2+4x\sin 2\theta-1=0$ 有一个根互为倒数，求 $\theta(0<\theta<\pi)$.

30. 若 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-5x\sin\theta+1=0$ 的一个根，而且 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

31. 方程 $\sqrt{3}x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{\frac{2}{3}}=0$ 的二根是 α，β 时，证明点 (α,β) 一定在圆 $x^2+y^2=1$ 的圆周上.

32. 设二次方程 $x^2-(3-a^2)x+a^2=0$ 的两个根是 α,β，

    (1) 求实数 a 的范围，使 α,β 都是正数；

    (2) 用(1)中所求得的 a 表示 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

33. 给出二次方程 $(x-1)^2+(2x-1)\operatorname{tg}\alpha=0$，方程中

$-90^\circ<\alpha<90^\circ$，

(1) 二次方程有实数根，角α应在什么范围内？

(2) 求出此时的实根 x_1，x_2；

(3) 证明$\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)$与$\alpha$无关；

(4) 两个实根同符号时，角α应在什么范围内？

34. 方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的一根为1，其它二根要相等，则 p,q,r 间应有怎样的关系？

35. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 为方程 $x^3-px^2+q^2x-r^3=0$ 的根，试以p,q,r表示$\triangle ABC$的面积及$\cos A+\cos B+\cos C$.

36. 确定a的值，使方程

$$ax^2-4xy+\sqrt{3}y^2+3\sqrt{3}x-3y=0$$

可表示为两条直线，并求这两条直线与y轴组成的三角形的面积.

37. 在直角三角形 ABC 中，角$A=90^\circ$.由A向斜边作垂线AK，由K点再作$KP\perp AB$，$KT\perp AC$.已知$BP=m$，$CT=n$，求 BC 的长.

38. 证明：x^2+y^2+1 不能分解成关于 x，y 的一次因式的积.

39. (1) 点P分一线段为两部分，试证：将此线段二等分时，其各部上的正方形面积之和为最小；

(2) 试证：以 AB 为边的正方形 $ABCD$，其内接正方形中若有极小面积，不小于原正方形的一半.

40. 同样大的两个正方形p,q，把p的一个顶点放在q的对

角线的交点上，p 与 q 就有一部分重合.证明重合部分的面积是一个定值.

41. 把长方形 $ABCD$ 的边 DA、BC 分别延长 x 到A'、C'，又把 AB、CD 分别延长 y 到B'、D'. $AB=5$，$BC=10$.

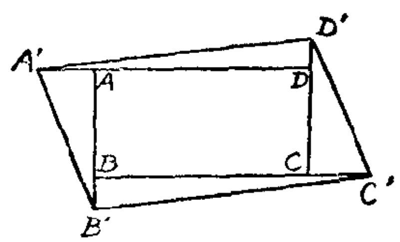

图 1

(1) 试证四边形$A'B'C'D'$为平行四边形；

(2) 如果这个四边形为菱形，那么 x、y 必须满足什么关系式?

(3) 如果这个菱形的面积是长方形$ABCD$的面积的3倍，求x、y.

42. 三角形 ABC 的三边分别为 a，b，c. 从点 A，B，C 向对边引垂线交于H，并且垂足分别为L，M，N.（图2）求证：

(1)$\triangle LMN$ 的三边的长分别为$a\cos A$，$b\cos B$，$c\cos C$；

(2)$\triangle LMN$的三个角分别为$\pi-2A$，$\pi-2B$，$\pi-2C$.

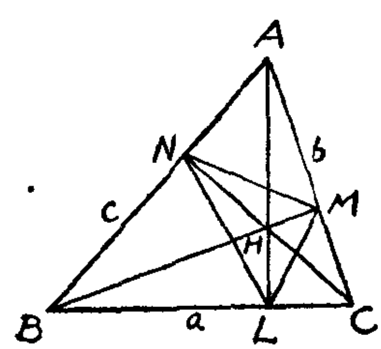

图 2

43. 半径分别为 a，b，c 的三圆相外切，求以三切点 D，E，F 为顶点的三角形的面积.（图3）

44. 半径分别为 R、R 和 $(\sqrt{2}-1)R$ 的三个圆 $\odot O_1$、

$\odot O_2$、和$\odot O$两两外切，求三圆间隙（图4有阴影的部分）的面积.

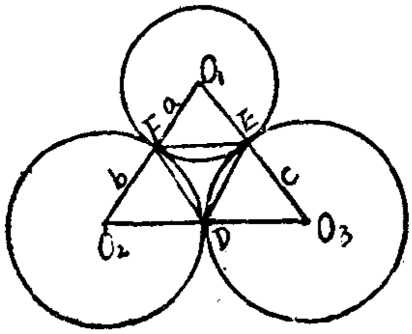

图 3

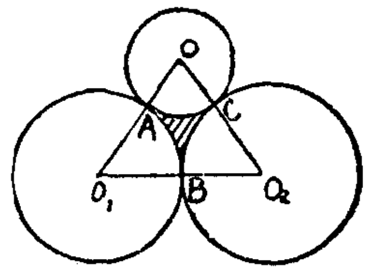

图 4

45. 已知 $\triangle ABC$ 的两边 AC，AB 长分别为 1 厘米，2 厘米，其夹角平分线 AD 长为 1 厘米，求其面积.

46. 在 $\triangle ABC$ 的三边为 a，b，c，若 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且$0^\circ<B<90^\circ$，求证$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

47. 两圆外切，半径分别为 R 和 r，两条公切线交角为 α，

求证 $\sin\alpha=\dfrac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}$.

48. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=BC=b$，$AC=a$，$\angle ABC=20^\circ$，求证 $a^3+b^3=3ab^2$.

49. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 $AB=a$，$BC=b$、$CD=c$，$DA=d$，$AC=p$，$BD=q$.（图 5）求证：

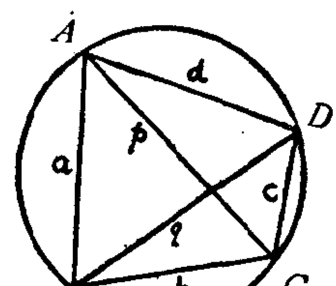

图 5

(1) $\dfrac{p}{q}=\dfrac{ad+bc}{ab+cd}$,

(2) $p^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,

(3) $q^2=\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$.

50. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=72°$，各边为 a,b,c，且$(a^2-c^2)^2=b^2(2c^2-b^2)$，求角 B 与 C.

51. 已知在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$A=60°$，$B=90°$，$CD=1$，$AB=2$，求 BC 和 DA 长.

52. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$，讨论这个三角形的形状.

53. 若 $\triangle ABC$ 三边为 a,b,c，并适合

$$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,$$

试求 $\triangle ABC$ 是何种三角形?

54. 两个边数不等的正多边形，它们的一个内角的比等于其边数的比，求这两个正多边形的一个内角的大小.

55. 设 l、m、n 是半径为 r 的圆的三条直径，交角均是 $\dfrac{\pi}{3}$，在圆周上任取一点 P 向 l、m、n 引垂线，其垂足分别为 L、M、N. 试证 $\triangle LMN$ 是边长为一定的正三角形.

56. 圆外切正 n 边形和正 $2n$ 边形面积之比为3:2，求边数 n.

57. 过定圆内的定点 P 作任意弦 APB，$\angle AOP=\alpha$，$\angle BOP=\beta$，试证 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$为定值.

58. $\triangle ABC$ 是等腰三角形，作 $\triangle ABC$ 的底角 B 的平分线交对边于 D，且有 $AD+BD=BC$，求这三角形的各角。

59. 如图 6，计算边长为 1 米的正方形 $ABCD$ 内的部分面积：

(1) 距二顶点 A，B 都是 1 米内的面积；

(2) 距四顶点 A，B，C，D 1 米内的面积。

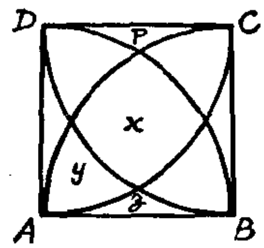

图 6

60. 四边形 $ABCD$ 中，O 为对角线的交点，α 为交角，$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle ODA$ 的外心分别是 P，Q，R，S。

(1) 四边形 $PQRS$ 是何种四边形？

(2) 求四边形 $ABCD$ 与四边形 $PQRS$ 的面积之比。

61. 若 $\triangle ABC$ 的三边长 a，b，c 的关系满足

$a^2-a-2b-2c=0$①；$a+2b-2c+3=0$②，

求最大边所对的最大角是多少？

62. 试证：由圆外一点 P 引不过圆心 O 的任意一条割线交圆于 A、B，则 $\operatorname{ctg}\frac{\angle AOP}{2}\times\operatorname{ctg}\frac{\angle BOP}{2}$ 为定值。

63. 作 $y=|x|$ 与 $y=\frac{1}{5}(12+x)$ 的图象，并求它所围成的三角形的面积，以及绕 x 轴旋转所成的旋转体的侧面积与体积。

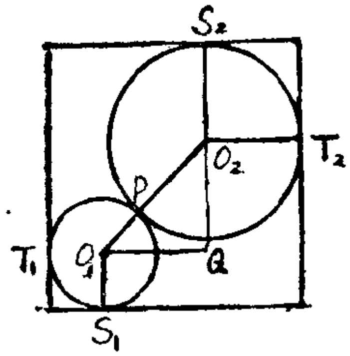

图 7

64．在底的直径与深都是 a 的直圆柱筒内放入半径分别为 r_1、r_2 的二球，上面的球恰好与上底面相切．（图 7 ）试证：无论二球大小如何，其 r_1+r_2 为定数．

65．一个顶点在下方的正圆锥容器，把全部容积十等分，求各等分的高．

66．等腰梯形的腰长为 c，上下底边长分别为 a 和 b，且顺次连接它的四条边中点所成的四边形有一个角为直角，求证 c^2 是 a^2 和 b^2 的等差中项．

67．一个长方体的三度成等差数列，对角线长为 $5\sqrt{2}$ 厘米，全面积为 94 平方厘米，求它的体积．

68．自平面 M 外一点 A 引到平面 M 的斜线 AB 交平面 M 于 B 点，并与平面 M 夹成 α 角，过 AB 作平面 N 与平面 M 夹成二面角为 β，求 AB 与平面 M 和 N 的交线 EF 所成的角．

69．已知正三棱锥的体积为 V，侧面与底面所成之角为 α，求正三棱锥的全面积．

70．平行六面体（斜棱柱）交于一点之棱长分别为 a,b,c，其中 $AB\perp BC$，BD 与 BC、BA 两棱夹角都是 α 角，求这平行六面体的体积．

71．立方体的棱长为 a，二对角线的交角为 θ，求 $\sin\theta$ 的值．

72. 棱锥的底面是正三角形，它的边长为a，棱锥的一条侧棱与底面垂直，其余的两条侧棱都与底面交成β角．求棱锥最大的侧面的面积，并求这个侧面与底面的交角．

73. 三棱锥的两个侧面都是等腰直角三角形，它们的斜边都是b，且两条斜边之间的夹角是α．求棱锥的体积。

74. 在高为8厘米，底面半径为6厘米的圆锥内，有上下一列内切球．第一个球切于底面和侧面，其余各球顺切于前球和圆锥侧面．（图8）若球的个数无限增多，求内切球体积和的极限．

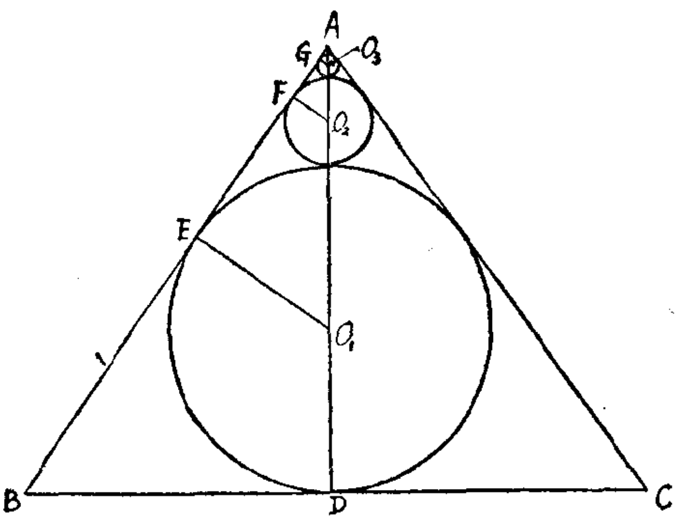

图 8

75. 已知方程$a(x-1)^4+b(x-1)^2-c=0$中的a是方程

$$1+\frac{1}{3}\lg(3^{6\sqrt{a}}+271)=\lg 4+\lg 25$$

的根，b是质数，且使$\lg(b^2-12b-85)$与$\sqrt{20b-b^2}$都有意义，c为一球面积（该球面积数等于体积数）的

$\frac{6}{\pi}$倍，求 x.

76. 解方程$(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

77. 有一个上口直径 24 厘米，底面直径 18 厘米，深 20 厘米的圆台形空桶，放在露天中，下雨后，桶内存水的深占桶深的$\frac{2}{5}$. 问桶内水量有多少？又这次降雨量是多少？

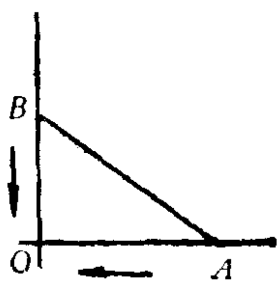

图 9

78. A, B 分别是互相垂直的两直线上的点，A 距交点 O 为 6 厘米，B 距交点 O 为 4 厘米，两点同时向 O 匀速移动. 1 秒钟后，两点相距 5 厘米；2 秒钟后，两点相距$\sqrt{8}$厘米. 求 A, B 的速度.（图 9）

79. 解方程 $9\times 3^{\log_x^2 4}-\frac{1}{9}^{\log_x 0.125}=0$.

80. 解方程组 $\begin{cases}3^x+2^{x+2y+1}=5,\\ 3^{x+1}-2^{x+2y}=1.\end{cases}$

81. 若方程 $x^2+x\lg\alpha+\lg\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}=0$ 与另一方程 $x^2+2x\lg(\alpha-1)=0$ 有公共解，求 α 之值.

82. 方程$Kx-6y=5K-3$，$2x+(K-7)y=-7K+29$. 若 $x=y$，求 K 值，并求此时 x, y 的值.

83. 设两个二次方程 $x^2+x\lg\alpha+\lg(\alpha+1)=0$ 与 $x^2+x\lg(\alpha+1)+\lg\alpha=0$ 有公共根，求 α 的值.