高等学校教材

# 物理光学

廖延彪 编

電子工業出版社

# 物 理 光 学

廖延彪 编

電子工業出版社

## 内容简介

本书从光的电磁理论出发讨论光在传播过程中所发生的各种现象的规律及其应用。全书基本内容包括：光波的基本性质，光的干涉，光的衍射，光的吸收、色散和散射，晶体光学基础等五章。另外还有一个附录：张量的基本知识。

本书可作为高等工科院校激光专业的教科书，也可供高等学校的其他有关专业的师生及科技人员参考。

物理光学
廖延彪 编
责任编辑：高 平
*
电子工业出版社出版（北京市万寿路）
山东电子工业印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
开本：787×1092 1/16　印张：17　字数：393千字
1986年3月第1版　1986年4月第1次印刷
印数：5000册　定价：2.80元
统一书号：15290·314

# 出　版　说　明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》、中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二年～一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

# 前　　言

本教材系由电子物理与器件教材编审委员会激光与红外编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由清华大学廖延彪编写，上海交通大学赵家驹、蒋秀明主审。编写和审定均依据激光与红外编审小组审定的编写大纲进行。

本课程的参考教学时数为80学时，其主要内容如下。第一章是光波的基本性质，它从光的电磁理论出发，讨论了光波在各向同性媒质界面以及金属表面上的反射和折射。第二章讨论光的干涉，其中包括双光束干涉、多光束干涉、法卜里-珀罗干涉仪和光源的相干性，最后对光学薄膜作了简单介绍。第三章是光的衍射。本章首先介绍标量衍射理论，在此基础上讨论几种典型衍射屏的夫琅和菲衍射和菲涅耳衍射。第四章是从经典理论的角度对光的吸收、色散和散射等现象作了简要的说明。第五章是晶体光学基础。从各向异性媒质中某电磁场方程组出发，讨论了平面光波在晶体表面上的反射和折射；用解析法和图解法分析光在晶体中的传播。对晶体的电光效应作了较详细的讨论，对于晶体的旋光性和磁致旋光效应也作了必要的介绍。在附录中简要介绍了张量的基本知识。由于各校教学计划略有不同，在使用本教材时，可根据具体情况有所侧重，有所取舍。

在本教材编写过程中，西北电讯工程学院孙承永同志，天津大学李昱同志对本书提出许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1985年5月

# 目　录

# 第一章　光波的基本性质

本书主要是讨论光的波动性。光是电磁波，因此，要了解光的波动性，就必须首先知道电磁波有些什么基本性质。诸如：电磁波在均匀媒质中传播时，其传播方向、能量密度以及偏振态等要发生什么变化，这些变化有些什么样的规律，这些就是这一章所要解决的主要问题。

本章主要介绍光的电磁理论。它首先给出麦克斯韦的场方程及其在透明媒质中所得的波动方程。然后分别介绍标量波（给出波的表达式）和矢量波（讨论偏振态问题），由此出发依次导出光波在均匀媒质的分界面上所必须遵守的几个基本规律：确定光波传播方向的反射和折射定律，给出入射光波与反射、折射光波振幅比以及相位变化关系的菲涅耳公式等。最后，讨论光波在金属界面上的反射和折射。

## §1-1　电磁场基本方程

### §1-1-1　麦克斯韦方程组

光是电磁波，它具有电磁波的通性。与无线电波相比，只不过光波的频率要高得多。因此，光波的一些基本性质都可以从电磁场的基本方程推导出来。这些方程就是众所周知的麦克斯韦方程组。它们的推导可在任一本电磁学教程中找到，所以不在这里重复，这一章只给出一些结论。

真空中的电磁场由电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 两矢量描述。而为描述场对物质的作用，例如光波在透明媒质中传播的情况，则需再引进电感强度 $\boldsymbol{D}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 以及电流密度 $\boldsymbol{j}$ 三个矢量。在场中每一点，这五个矢量随时间和空间的变化关系则由下述麦克斯韦方程组给出：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dot{\boldsymbol{D}} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{B}} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{4}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{D}}$、$\dot{\boldsymbol{B}}$ 分别为 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 对时间的偏导数，即

$$\dot{\boldsymbol{D}}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\dot{\boldsymbol{B}}=\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$\rho$ 为场中自由电荷密度，$\nabla$ 为哈密顿算符：

$$\nabla=\boldsymbol{I}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{I}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{I}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

式中$\boldsymbol{l}_x$，$\boldsymbol{l}_y$，$\boldsymbol{l}_z$是沿$x$，$y$，$z$的单位矢量。式(1)说明，传导电流或随时间变化的电场要产生磁场；或者说：磁场的场源是$\boldsymbol{j}$和$\dot{\boldsymbol{D}}$。这是全电流定律或安培环路定律的微分形式。式(2)说明：随时间变化的磁场在周围空间要产生电场。这是电磁感应定律的微分形式。式(3)则说明：空间无磁荷存在，即磁通是连续的，磁力线是无头无尾的。式(4)则是高斯定律的微分形式。若能求出场中空间每一点$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$随时间的变化关系，则光波的性质也就可以知道了。

## §1-1-2 物质方程

为了能从上述四个微分方程中求出$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$等几个基本矢量，尚需补充以下几个方程：

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{7}$$

式中$\sigma$是媒质的电导率；$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，是媒质的介电常数，其中$\varepsilon_r$是相对介电常数，$\varepsilon_0$是真空的介电常数；$\mu=\mu_r\mu_0$，是媒质的磁导率，其中$\mu_r$是媒质的相对磁导率，$\mu_0$是真空的磁导率。

式(5)是欧姆定律的微分形式。若媒质的$\sigma\neq0$（即$\sigma$不能忽略不计），则此媒质具有导电性，这之中包括：金属、电解液、半导体等导电材料。电磁波在这种媒质中传播时要衰减，因电磁波的一部分能量会转化成焦尔热而被消耗。本书主要讨论光在透明媒质(例如：水、玻璃、石英晶体等)中的传播问题。在理想情况下，这类媒质对光没有吸收(因是透明媒质)，因而它必定是绝缘体，即$\sigma=0$（因媒质中无焦尔热损耗）。因此在讨论光在无吸收的透明媒质中的传播问题时，就不必考虑式(5)，矢量$\boldsymbol{j}$也就处处为零。

式(6)和(7)两式说明$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$是相互连系的，它们之间的连系完全由媒质的$\varepsilon_r$和$\mu_r$决定。对于大多数媒质，其中包括对光波透明的电介质，其$\mu_r$值实际等于1，即$\mu=\mu_0$。因此，对于光在透明媒质中传播的问题，均有$\mu=\mu_0$的关系。

由此可见上述三个关系式反映了在电磁场作用下的媒质的特性。因此，这一组关系式一般称为物质方程。注意：这三个关系式只对各向同性的(即媒质的物理性质与方向无关)媒质成立。对于各向异性的媒质，$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$之间有更复杂的关系存在(参看第五章)。

最后，矢量$\boldsymbol{j}$和电荷密度$\rho$之间尚需满足电荷守恒定律(又称电流连续性原理)：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{8}$$

即场中某一点电流密度矢量$\boldsymbol{j}$的散度，等于该点单位时间内电荷密度的减少。

这个关系式可从(1)式直接推出。对(1)式两边取散度则有：

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\Delta\cdot\boldsymbol{j}+\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{D}}$$

再利用

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=0$$

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{D}}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

最后得 $$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

## §1-1-3 能量定律，波印廷矢量

上面我们给出了$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$四个基本量所应满足的基本关系式。但是对于光学问题来说，这几个量只有辅助的意义。因为在光学中它们都是无法直接测量的量，而在光学中能够测量且又必需知道的一个量则是光强度。为此有必要再从麦克斯韦方程组中推导出场的能量定律。

由式(1)和(2)有：

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} \tag{9}$$

又由矢量计算公式有：

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

而 $$\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{E}\right]=\frac{\partial}{\partial t}[w_e+w_m] \tag{10}$$

式中 $$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \tag{11}$$

$$w_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{12}$$

是场中每一点的电能密度和磁能密度。

于是式(9)可写成：

$$-\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

再把上式对任一体积$V$求积分，并利用数学上的高斯定理，则有

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V(w_e+w_m)dV=\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}dV+\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}dS$$

或 $$-\frac{\partial W}{\partial t}=\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}dV+\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{13}$$

式中最后一个积分是对包围体积$V$的整个曲面求积分，$\boldsymbol{n}$是曲面上的单位法线，取曲面的外法线方向为正方向。而

$$W=\int_V(w_e+w_m)dV \tag{14}$$

是体积$V$内电磁场的总能量，$-\frac{\partial w}{\partial t}$是其随时间的减少率；右边第一项是单位时间内体积$V$中所消耗的焦尔热，第二项是单位时间内从体积$V$中向外流出的能量，即流过封闭曲面的能流。因此它实质上是说明体积$V$内电磁场的能量关系：在一封闭曲面内，电磁场能量的减少等于在此封闭曲面内所消耗的焦尔热和从此封闭曲面内流出的电磁能。它是能量守恒定律在电磁场中的具体表达式，因此式(13)也称为电磁场的能量定律。一般设

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{15}$$

$\boldsymbol{s}$称为波印廷矢量。由式(13)可知，它表示单位时间内通过单位面积的能量流，即能流

密度。$s$ 对某一观察时间内求平均，就是常说的光的强度，亦称为波的强度。

### §1-1-4 波动方程

麦克斯韦方程组只给出了场和场源之间的关系，即 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 之间的相互关系。为了求出电磁场在空间的传播规律，则应进一步求出每一个量随时间和空间的变化规律，也就是要从麦克斯韦联立方程组中求解出 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 诸量来。

为此，利用麦克斯韦方程组和物质方程可得：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times\dot{\boldsymbol{B}}=-\nabla\times(\mu\dot{\boldsymbol{H}})$$

而

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

由于目前我们所关心的是电磁波(也就是光波)在透明媒质中的传播问题，因此有：$\rho=0$，因而 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 以及 $\sigma=0$，因而 $\boldsymbol{j}=0$。于是上式简化为：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

并有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dot{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}$$

因此

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{16}$$

同理有

$$\nabla^2\boldsymbol{H}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{17}$$

这就是著名的波动方程。它告诉我们：电磁场是以波的形式在空间传播。在推导上式中，我们利用了 $\mu$ 和 $\varepsilon$ 均为常数这个条件，因此上述波动方程只适用于均匀媒质。

式(16)和(17)中的 $v$ 是电磁波在媒质中传播的速度。它和电磁波在真空中传播的速度 $c$ 之间的关系是

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{c}{n} \tag{18}$$

其中$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，目前的 $c$ 值为299,792,458米/秒。而$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$是媒质的折射率。对于非铁磁质，$\mu_r\approx1$，$n=\sqrt{\varepsilon_r}$，一般的透明媒质就是这种情况。各种媒质 $n$ 值的大小可以从手册中查出，但查时要注意：$n$ 值随光波频率(即真空中光波的波长)而变。尤其对不同波段，$n$ 值变化更大，详细情况以后再讨论(参看第四章)。

## §1-2 电 磁 波

从波动光学的观点，光是极高频的电磁波。通常所说的光扰动或光振动是指光波的电场强度与磁感强度。由于光的许多方面的效应(例如使感光材料感光，光电效应等)主要通过其电场的作用表现出来，所以常把光波的电场强度(矢量)称为光矢量。本书讨论的光振动即可理解为随时间和空间变化的光矢量。

有光波存在的区域就是光场，光场中同时有光能量在传播。光场中各点的光振动，在不同的地方，一般来说，其振幅大小不同，相位也不同。例如，离光源远处的光振动其相位较之近处要落后些，光矢量值也小些，这种情况说明光场中光振动有一定分布。光振

动在空间的分布按波面形状可分为平面波、球面波、柱面波等。光振动按频率则可分为单色光、准单色光和多色光。若无特别说明，本书讨论的对象都是单色光。

光波是横波，光矢量与光波传播方向垂直，因此要完全描述光波还必须指明光场中任一点、任一时刻光矢量的方向，即光波是一种矢量波。光的偏振现象就是光的矢量性质的表现。然而研究表明，在光的干涉、衍射等许多现象中，特别是当光波为非偏振光（或称自然光，这时光矢量迅速地且随机地不断改变方向）时，在理论分析中不计光矢量的方向性而用一个标量表示光振动，或者说只考虑光矢量的任一个直角坐标分量，所得结果相当精确地与实际情况相符（参看第二、三章）。因此，在这些现象中，可以把光波近似地当作标量波处理。本书凡不涉及光的偏振现象时，将主要地讨论这种近似的标量波理论。

上面我们得出了在均匀、透明、各向同性媒质中电磁波的场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 所应满足的波动方程：§1-1式(16)和(17)。因此，场矢量的每个直角分量 $f(\boldsymbol{r}, t)$ 都应满足齐次波动方程

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

下面我们再进一步给出在这种媒质中波动方程的两个最简单的解：平面波和球面波及其最简单的数学形式：谐波的数学表达式。最后讨论光波的偏振特性及其计算方法。

## §1-2-1　平面波　球面波　谐波

### 一、平面波

平面波是指波面（任一时刻振动状态相同的各点所组成的面）为一平面的波。如图1-1($a$)所示，若 $P$ 为 $t$ 时刻的波面，则 $P$ 上任一点 $A$ 的振动状态与 $B$ 的振动状态相同。图中 $OB$ 与平面 $P$ 垂直，是波面 $P$ 的法线方向。这时，凡可以用

$$f = f(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l},\ t) \tag{2}$$

这一类函数表示的式(1)的解，我们就说它代表一个平面波，因为它符合平面波的定义：在各个时刻，在与单位矢量 $\boldsymbol{l}$ 垂直的各个平面（$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}=$常数）上，$f$ 是一常数。式中 $\boldsymbol{r}$ 是平面上任一点 $A$ 的位置矢量，$\boldsymbol{l}$ 是沿波面法线方向的单位矢量。

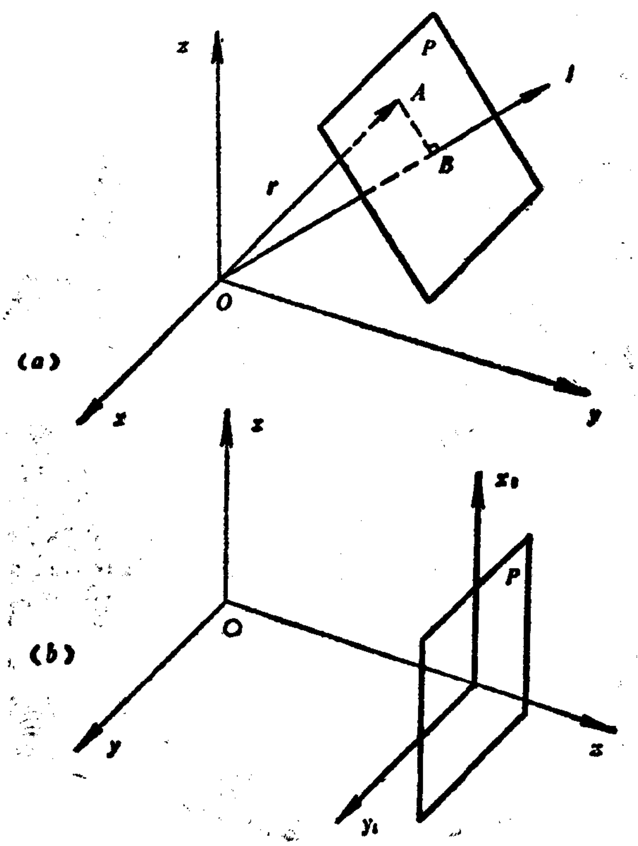

图1-1　平面波的图示

对于平面波，一般都选 $\boldsymbol{l}$ 为直角坐标的 $z$ 方向，这样可使以

后的计算简化。于是

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}=z \tag{3}$$

见图1-1($b$)，而式(1)则变成

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

为了求解这个方程，我们把它改写成下面的形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0$$

再引进新的变量

$$p=z-vt,\quad q=z+vt$$

同时，容易证明

$$\frac{\partial}{\partial p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial}{\partial q}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

因而 $f$ 的方程变为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}=0$$

把这个方程对 $p$ 积分，得到

$$\frac{\partial f}{\partial q}=F(q)$$

式中，$F(q)$ 是一个任意函数。再积分一次，就得到 $f=f_1(p)+f_2(q)$，这里的 $f_1$ 和 $f_2$ 是任意函数。因此

$$f=f_1(z-vt)+f_2(z+vt) \tag{5}$$

这就是波动方程式(4)的一般解。现在说明这个解的物理意义。先设 $f_2=0$，则 $f=f_1(z-vt)$。显见，在每一个 $z$ 等于常数的平面内，场都在随时间而变化；而在某一时刻 $t$，场则因 $z$ 值而异。但是，对于满足$z-vt=$常数的 $z$ 和 $t$ 值来说，场都有相同的值。例如，经过任意时间间隔 $\Delta t$ 以后，$(z,\ t)$ 变成$(z+v\Delta t,\ t+\Delta t)$，这时 $(z-vt)$ 保持不变。同理，在沿波面法线方向经过任意空间间隔$\Delta z$后，$(z,t)$变成$(z+\Delta z, t+\Delta z/v)$，这时 $(z-vt)$ 仍保持不变。所以 $f_1(z-vt)$ 确实代表了一列沿 $z$ 轴正方向传播的平面波。而 $OB$ (即 $\boldsymbol{l}$)就是波的传播方向。同样容易判断，$f_2(z+vt)$ 是沿相反方向，即沿 $z$ 轴的负方向前进的平面波。所以式(5)是平面波情况下波方程的一般解。

## 二、球面波

现在再给出波动方程的另一个简单解：球面波的解。球面波是指波面为一球面的波。一般从点光源发出的光波就是球面波。（当观察点到光源的距离比光源线度大十倍以上时，这光源就可看作是点光源。）由于球面波的波面是球面，因此其相应表达式中的空间项就是$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x、y、z)$，而波方程(1)的解的形式则为

$$f=f(r,\ t) \tag{6}$$

$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因此有关系式

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r},\ \cdots\text{等。}$$

经过一定的计算就可得到

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) \tag{7}$$

于是波方程(1)变成:

$$\frac{\partial_2}{\partial r^2}(rf)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf)=0 \tag{8}$$

这时直接利用平面波的解可得

$$f=\frac{f_1(r-vt)}{r}+\frac{f_2(r+vt)}{r} \tag{9}$$

式中 $f_1$ 和 $f_2$ 仍为任意函数。这个结果说明球面波振幅随 $r$ 成反比变化。已经知道:平面波的振幅是一常数,不随距离 $r$ 而变。与平面波情况相似,$f_1$ 代表从原点(一般原点即为波源)向外发散的球面波,即沿 $r$ 正方向传播的波。而 $f_2$ 则代表向原点传播的会聚的球面波,即沿 $r$ 负方向传播的波。

由图1-2可见,一点光源发出的球面波,当离开光源一定距离后,波面为一定大小的球面波就可看成是平面波。因此上节所讨论的平面波——一种实际上并不存在的、理想的波——在这种情况下就可以应用了。

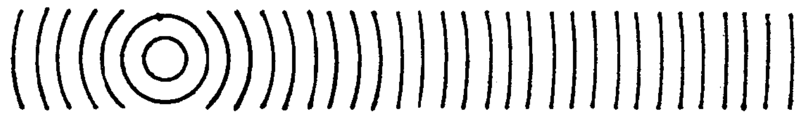

图1-2 远处的球面波可近似看成是平面波

三、谐波

最后我们给出前两种解的一个最简单,但又是最基本、最常用的数学形式:谐波(亦称为正弦波或余弦波)的数学表达式。所谓谐波是指空间每点的振动是时间变量的谐函数的波。其数学表达式为

$f(x, y, z, t)=a(x, y, z)\cos[\omega t+\phi(x, y, z)]$这是单色波。式中 $\omega=2\pi\nu$ 表示圆频率,$\nu$ 表示频率,为常量;$a$ 表示振幅;$\omega t+\phi$ 称为相位,它的每一个值标志谐振动的一种状态;$\phi$ 表示初相位。在光场中的不同点,$a$ 和 $\phi$ 一般有不同的值,所以 $a$ 和 $\phi$ 应表示为光场中任一点的坐标($x, y, z$)的函数。因为在光场中任一点,振幅 $a(x, y, z)$ 可代表光振动的大小,$\phi(x, y, z)$ 则说明任一光振动状态发生的先后,所以 $a(x, y, z)$ 和 $\phi(x, y, z)$就表达了光振动在光场中的分布。

对于平面谐波按式(5)有

$$f=A\cos[\omega(t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}/v)] \tag{10}$$

其特点是振幅 $A$ 为常量。波的时间周期是 $T$,$T=2\pi/\omega$;空间周期是 $\lambda$。由于余弦函数的周期是 $2\pi$,而在波传播的空间,从位置 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}$ 变到 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}+\lambda$时,上式保持不变。因此有

$$\omega\frac{\lambda}{v}=2\pi$$

或

$$\lambda=2\pi\frac{v}{\omega}=\frac{v}{\nu}=vT \tag{11}$$

在真空中则为

$$\lambda_0 = cT = n\lambda \tag{12}$$

真空中波长为媒质中波长的 $n$ 倍，$n$ 是媒质的折射率。

如上所述，除周期 $T$ 外，实用上还用圆频率 $\omega$ 表示波的时间周期性。$\omega$ 表示单位时间内波的相位变化量，即：$\omega = 2\pi/T$。而 $\Delta t$ 时间内波的相位改变量则为

$$\delta = \omega\Delta t \tag{13}$$

与此相似，除波长 $\lambda$ 外，实用中还引进一个波矢量 $k$ 来表示波的空间周期性。$k$ 的方向就是波传播的方向。$k$ 的大小则是单位长度内波的相位变化量，即

真空中
$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \tag{14}$$

媒质中
$$k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v} \tag{15}$$

所以矢量 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{l}_k$ 叫做媒质中的波矢量或传播矢量，$\boldsymbol{k}_0 = k_0\boldsymbol{l}_k$ 则是真空中的相应矢量。$\boldsymbol{l}_k$ 是 $k$ 方向单位矢量，而 $\Delta l$ 长度内波的相位变化量则为

$$\delta' = k\Delta l \tag{16}$$

常数 $\delta$ 也可用程长 $l$ 的概念来代替，它是当相位增加 $\delta$ 时，某一波阵面所后退的距离：

$$l = \frac{v}{\omega}\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta$$

波矢量 $k$ 是物理光学中一个重要的物理量。引进 $\omega$、$k$ 后可使谐波的表示式更简洁，例如，对于平面波

$$f = A\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0) \tag{17}$$

对于球面波

$$f = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \delta_0) \tag{18}$$

这就是常用的余弦波的表示式。

由式(17)可见，给定平面波的波矢量 $k$（即给定 $\lambda$或 $\nu$，并给定传播方向的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）就可求出光场中任意一点$(x, y, z)$处的光振动 $f(x, y, z, t)$。这时光场中的振幅

$$a(x, y, z) = A \tag{19}$$

相位

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = -k(\boldsymbol{l}_x\cos\alpha + \boldsymbol{l}_y\cos\beta + \boldsymbol{l}_z\cos\gamma)\cdot(x\boldsymbol{l}_x + y\boldsymbol{l}_y + z\boldsymbol{l}_z)\\ &= -k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\end{aligned} \tag{20}$$

对于球面波，由式(18)可得光场中的振幅和相位分别为

$$\begin{aligned}a(x, y, z) &= A/r,\\ \phi(x, y, z) &= -kr\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $r$ 取正号表示发散的球面波，取负号表示会聚的球面波。若光源坐标为$(x_0, y_0, z_0)$，则

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2} \tag{22}$$