

高等学校教材

结构力学

下册

(第三版)

湖南大学结构力学教研室 编

杨弗康 李家宝 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据1980年5月审订的高等工业学校本科四年制土建类专业的《结构力学教学大纲》(草案)的要求修订而成的。

全书共十五章,分上、下两册出版。上册共九章,内容包括:平面体系的几何组成分析,静定结构的内力计算,静定结构的影响线及其应用,虚功原理及结构的位移计算,解算超静定结构的方法。下册共六章,内容包括:位移法(含剪力分配法),渐近法(主要介绍力矩分配法、无剪力分配法及迭代法)和连续梁的影响线及其内力包络图,矩阵位移法,结构的极限荷载,结构的弹性稳定计算,结构的动力计算。每章后面附有思考题和大量习题以及大部分习题的答案。

本书可作为土建类专业本科及函授结构力学课程的教材,也可供有关专业以及有关工程技术人员参考。

本书责任编辑余美茵

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

结构力学 下册/杨康,李家宝主编;刘光栋等编写。
3版.—北京:高等教育出版社,1983.7(1996重印)
ISBN 7-04-000452-6

I.结… II.①杨… ②李… ③刘… III.结构力学-建筑
结构-高等学校-教材 IV.TU311

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第11501号

●
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
四川省金堂新华印刷厂印装

●
开本 787×1092 1/16 印张 17 字数 390 000
1958年5月第1版 1983年7月第3版 1996年12月第14次印刷
印数 116 217—124 141
定价 11.30 元

下册目录

第十章 位移法1	第十三章 结构的极限荷载123
§ 10-1 基本概念.....1	§ 13-1 概述.....123
§ 10-2 位移法的基本结构和基本未知量.....2	§ 13-2 静定梁的弹塑性分析.....125
§ 10-3 等截面直杆的转角位移方程.....5	§ 13-3 超静定梁的极限荷载.....129
§ 10-4 位移法的典型方程和示例.....11	§ 13-4 比例加载时判定极限荷载的一般定 理.....133
* § 10-5 用位移法计算有斜柱的刚架.....19	§ 13-5 刚架的极限荷载.....136
§ 10-6 直接利用平衡条件建立位移法方程.....23	思考题.....140
§ 10-7 变截面杆件的转角位移方程.....25	习题.....140
§ 10-8 用剪力分配法计算等高铰接排架.....29	第十四章 结构弹性稳定的计算143
§ 10-9 位移法与力法的联合应用.....32	§ 14-1 一般概念.....143
思考题.....35	§ 14-2 确定临界荷载的静力法和能量法.....145
习题.....36	§ 14-3 等截面直杆的稳定.....155
第十一章 渐近法和连续梁的内力包络图40	§ 14-4 变截面杆件的稳定.....161
§ 11-1 概述.....40	§ 14-5 偏心受压直杆的稳定.....163
§ 11-2 力矩分配法的基本概念.....40	§ 14-6 剪力对临界荷载的影响.....164
§ 11-3 用力矩分配法计算连续梁和无结点 线位移的刚架.....43	§ 14-7 组合压杆的稳定.....166
§ 11-4 力矩分配法与位移法的联合应用.....51	§ 14-8 刚架的稳定.....170
§ 11-5 无剪力分配法.....53	* § 14-9 用直接刚度法计算刚架的稳定.....177
§ 11-6 迭代法.....57	§ 14-10 狭长形矩形截面筒支梁的稳定.....183
§ 11-7 连续梁的影响线.....64	思考题.....186
§ 11-8 连续梁的内力包络图.....70	习题.....186
思考题.....73	第十五章 结构的动力计算189
习题.....74	§ 15-1 概述.....189
第十二章 矩阵位移法79	§ 15-2 单自由度体系的自由振动.....192
§ 12-1 概述.....79	§ 15-3 单自由度体系的受迫振动.....197
§ 12-2 单元刚度矩阵.....79	§ 15-4 阻尼对振动的影响.....204
§ 12-3 单元刚度矩阵的坐标变换.....83	§ 15-5 两个自由度体系的自由振动.....210
§ 12-4 直接刚度法.....86	§ 15-6 一般多自由度体系的自由振动.....215
§ 12-5 等效结点荷载.....101	§ 15-7 多自由度体系在简谐荷载下的受迫 振动.....225
§ 12-6 直接刚度法的另一种形式——先处 理法.....104	§ 15-8 振型分解法.....229
§ 12-7 用先处理法计算矩形刚架(忽略轴向 变形的影响).....114	* § 15-9 无限自由度体系的自由振动.....237
思考题.....119	§ 15-10 计算频率的近似方法.....240
习题.....120	* § 15-11 结构抗震计算的概念.....244
	思考题.....247

习题.....	247	和剪力.....	258
附录 I	254	附录 II	259
表 1 矩形截面对称直线加腋梁的形常数及 载常数表.....	254	函数 $\xi_1(u)$ 、 $\xi_2(u)$ 、 $\xi_3(u)$ 、 $\eta_1(u)$ 、 $\eta_2(u)$ 、 $\eta_3(u)$ 的数值.....	259
表 2 一端直线加腋的矩形截面梁的形常数 及载常数表.....	255	附录 III	265
表 3 两段阶形梁的劲度系数和传递系数.....	258	函数 A_{kx} 、 B_{kx} 、 C_{kx} 、 D_{kx} 的数值.....	265
表 4 两段阶形梁在均布荷载下的固端弯矩		主要参考书目	

第十章 位 移 法

§ 10-1 基 本 概 念

前面介绍的力法是分析超静定结构的最基本而且历史最悠久的方法。在力法中，我们是取结构的赘余力作为基本未知量，并按照位移条件首先将它们求出，然后再进一步求出结构的其它反力、内力和位移。然而，我们知道，在一定的的外因作用下，结构的内力和位移之间，恒具有一定的关系。因此，也可把结构的某些位移作为基本未知量，首先求出这些位移，然后再据以确定结构的内力。这便是本章将要介绍的位移法。

下面先用简例来说明位移法的基本要点。图 10-1a 示一超静定桁架，各杆的 EA 相同，在荷载 P 的作用下，桁架将发生虚线所示的变形。设杆件 12 的伸长为 Δ_{12} ，杆件 13 和 13' 的伸长分别为 Δ_{13} 和 Δ_{13}' ，结点 1 的竖向位移为 v （结点 1 的水平位移根据对称性可知为零），则在杆件变形 Δ 与结点位移之间具有一定的几何关系。由于变形是微小的，故有

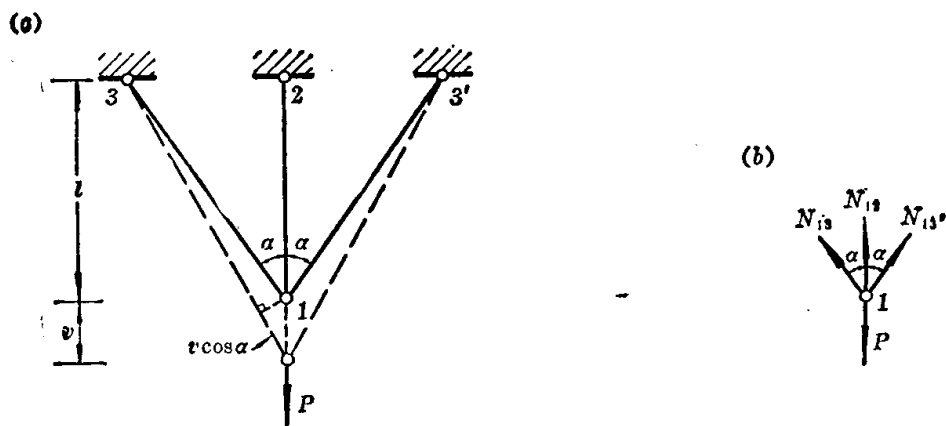


图 10-1

$$\Delta_{12} = v, \quad \Delta_{13} = \Delta_{13}' = v \cos \alpha \quad (a)$$

而杆件变形 Δ 与杆件内力也具有恒定的关系，它可利用应力-应变间的物理关系得出

$$N_{12} = \frac{EA}{l} \Delta_{12}, \quad N_{13} = N_{13}' = \frac{EA}{l_{13}} \Delta_{13} = \frac{EA}{l} \Delta_{13} \cos \alpha \quad (b)$$

将式(a)代入式(b)，即可得出杆件内力与结点位移的关系式为

$$N_{12} = \frac{EA}{l} v, \quad N_{13} = N_{13}' = \frac{EA}{l} v \cos^2 \alpha \quad (c)$$

显然可见，若能设法先求出结点位移 v ，则杆件的变形和内力均可据以求得。因此，可把结点位移 v 作为基本未知量。

现进一步研究求解位移 v 的方法。由结点 1 的平衡条件(见图 10-1b)可得

$$N_{12} + 2N_{13} \cos \alpha = P \quad (d)$$

把式(c)代入式(d)即得

$$\frac{EA}{l}v + 2\frac{EA}{l}\cos^3\alpha \cdot v = P \quad (e)$$

式(e)就是用结点位移 v 表示的平衡方程, 一般称为位移法方程。解此方程可求得

$$v = \frac{Pl}{EA(1+2\cos^3\alpha)}$$

把 v 代入式(c)可求得

$$N_{12} = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}, \quad N_{13} = N_{13'} = \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

上述简例扼要地介绍了用位移法解题的过程, 其要点可归纳如下:

- (1) 以结点位移为基本未知量;
- (2) 根据平衡条件建立以结点位移为未知量的位移法方程;
- (3) 解出结点位移后, 再据以计算杆件的变形和内力。

§ 10-2 位移法的基本结构和基本未知量

以上用简单桁架为例说明了位移法的基本要点, 下面讨论如何将它应用于刚架的计算。图 10-2a 所示刚架, 在荷载 P 的作用下, 它将产生如图中虚线所示的变形。由于结点 1 为一刚结点, 故汇交于该结点的两杆端将产生相同的转角 Z_1 。此外, 结点 1 实际上还具有微小的线位移。不过, 对于受弯直杆, 通常都可略去轴向变形和剪切变形的影响, 并认为弯曲变形是微小的, 因而可假定各杆两端之间的距离在变形后仍保持不变(称为轴向刚度条件)。这样, 在图示刚架中, 由于支座 2、3 都不能移动, 而结点 1 与 2、3 两点之间的距离, 根据上述假定又都保持不变, 于是结点 1 也就被认为不能发生线位移。

根据图 10-2a 所示刚架的变形情况可知: 杆件 12 相当于一端固定另一端铰支的单跨超静定梁受到荷载 P 的作用, 同时其固定支座 1 发生了转角 Z_1 (图 10-2b); 杆件 13 则相当于两端固定梁在其固端 1 处发生了转角 Z_1 (图 10-2c)。如能求出转角 Z_1 , 则各杆的内力均可按力法求得。因此, 在位移法中, 就以此结点位移 Z_1 作为基本未知量, 并以单跨超静定梁作为它的计算单元。

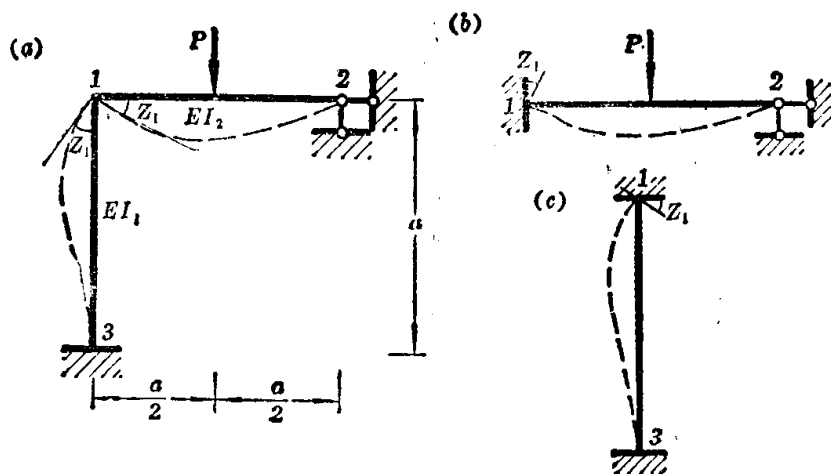


图 10-2

又如图 10-3a 所示的刚架, 它在荷载作用下将发生虚线所示的变形, 其结点 1 不仅会发生转角 Z_1 , 而且还将产生水平位移 Z_2 ; 刚架各杆的变形和受力情况, 同样可用图 10-3b、c 所示的单跨超静定梁来表示。此时, 它的基本未知量将是结点 1 的转角 Z_1 和水平位移 Z_2 。

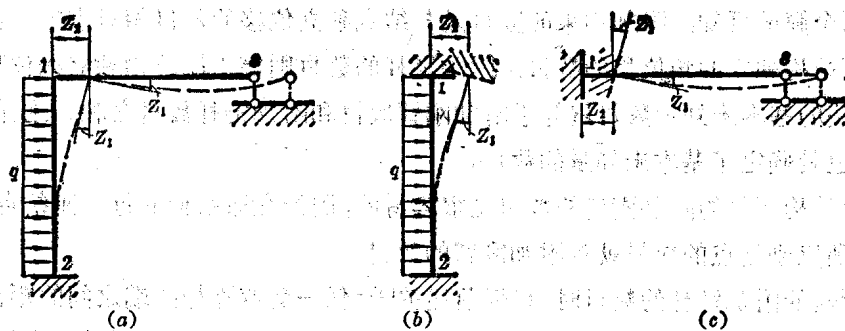


图 10-3

以上两例说明用位移法计算刚架时, 同 § 10-1 所述桁架一样, 是取结点位移作为基本未知量, 而其计算单元则是单跨超静定梁。由此可知, 在刚架上应用位移法时, 需要解决三个问题:

- (1) 基本未知量的数目;
- (2) 单跨超静定梁的内力分析;
- (3) 位移法方程的建立和求解。

其中(2)(3)两个问题将分别在 § 10-3 和 § 10-4 中介绍, 这里先讨论位移法的基本未知量的数目和基本结构。

为了将原刚架的各杆变成单跨超静定梁, 我们可在原结构的结点上加入某些附加约束, 使其成为固定端或铰支端。例如对图 10-4a 所示刚架, 可在原结构的结点 1 处加上一个阻止结点转动的约束, 叫做附加刚臂, 并用符号 ∇ 表示(这种约束不能阻止结点移动)。这样, 原结构即变成由两端固定的梁 13 和一端固定另一端铰支的梁 12 所组成的组合体(图 10-4b), 它称为原结构

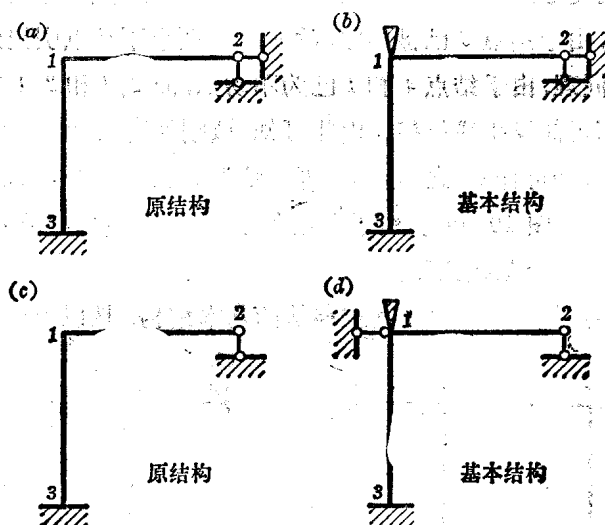


图 10-4

按位移法计算时的基本结构。对于图 10-4c 所示的刚架, 因为结点 1 将发生转动和水平移动, 故除了需用附加刚臂阻止其转动外, 尚需加入一根水平链杆阻止其移动, 它称为附加链杆, 其基本结构如图 10-4d 所示。

从以上两个简例可知, 附加约束的数目是与结点独立位移的数目相对应的。其中附加刚臂的数目等于原结构独立的角位移的数目, 附加链杆的数目则等于原结构独立线位移的数目。由此可见, 位移法的基本未知量数目就等于附加刚臂数目和附加链杆数目之和。这样, 在确定基本结构的同时, 也就确定了基本未知量的数目。

确定基本结构所需的附加刚臂的数目是很容易的, 因为在原结构的每一刚结点上, 都应加入一附加刚臂, 所以刚结点的数目就是附加刚臂的数目。

在确定所需的附加链杆的数目时, 根据前述关于“任一受弯直杆两端之间的距离在变形后仍保持不变”的假定, 可以推知: 在结构中, 由两个已知的不动点所引出的两受弯直杆相交的结点, 也将是不动的。据此, 则不难通过逐一考察各结点和支座处的位移情况, 将所应加入的附加链杆数目予以确定。例如, 对于图 10-5a 所示的刚架, 先取结点 6 考虑, 其上有 65 和 64 两杆, 其中 65

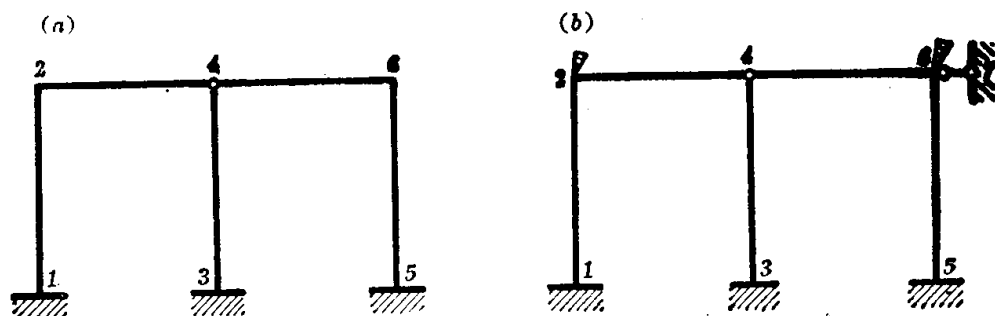


图 10-5

杆的另一端为固定支座 5, 而 64 杆的另一端则为结点 4, 由于结点 4 在变形时不是已知的不动点, 故结点 6 可能发生线位移。为了控制它的线位移, 可加入一附加链杆 67 (图 10-5b)。此时, 由于 5, 7 都为不动点, 而变形时 6, 7 和 6, 5 之间的距离又都保持不变, 故结点 6 将不能发生任何线位移。再考虑结点 4, 由于结点 6 已被固定, 故从 3, 6 两个不动点引出的 64 和 34 两杆, 已可控制结点 4 的线位移。同理, 由于结点 4 和 1 已为不动点, 而 2, 4 和 2, 1 之间的距离又都保持不变, 故可判定结点 2 也不可能发生线位移。由此可知, 该刚架所需加入的附加链杆数目为 1。

当在上述刚架加入附加链杆 67 之后, 如果再在结点 2 和 6 加入附加刚臂, 便可得出用位移法计算该刚架的基本结构 (图 10-5b)。由于共增加了三个附加约束, 故知原刚架的基本未知量为三个, 其中两个是转角, 一个是线位移。

又如图 10-6a 所示的刚架, 如要确定其位移法的基本结构, 按以上所述, 除了需在结点 1, 2

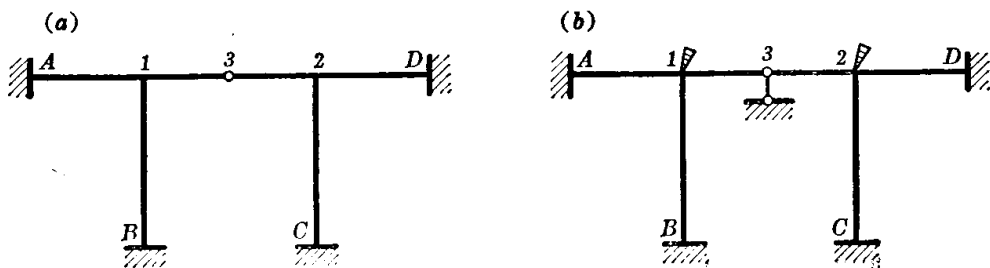


图 10-6

上增加两个附加刚臂外,还应在结点3增加一根附加链杆(图10-6b),否则,由于13和23位于同一直线上,结点3可在垂直于杆轴的方向发生微小的位移。由此可知,该结构的基本未知量共有三个,其中两个是转角,一个是线位移。

值得指出的是,上述确定独立的结点线位移数目的方法,是以受弯直杆变形后两端距离不变的假设为依据的。对于需要考虑轴向变形的二力杆或受弯曲杆,则其两端距离不能看作是不变的。因此,对于图10-7a、b所示两结构,其独立的结点线位移的数目均应等于2而不是1。

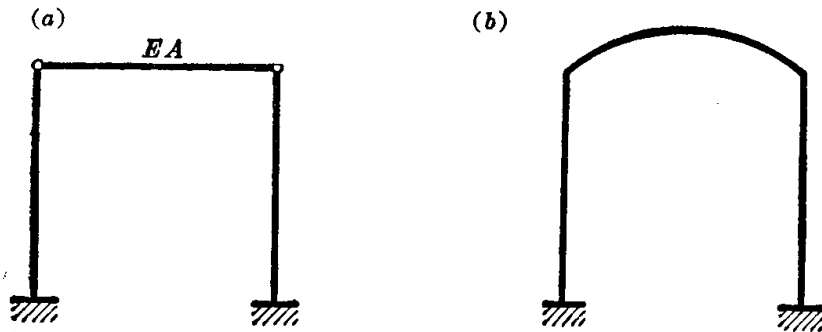


图 10-7

§ 10-3 等截面直杆的转角位移方程

由上述讨论可知,位移法是以单跨超静定梁作为其计算单元,因此,需要事先求出这种梁在外荷载和杆端发生转动或移动影响下的内力。

一、由杆端位移引起的杆端力

图10-8a示一两端固定的等截面梁AB,已知A端的转角为 φ_A ,B端的转角为 φ_B ,A、B两支座在垂直于杆轴方向的相对线位移为 Δ_{AB} (AB杆在水平和竖直方向的平行移动,均不引起杆件内力,故只需考虑相对位移 Δ_{AB} 的影响)。现欲求该梁的杆端力 M_{AB} 、 M_{BA} 、 Q_{AB} 、 Q_{BA} 。关于它们的正负符号,规定如下:

① 杆端转角 φ_A 、 φ_B ,弦转角 $\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$ 均以

顺时针方向转动为正。

② 杆端弯矩 M_{AB} 、 M_{BA} 规定对杆端以顺时针方向为正(因而对结点或支座,则以逆时针方向为正)。

③ 杆端剪力 Q_{AB} 、 Q_{BA} 的正向规定同前。

在图10-8中,各量值均以正方向标出。

首先,取图10-8b所示简支梁AB为基本结

构,其上的赘余力为端弯矩 X_1 、 X_2 和水平反力 X_3 。在目前的问题中,可以认为 X_3 对梁的弯矩

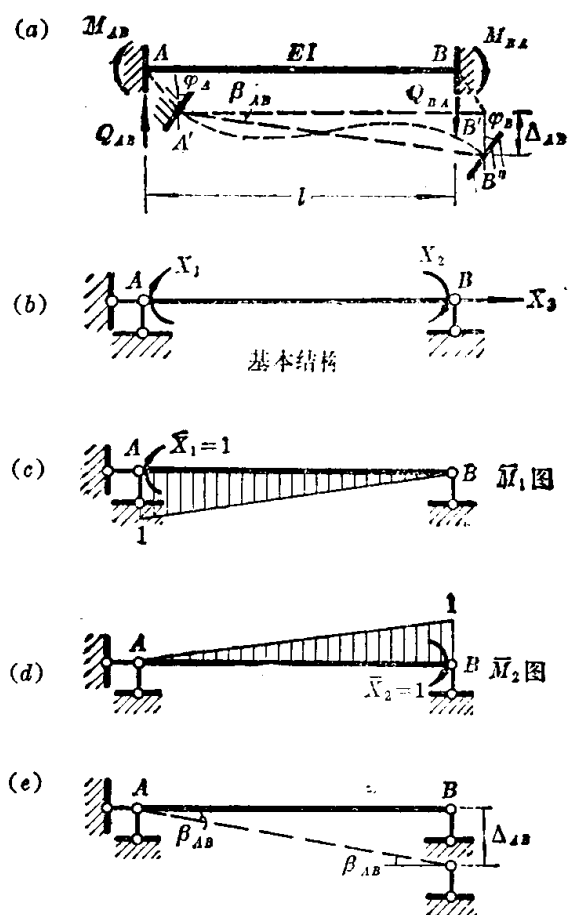


图 10-8

没有影响,故不予考虑,只就沿 X_1 和 X_2 方向的位移条件建立下列力法典型方程:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Delta} = \varphi_A$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Delta} = \varphi_B$$

式中的系数和自由项可按前面介绍的方法求得。在作出 M_1 图和 M_2 图后(图 10-8c、d), 利用图乘法便可得出各系数如下:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{l}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} \times \frac{1}{3} \right) = -\frac{l}{6EI}$$

至于自由项 $\Delta_{1\Delta}$ 和 $\Delta_{2\Delta}$, 它们是由于支座移动在基本结构两端所引起的转角。由图 10-8e 可以看出, 支座转动将不使基本结构发生任何转角, 而支座的移动则将使整个基本结构转动同一角度 $\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$ 。依上所述, 故有

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta_{2\Delta} = \beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$$

将以上所求得的系数和自由项代入典型方程中, 即得

$$\frac{l}{3EI}X_1 - \frac{l}{6EI}X_2 + \frac{\Delta_{AB}}{l} = \varphi_A$$

$$-\frac{l}{6EI}X_1 + \frac{l}{3EI}X_2 + \frac{\Delta_{AB}}{l} = \varphi_B$$

由此解得

$$X_1 = \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_A + \varphi_B - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right)$$

$$X_2 = \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_B + \varphi_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right)$$

为了方便起见, 令 $i = \frac{EI}{l}$, 并称为杆件的线刚度; 再以弯矩符号 M_{AB} 代替 X_1 , M_{BA} 代替 X_2 ,

则上式可以写成

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i \left(2\varphi_A + \varphi_B - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) \\ M_{BA} &= 2i \left(2\varphi_B + \varphi_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

式(10-1)就是由杆端位移 φ_A 、 φ_B 、 Δ_{AB} 所引起的杆端弯矩的公式。此外, 由平衡条件可求出杆端剪力

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA})$$

再将式(10-1)代入, 即得

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{6i}{l} \left(\varphi_A + \varphi_B - 2 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) \quad (10-2)$$

二、由荷载引起的杆端力

图 10-9a 示一等截面固端梁承受荷载的情况, 它的杆端弯矩分别以 M_{AB}^0 和 M_{BA}^0 表示, 并称为固端弯矩; 其杆端剪力则分别以 Q_{AB}^0 和 Q_{BA}^0 表示, 并称为固端剪力。它们的正负号规定均与前述相同。

当用力法计算上述固端力时, 其基本结构和相应的 M 图、 M_P 图分别如图 10-9b、c、d、e 所示。力法典型方程为

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

方程中的系数与前述相同, 而自由项的计算如下:

设图 10-9e 所示 M_P 图的面积为 ω , 其形心距 A 端为 x_A , 距 B 端为 x_B 。将 M_P 图分别与 M_1 、 M_2 图相乘后得

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega}{EI} \cdot \frac{x_B}{l}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{\omega}{EI} \cdot \frac{x_A}{l}$$

将系数 $\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI}$, $\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l}{6EI}$ 以及上述自由项代入典型方程后, 得

$$\begin{aligned} \frac{l}{3EI}X_1 - \frac{l}{6EI}X_2 + \frac{\omega}{EI} \cdot \frac{x_B}{l} &= 0 \\ -\frac{l}{6EI}X_1 + \frac{l}{3EI}X_2 - \frac{\omega}{EI} \cdot \frac{x_A}{l} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^0 = X_1 &= -\frac{2\omega}{l^2}(2x_B - x_A) \\ M_{BA}^0 = X_2 &= \frac{2\omega}{l^2}(2x_A - x_B) \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

式(10-3)即为两端固定等截面梁的固端弯矩计算公式。

利用平衡条件, 可求出固端剪力为

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB}^0 &= Q_{AB}^0 - \frac{M_{AB}^0 + M_{BA}^0}{l} \\ Q_{BA}^0 &= Q_{BA}^0 - \frac{M_{AB}^0 + M_{BA}^0}{l} \end{aligned} \right\}$$

式中 Q_{AB}^0 和 Q_{BA}^0 分别表示相应简支梁在 A、B 两端的剪力。再将式(10-3)代入上式即得

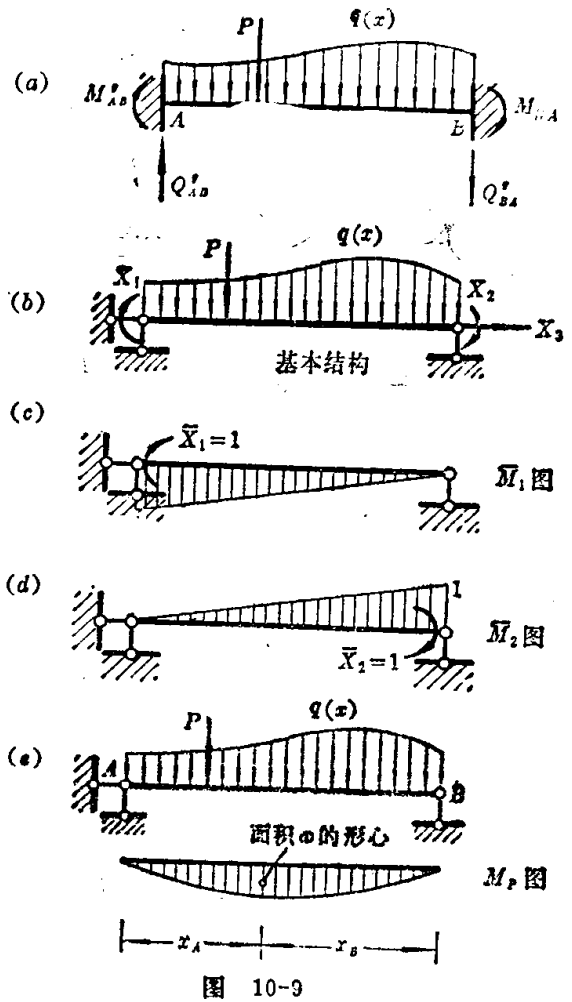


图 10-9

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB}^q &= Q_{AB}^0 + \frac{6\omega}{l^3}(x_B - x_A) \\ Q_{BA}^q &= Q_{BA}^0 + \frac{6\omega}{l^3}(x_B - x_A) \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

式(10-4)即为两端固定等截面梁的固端剪力计算公式。

三、等截面单跨超静定梁的转角位移方程

(1) 两端固定梁

如果等截面两端固定梁同时承受已知的杆端位移和荷载的作用，则根据叠加原理可求得杆端弯矩的一般公式为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i \left(2\varphi_A + \varphi_B - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + M_{AB}^q \\ M_{BA} &= 2i \left(2\varphi_B + \varphi_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + M_{BA}^q \end{aligned} \right\} \quad (10-5)$$

式(10-5)即称为两端固定等截面直杆的转角位移方程。

杆端剪力的一般公式则为

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB} &= -\frac{6i}{l} \left(\varphi_A + \varphi_B - 2 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + Q_{AB}^q \\ Q_{BA} &= -\frac{6i}{l} \left(\varphi_A + \varphi_B - 2 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + Q_{BA}^q \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

(2) A端固定、B端铰支梁

对于一端固定另一端铰支的等截面梁，其转角位移方程可以由式(10-5)导出。设B端为铰支，则根据式(10-5)的第二式，有

$$M_{BA} = 2i \left(2\varphi_B + \varphi_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + M_{BA}^q = 0$$

故可求得

$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \left(\varphi_A - 3 \frac{\Delta_{AB}}{l} + \frac{1}{2i} M_{BA}^q \right) \quad (a)$$

可见在此情况下 φ_B 为 φ_A 和 Δ_{AB} 的函数，它不是独立的。将式(a)代入式(10-5)的第一式中，即得一端固定另一端铰支等截面直杆的转角位移方程

$$M_{AB} = 3i \left(\varphi_A - \frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + M_{AB}^q \quad (10-7)$$

$$\text{式中 } M_{AB}^{q'} = M_{AB}^q - \frac{1}{2} M_{BA}^q = -\frac{3\omega x_B}{l^2} \quad (10-8)$$

即为这种梁的固端弯矩。

(3) A端固定、B端定向支承梁

对于一端固定另一端定向支承的等截面梁(图 10-10)，其转角位移方程亦可由式(10-5)和(10-6)导出。设B端为定向支承，则根据式(10-6)的第二式有

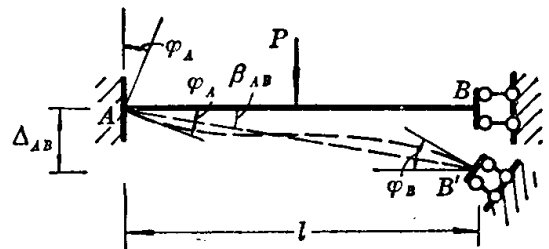
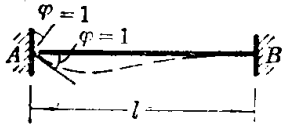
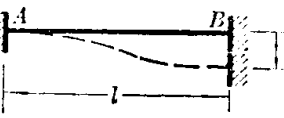
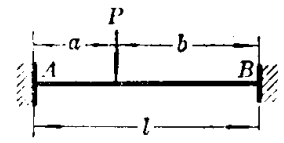
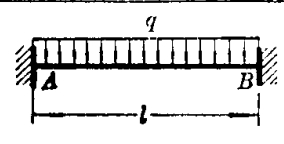
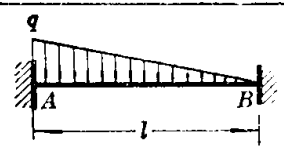
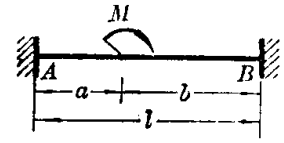
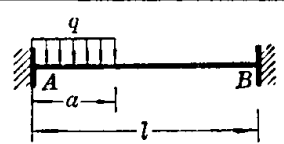
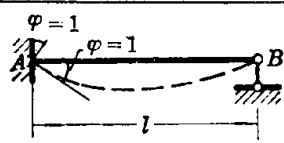
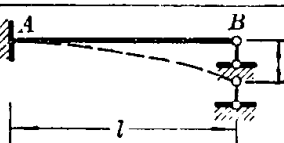
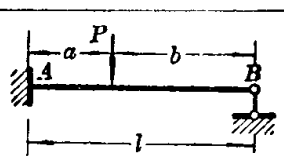
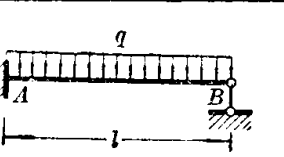


图 10-10

表 10-1 单跨超静定梁的形常数和载常数表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	Q_{AB}	Q_{BA}
1		$\frac{4EI}{l} = 4i$	$\frac{2EI}{l} = 2i$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$
2		$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$\frac{12EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$
3		$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2(l+2a)}{l^3}$	$-\frac{Pa^2(l+2b)}{l^3}$
4		$-\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$
5		$-\frac{1}{20}ql^2$	$\frac{1}{30}ql^2$	$\frac{7}{20}ql$	$-\frac{3}{20}ql$
6		$\frac{b(3a-l)}{l^2}M$	$\frac{a(3b-l)}{l^2}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$
7		$-\frac{qa^2}{12l^2}(6l^2-8la+3a^2)$	$\frac{qa^3}{12l^2}(4l-3a)$	$\frac{qa}{2l^3}(2l^3-2la^2+a^3)$	$-\frac{qa^3}{2l^3}(2l-a)$
8		$\frac{3EI}{l} = 3i$		$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$
9		$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$		$\frac{3EI}{l^3} = 3\frac{i}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3} = 3\frac{i}{l^2}$
10		$-\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$		$\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{Pa^2(2l+b)}{2l^3}$
11		$-\frac{1}{8}ql^2$		$\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$

续表 10-1

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	Q_{AB}	Q_{BA}
12		$-\frac{1}{15}ql^2$		$\frac{4}{10}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
13		$-\frac{7}{120}ql^2$		$\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
14		$\frac{l^2-3b^2}{2l^3}M$		$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$	$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$
15		$\frac{EI}{l} = i$	$-\frac{EI}{l} = -i$		
16		$-\frac{EI}{l} = -i$	$\frac{EI}{l} = i$		
17		$-\frac{Pa(l+b)}{2l}$	$-\frac{Pa^2}{2l}$	$+P$	
18		$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	$+ql$	
19		$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{1}{24}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	
20		$-\frac{5}{24}ql^2$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	
21		$-M\frac{b}{l}$	$-M\frac{a}{l}$		
22		$-\frac{qa^2}{6l}(3l-a)$	$-\frac{qa^3}{6l}$	$+qa$	

$$Q_{BA} = -\frac{6i}{l} \left(\varphi_A + \varphi_B - 2\frac{\Delta_{AB}}{l} \right) + Q_{BA}^q = 0$$

据此可求得

$$\frac{\Delta_{AB}}{l} = \frac{1}{2} (\varphi_A + \varphi_B) - \frac{Q_{BA}^q l}{12i} \quad (b)$$

可见在此情况下, $\frac{\Delta_{AB}}{l}$ 为 φ_A 和 φ_B 的函数, 它不是独立的, 将式(b)代入式(10-5), 即得一端固定另一端定向支承等截面直杆的转角位移方程

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i(\varphi_A - \varphi_B) + M_{AB}^q \\ M_{BA} &= i(\varphi_B - \varphi_A) + M_{BA}^q \end{aligned} \right\} \quad (10-9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^q &= M_{AB}^q + \frac{1}{2} Q_{BA}^q l \\ M_{BA}^q &= M_{BA}^q + \frac{1}{2} Q_{BA}^q l \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

即为这种梁的固端弯矩。

四、单跨超静定梁的形常数和载常数

利用上述单跨超静定梁的转角位移方程, 可以求得这些梁在各种外因单独作用下的杆端弯矩和杆端剪力。其中, 由支座位移引起的杆端力是与荷载无关而只与杆件截面尺寸、材料性质有关的常数, 一般称为形常数; 而由荷载产生的杆端力则称为载常数。上述各常数在位移法和渐近法(见第十一章)中是经常用到的, 为了便于今后应用, 特将上述各种常数列于表 10-1 中。

§ 10-4 位移法的典型方程和示例

一、无侧移刚架的计算

先就图 10-11a 所示无侧移刚架(即无结点线位移刚架)说明位移法方程的建立。

该刚架只有一个独立的结点转角 Z_1 , 设用附加刚臂固定结点 1, 则可得到图 10-11b 所示的基本结构, 其上各杆已变成单跨超静定梁, 它们的内力可利用 § 10-3 中已导出的转角位移方程或表 10-1 来进行计算。但是, 原结构与基本结构存在明显的差异, 即原结构在结点 1 处的两个杆端弯矩 M_{12} 和 M_{13} 是互相平衡的, 而基本结构由于结点 1 处加上附加刚臂, 多了一项外来的约

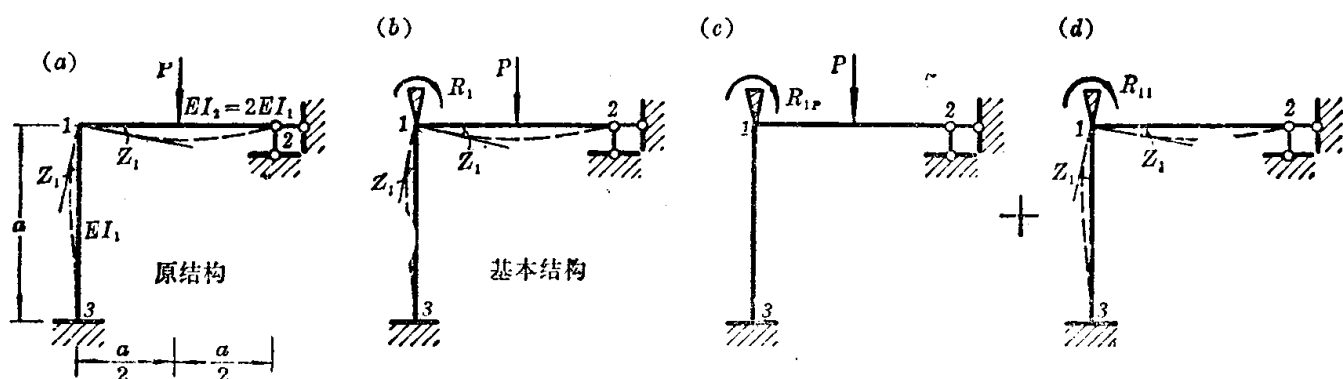


图 10-11

束力——反力矩 R_1 。这时，结点 1 的两个杆端弯矩便不能互相平衡。这就表明，基本结构的受力情况与原结构并不能等同起来，二者的内力分布是不一样的，只有在创造一定的条件之后，才有可能使基本结构向原结构转化。这个转化条件是必须消除掉附加刚臂上的反力矩 R_1 。基本结构结点 1 处的反力矩 R_1 之所以存在，其原因在于结点 1 不能自由转动。为此，可从变形方面着手：放松附加约束，让结点 1 转动到原来的位置，使 R_1 自然地消失。或者说，为了消除附加刚臂上的反力矩 R_1 ，使基本结构能与原结构保持内力分布的一致，必须使基本结构的变形恢复到原结构那种状态。这一过程可分两步来进行：

第一步先固定结点 1 不转动，并使基本结构承受原来的荷载 P (图 10-11c)，此时，在附加刚臂上将产生反力矩 R_{1P} ；

第二步使基本结构的结点 1 发生与原结构相同的实际转角 Z_1 (图 10-11d)，此时，在附加刚臂上将产生反力矩 R_{11} 。

经过上述两步(相当于先固定后放松)之后，可使基本结构恢复到原结构那种状态，于是 R_1 也就自然消失，即 $R_1 = 0$ 。根据叠加原理，有

$$R_1 = R_{1P} + R_{11} = 0 \quad (a)$$

式中 R_{11} 是与 Z_1 有关的量，为了计算方便，可把 Z_1 这个未知量从 R_{11} 中分离出来。为此，令 r_{11} 表示 $Z_1 = 1$ 时在附加刚臂上产生的反力矩(图 10-12a)，则有 $R_{11} = Z_1 r_{11}$ 。以此代入式(a)得

$$r_{11} Z_1 + R_{1P} = 0 \quad (b)$$

这就是用来求解基本未知量 Z_1 的位移法方程。

为了求出位移法方程中的系数和自由项，可在基本结构上作出 $Z_1 = 1$ 时的 \bar{M}_1 图和荷载 P 作用下的 M_P 图，分别如图 10-12a、b 所示。

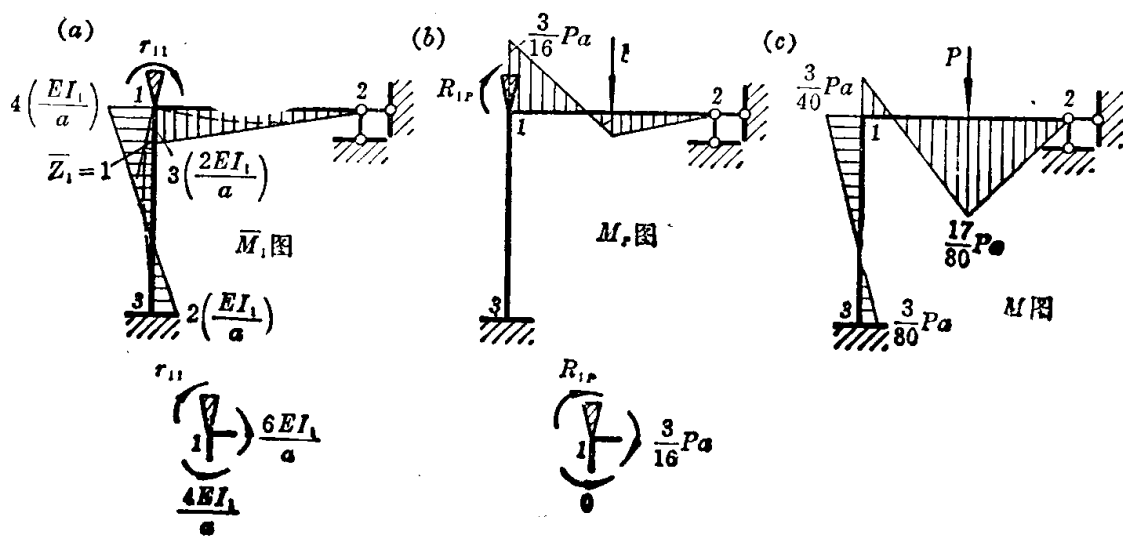


图 10-12

由图 10-12a 取结点 1 为隔离体，利用力矩平衡条件

$$\sum M = r_{11} - \frac{6EI_1}{a} - \frac{4EI_1}{a} = 0$$

可得

$$r_{11} = \frac{10EI_1}{a}$$

规定 r_{11} 的正方向恒与所设 Z_1 方向一致, 故它必为正值。

同理, 在图 10-12b 中取结点 1 为隔离体, 利用力矩平衡条件可求得 $R_{1P} = -\frac{3}{16}Pa$, 其中负号表示 R_{1P} 的方向与所设 Z_1 的方向相反。

将所求得的系数和自由项代入式 (b), 即可解出

$$Z_1 = \frac{3Pa^2}{160EI_1}$$

结点 1 的转角 Z_1 求得后, 可按式

$$M = Z_1 \bar{M}_1 + M_P$$

叠加求出最后弯矩图, 如图 10-12c 所示。

弯矩图作出后, 即可按第三章所述利用杆端弯矩求杆端剪力的方法作剪力图。例如, 为求 12 杆两端的剪力值, 可从图 10-12c 中取图 10-13a 所示的隔离体, 由

$$\sum M_2 = \frac{3}{40}Pa + P \times \frac{a}{2} - Q_{12} \times a = 0$$

得
$$Q_{12} = \frac{23}{40}P$$

再由
$$\sum Y = Q_{12} - P - Q_{21} = 0$$

得
$$Q_{21} = -\frac{17}{40}P$$

最后剪力图如图 10-13c 所示。

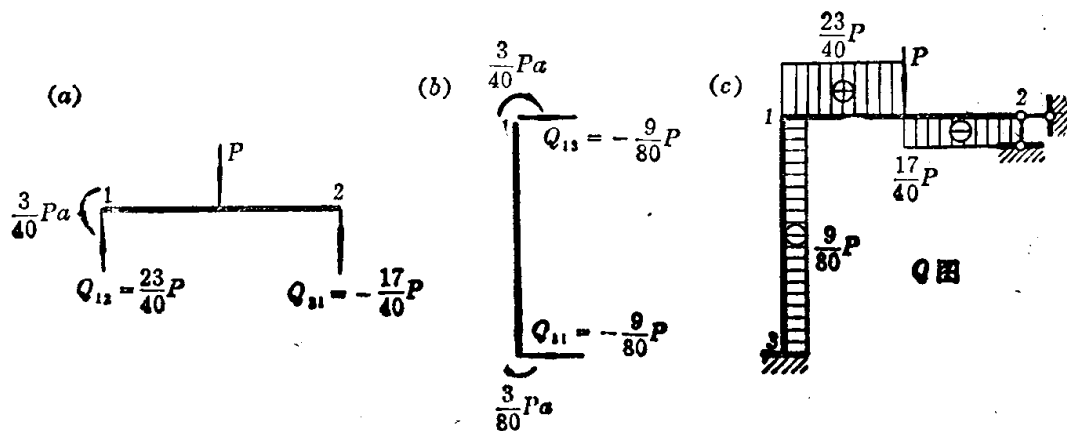


图 10-13

求得各杆剪力值后, 即可利用结点平衡条件求各杆端轴力, 然后再绘出轴力图。例如取结点 1 为隔离体 (图 10-14a), 由平衡条件

$$\sum X = N_{12} - Q_{13} = 0$$

得
$$N_{12} = Q_{13} = -\frac{9}{80}P (\text{受压})$$

同理, 由
$$\sum Y = Q_{12} + N_{13} = 0$$

得
$$N_{13} = -Q_{12} = -\frac{23}{40}P (\text{受压})$$