保险数学

—保险经营中的计算

胡炳志 著

中国金融出版社

保险数学

——保险经营中的计算

胡炳志 著

中国金融出版社

责任编辑：李祥玉

保 险 数 学

——保险经营中的计算

·

中国金融出版社 出 版

新华书店北京发行所发行

地质出版社印刷厂印刷

·

787×1092毫米 1/32 11.875印张 257千字

1991年8月第一版 1991年8月第一次印刷

印数：1—4000

ISBN 7-5049-0729-4/F·370 定价：5.65元

序

数学对于保险理论和经营管理的重要性已日渐为从事保险实务以及教学工作者所共识。但目前我国对数学在保险中的应用，除人寿保险数学已有几本专著外，其他方面系统的论述还很少见。能理论联系实际，全面论述数学在保险中应用的书籍更感缺乏。有感于此，武汉大学专攻数学，毕业后任教母校金融保险系多年的胡炳志同志经过勤奋学习，广泛参阅中外资料，博采众长，又通过教学实践，在发挥其数学及外语专长并具有良好的经济尤其是保险专业知识基础上，多次修改文稿，编著了这部具有一定特色论述数学在整个保险领域中应用的《保险数学》。

综观本书有三个显著的特点：一是突破了局限于寿险数学的框框，全面地论述了数学在整个保险领域的应用；二是数学知识与保险实务结合比较紧密；三是论述深入浅出，对概率、方差、标准差、大数法则等基本数学原理在保险费率、经营管理、理赔、准备金提存以及统计分析各方面的运用均有通俗的阐述，即使对高等数学知识不多的读者也容易读懂。虽然书中有些结论与实际应用直接联系还不够紧密，但任何理论都不可生搬硬套。总的来说本书的实用价值仍然是很高的。

《保险数学》一书可作为我国目前大中专保险专业学生的

教材或参考资料，也可供金融其它专业学生学习之用，对保险理论工作者及实际工作者也都有一定的使用价值。

胡炳志同志正当盛年，风华正茂，笔者喜读本书，撮述数言，愿将本书介绍给共好，并淬励作者继续努力，以表示笔者对保险理论研究不断深入提高和发展的殷切期望。

周 庆 瑞

1990年10月

前　言

自1662年约翰·格兰特（John Graunt）发表了有关生命表思想的论文，1671年荷兰数学家约翰·德·韦特（John de Witt）应用概率理论算出年金价格以后，数学在保险中的应用就越来越受到人们的重视，大数法则及概率论是保险的数理基础，已为人们所公认。但纵观国内目前数学在保险应用方面的书籍，多局限于寿险数学的范围，仅李志贤先生早年（50年代）根据《苏联国家保险》著有一本《保险数学》，讨论范围比较广泛。但时至今日，尚无一本与现代保险相联系的保险数学著作，因此，笔者不揣愚昧，开始了本书的创作。

笔者通过几年的教学实践，几经易稿，才有了本书现在的面貌。本书特别强调数学与保险的有机结合，注重分析某些数学工具应用到保险领域时的条件及方法，尽可能克服数学与保险相分离的弊端。在内容安排上，着重考虑了如下几点：（1）保险的数理基础，重点分析概率论、大数法则与保险的联系以及它们在保险中的重要地位及应用。（2）寿险数理及计算，重点讨论了寿险中各种计算原理及方法。（3）保险经营的计算，讨论费率（尤其是非寿险费率）的计算、调整及理赔的计算、准备金的提存。（4）统计分析在保险中的应用，运用了数理方法进行保险经济预测及保险经济中的因

素分析。（5）风险的度量及分析，主要从自保还是投保，分保与自留决策等方面来分析与保险有关的风险。

笔者写本书的目的，是想为保险专业大中专生提供一本试用教材，以满足教学急需，也是为保险事业的实际工作者提供一本实用性读物。既然本书有关数学内容都是为解决保险问题引进的，所以，为求避免使用高深的数学知识，只要读者具有一般高等数学及概率论初步的知识，便可顺利阅读本书。书中每章后面安排的习题，目的在于帮助读者掌握书中的主要内容并有所提高。

由于笔者才疏学浅，书中错误之处在所难免，甚至很多，恳请同行、专家及读者予以指正。

本书的写作，汲取了海内外同行有关的成果；中国保险学会理事周庆瑞先生对本书的部分内容提出了许多建设性意见，并为之作了序；张旭初教授生前对本书的构思、写作给予了具体指导；中国金融出版社对本书的出版给了极大的支持；责任编辑李祥玉同志在多方面给予了关心与帮助；在此一并表示感谢。

胡 炳 志

1991年3月于珞珈山

目　　录

第一章　概率分析与保险

常言道：天有不测风云，人有旦夕祸福。

在我们的日常生活中，常常有难以预料的损失或灾害发生，给经济生活造成不安定。譬如一位正当壮年的人，有可能遇车祸或疾病而不幸身亡，这会给他的家庭在精神上带来沉重打击，在经济上带来重大损失。又如某人的电冰箱有可能因意外事故而发生损失，某家的彩电有可能被盗等。诸如此类的风险都是保险要研究的。保险所承担的风险，就是这些既可能发生，又可能不发生的随机事件。了解这些随机事件的发生与否，发生的可能性的大小，对我们如何预防、避免风险是很重要的。

“一种科学，只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。”❶概率论是从数量方面研究随机现象规律的一种数学理论。这就使保险学与概率论自然而然地紧密地联系起来了。

保险人如何确定某类保险标的的损失概率，进而确定损失期望值，是制定纯费率的先决条件。要确定损失概率，就要运用概率论及统计分析，要估计损失的波动，保障经营财务的稳定，就要运用大数法则。可见，保险是建立在一定的数

---

❶ 《回忆马克思恩格斯》，人民出版社1957年版第73页。

理基础上的。本章对保险的数理基础进行讨论。

第一节　概率

一、随机事件

我们先做这样一个实验：拿一枚硬币向上抛掷，观察硬币落在地面上时出现正反面的情况。在基本条件不变的情况下，如果我们连续进行长时间、大量的观察，便会得到一系列的结果，这些结果中有的是正面，有的是反面。我们再来观察某一拥有若干辆汽车的车队：通过几年的观察，我们会发现，这个车队，有的年有3辆车发生损失，有的年有5辆车发生损失，有的年只有1辆车发生损失，有的年没有车发生损失，等等。像以上所举两例，时而出现这种结果，时而出现那种结果，呈现出一种偶然性现象。我们把这种偶然现象叫做随机现象。对于随机现象，我们通常关心的是在试验或观察中，某个结果是否出现或发生。我们把这些结果称为随机事件，简称为事件。例如，某类汽车保险，有1000辆车主购买了这类保险，我们关心的是，在一年中，有多少辆汽车将发生损失。发生损失的车辆数可能是0—1000中的任意一个整数，也就是说，损失的结果是一个随机事件。又如，某人投保了意外伤害险，由于他可能因意外而受伤害，故他可能得到保险给付金，而随着受伤害的程度不同，他能得到的给付金额是0到保险金额之间的某一个数，也就是，他能得到的给付金额的结果是一个随机事件。可见随机事件在保险中是普遍存在的。

二、概率的意义

当我们向上抛掷一枚硬币时，是出现正面，还是出现反面，我们是无法知道的。但是假若硬币是均匀的，则直观上出现正面与反面的机会应该是相等的，即在大量实验中出现正面（或反面）的次数，应接近总数的一半。为了验证这一点，历史上有不少人做过这种实验。部分结果如表1—1所示。

表 1—1　抛掷硬币实验的部分结果

实验者	抛掷硬币次数：N	出现正面次数：M
蒲　丰	4040	2048
皮尔逊	12000	6019
皮尔逊	24000	12012

如果计算一下$\frac{M}{N}$的值，便得知上面三个实验中，出现正面的次数占总数的百分率分别为50.69％、50.16％、50.05％。可见，当试验次数越多时，其结果越接近我们的直观判断，即出现正面的次数为总数的一半。如前所述，出现正面这一结果是一个随机事件。在这里，这一随机事件发生的可能性为$\frac{1}{2}$。同样，如果我们长期观察一个车队发生损失的车数，则在一年中，车辆损失的各种次数的可能性接近于某一固定百分比。例如表1—2所示的就是某车队在一年中可能发生的损失与比例的关系。

表 1—2 车辆损失次数与可能性对照表

损失次数	可能性
0	60%
1	30%
2	7.5%
3	1.3%
4	0.8%
5次以上	0.4%

如果观察许多投保人获得的赔偿金，则在观察人数很多的情况下，各种赔偿金额出现的可能性大小亦有某种规律，即同一赔偿金额出现的次数与赔偿总次数的比率接近某一常数。

综上所述，我们得到：某一随机事件，经过长时间的观察，在试验中发生的次数与试验总次数的比率，几乎为一定值。这一定值，就是随机事件发生的可能性的大小。我们把它称之为随机事件的概率。

在此要说明的是：类似这种通过比率定义的概率，在概率论中被称之为古典概率。因此，这种概率定义并不是一般概率定义。但在保险学的应用上，我们暂时把古典概率的定义当作一般概率的定义。

一般地说，如果某随机事件有 n 个方法发生，有 f 个方法不发生，而每个方法出现的机会均等，则此随机事件发生的概率，由下面的公式计算：

$$P=\frac{n}{n+f} \tag{1.1}$$

用这种方法求得的概率，称为先知概率。

如果概率为0，则此事件将不可能发生，这种事件被称为不可能事件❶；如果概率为1，则此事件必然发生，必然发生的事件称为必然事件。利用公式（1.1）求概率，必须要有多种等可能的结果，其中一定的分数，代表某一特定结果发生的概率。例如，抛掷硬币，出现正面的概率为$\frac{1}{2}$，因为：（1）有两个等可能的结果——正面或反面，（2）正面出现为其结果之一。又如，在一副扑克牌中（除去怪牌），抽取一张黑桃的概率为$\frac{1}{4}$，这是因为：（1）共有52个相等可能的结果，（2）结果中有13次出现黑桃的机会，故一次抽中黑桃的概率为：$P=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$。在一副牌中，抽一张黑桃10点的概率为$\frac{1}{52}$，抽一张黑桃10点或者红心10点的概率为$\frac{1}{26}$，如果不论花色，则抽一张10点的概率为$\frac{1}{13}$。

但在很多情况下，概率并不能这样决定，原因是不能按等可能的结果进行分析。例如，求某一个40岁的人明年死亡的概率，某间房屋明年将发生火灾的概率等，都不能用上面的公式。对于类似这一类的概率，通常用比率来代替。第二章的大数法则将告诉我们：当观察数量增加时，某种结果发生次数的比率，将接近其真正的概率。

以上按相对次数所解释的概率，有时称为客观概率，在

❶ 在连续型概率条件下，0概率事件并不一定是不可能事件，但我们讨论的一般为离散型概率，故0概率事件为不可能事件。

求这一类概率时，必须要有重复的事件，否则无法说明长期中结果发生的比率。然而，用这样的概率定义来求某一个40岁的人在明年死亡的概率，显然是不恰当的，因为它不是重复事件。但把40岁的人在明年死亡的概率，解释为许多40岁的人中，明年将死亡的人数的比率，却是合理的。

应该说明的是，概率在保险上可有两种解释，一是损失的空间概率，指在非常大数目的风险单位中，同样风险单位在给定经验周期内发生损失的比率；一是损失的时间概率，指在非常长的时期内，同一风险单位在等长的周期内发生损失的比率。例如，当一个风险管理者声明某个仓库明年发生火灾损失的概率是$\frac{1}{10}$时，可能有下面两种解释：

1．在明年一年里，在相同条件下，具有相同风险的大量相互独立的仓库中，有$\frac{1}{10}$将遭受火灾损失。

2．一个仓库，在相同的风险条件下，经过很长时间的观察，火灾将在$\frac{1}{10}$的年数内发生。

概率还可以解释为相信程度，这就是所谓主观概率。这种观念，用于某些独特事件较为恰当。主观概率的数值，由估计者所获得的资料及其分析资料的能力与所持的意见等因素决定。大部分有重复的事件，虽有客观概率存在，但决策者必须常对此客观概率，加以主观估计。要使我们的决策符合客观规律，就应力求减少主观因素，使估计的概率与客观概率充分接近。为了不使问题复杂化，我们所说的概率，一般是指客观概率，除非有特别说明。

三、损失概率与纯费率

随机事件可以是任何事件，但在保险经营中，往往是指某种风险或损失。因此，随机事件的概率，在保险经营中往往是指损失概率。例如，某一车队明年有5辆车发生碰撞而遭受损失的概率，某项业务明年遭受10000元损失的概率等，都是指损失概率。

当我们把保险经营中的各种损失结果抽象成随机事件后，求相应的损失概率就转化成求某一随机事件的概率了。

保险费中的纯保险费是在风险事故发生时，用来作为赔偿的那部分金额，也就是说，“纯保险费总额＝未来赔偿金总额”，这就在理论上要求：“纯费率＝损失概率”。由此可见，损失概率对于保险人制定纯费率具有决定性作用。

损失概率，也像概率论中讨论的许多概率一样，有时并不是某一单个事件的概率。这就给损失概率的确定带来了困难。为了解决求损失概率的方法问题，下面讨论：互不相容事件，复合事件，选择性结果以及概率的计算。

四、互不相容事件

不可能同时发生的事件，称为互不相容的事件。例如某一产品不可能既是正品，又是次品。因而，事件“某产品为正品”与事件“某产品为次品”就是互不相容事件。互不相容事件在保险经营中是很多的，例如，“某人在明年死亡”这一事件，与事件“某人在明年年底仍然生存”，就是互不相容事件。

在客观概率的理论下，两项或两项以上两两互不相容的

事件集合中，有任一事件发生的概率，等于各项事件分别发生的概率的总和。

对于上述结论，我们可以简单证明如下：

假设我们考察的对象有E_1、E_2、…、E_n n个等可能出现的结果，如果用符号P(A)表示事件A发生的概率，则有：

$$P(E_1)=P(E_2)=\cdots=P(E_n)=\frac{1}{n}$$

现在假设A和B是两个互不相容事件。如果事件A的发生意味着Ei_1、Ei_2、…、Ei_k这些结果之一出现，则$P(A)=\frac{k}{n}$；（因为事件A有k次发生的可能。）如果事件B的发生意味着Ej_1、Ej_2、…、Ej_l这些结果之一出现，则$P(B)=\frac{l}{n}$。由于事件A和事件B是互不相容的，所以Ei_1、Ei_2、…Ei_k、Ej_1、Ej_2、…、Ej_l这些结果是互不相同的，因此，如果用A+B表示A和B中有任一结果出现，则事件A+B含有k+l个可能出现的结果，所以：

$$P(A+B)=\frac{k+l}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1.2)$$

这样我们就证明了，在事件A与事件B互不相容的情况下，事件A+B发生的概率，等于事件A发生的概率与事件B发生的概率之和。

对于两项以上的结果，我们可以利用上一结果和数学归纳法加以证明。

利用上述结论，可以计算某些损失概率。例如，某一汽车在明年发生碰撞损失1000元的同时，不可能又是发生碰撞