

SFITT

陈铭俊 陈仲英

算子方程及其 投影近似解

广东科技出版社

算子方程及其 投影近似解

陈铭俊 陈仲英

TOUYING JINSIJIE

广东科技出版社

粤新登字04号

Suanzi fangcheng jiqi touying jinsi jie

算子方程及其投影近似解

著 者: 陈铭俊 陈仲英

出版发行: 广东科技出版社(广州市环市东路水荫路11号)

经 销: 广东省新华书店

印 刷: 佛山粤中印刷公司

规 格: 850×1168 1/32 印张8.5 字数170千

版 次: 1992年9月 第1版 1992年9月 第1次印刷

印 数: 1—1 000册

ISBN 7—5359—0901—9/O·59

定 价: 10.00 元

算子方程及其投影近似解

陈铭俊 陈仲英

广东科技出版社

JY1114/26

告 读 者

现代世界的特点是：科学技术已成为综合国力的基础，许多国家都把增强科技实力，夺取科技优势，作为自己国家的重要国策和发展战略的核心。人们预测，在未来二十、三十年里，将是人类社会发展史上的一个巨大变革时期，这是因为，现代科学运动正在引发出生产力的巨大发展。谁掌握了科技进步的制高点，谁就掌握发展国民经济的制高点，谁就可以在以科技为基础的综合国力的国际竞争中处于领先地位。

那么，怎样传播科技进步的信息使之引发生产力的进步呢？应该说，在众多信息传递工具中，图书仍然是最有力的载体。可惜，由于种种原因，一个时期以来，图书出版难，科学专著出版更加困难！

问题已经到了非解决不可的时候了！

广东地处我国改革、开放的前沿阵地，又是我国改革、开放先行一步的地区，历史的责任是不容推托的。有鉴于此，1989年，广东科技出版社发起成立广东优秀科技专著出版基金会，为解决科技学术著作出版难的问题，开辟一个新途径。这一倡议，得到科技界、新闻出版界和大专院校的专家、学者以及关心科技事业的人士的热烈响应和支持；并且得到广东省领导部门、社会各界以及海外、港、澳的企业、社会团体、个人的慷慨赞助。在大家的支持下，基金会于1989年10

月正式成立，以钱伟长教授为首的一批知名的专家、教授热心地承担了基金会的顾问、评审委员工作，共同商定基金会扶持优秀科技专著出版的原则：依靠专家、公平竞争、择优支持，每年推荐一批符合要求的优秀科技与经济管理专著稿在广东科技出版社出版。基金会希望，通过缓解科技专著出版难，推动广东乃至我国科技事业的发展。

基金会成立以来，从本省以至首都，从海滨以至西北高原，为科学而献身的可敬的作者，纷纷送来珍贵的手稿，其中，许多是他们大半生心血凝聚成的精华；只是由于时间仓促，现在奉献给读者的著作，还未能完全做到遴选和出版来稿中最优秀的部分，不过，我们决心不停顿地努力下去，让更多优秀的科技著作陆续问世。

我们希望海内外各界人士继续大力支持广东优秀科技专著出版基金会的工作：向基金会推荐优秀科技专著；为基金会提供资金、条件；使基金会能在更广阔范围内，资助优秀科技专著的出版，在发展我国科技事业和迎接世界新技术革命挑战中，作出自己的贡献。

广东优秀科技专著出版基金会

广东优秀科技专著出版基金会

顾问、评审委员会

顾 问：钱伟长

（以下按姓氏笔画为序）

王 元	卢鸣谷	池际尚	李 辰
李金培	吴中伦	吴良镛	武泽民
郎景和	赵善欢	高由禧	裘维蕃
蒲蛰龙	谭浩强		

评审委员会

主 任：蒲蛰龙

委 员：（以姓氏笔画为序）

马俊林	邓铁涛	卢永根	卢明高
伍尚忠	许学强	刘振群	刘颂豪
李 辰	李任先	李岳生	李宝健
李炳熙	何镇陆	陈兴业	张士勋
张展霞	罗元恺	罗征祥	赵元浩
赵善欢	高由禧	高惠广	徐名滴
徐秉铮	黄衍辉	彭文伟	蒲蛰龙
欧阳莲			

内 容 简 介

本书旨在介绍算子方程及其投影近似解的一般理论, Galerkin 型方法、配置法和最小二乘法等都可视为投影方法的特例。本书研究的算子方程包括全连续线性算子方程, 一般线性算子方程, 单调非线性算子方程, 不动点方程和抽象算子发展方程。全书着重论述了方程的通常解或广义解的存在性、唯一性, 投影方法的近似可解性、收敛性、稳定性和误差估计, 并给出在积分方程和微分方程数值解中的应用例子。

前 言

在对各种各样的数学方程及其数值理论的研究和探讨中，人们常常把问题归结为某种算子方程加以讨论。算子方程及其近似理论，是理论数学和计算数学领域的一个重要的研究方向，同时也是研究方程数值解的一种重要的理论工具。

编写本书的目的，是向读者介绍算子方程及其投影近似解法的一些最主要的结果。全书共分六章。第一章概述算子方程近似求解的计算格式，主要讨论投影逼近格式的构造和性质。第二章讨论全连续线性算子方程及其投影近似解，包括特征值和特征向量问题。第三章讨论一般线性算子方程的古典解与广义解及其投影近似解，给出几个不同类型的一般框架。第四章介绍拓扑度理论，导出若干重要的不动点原理，并讨论不动点方程的投影近似解。本章可作为学习拓扑度的一个简明的独立材料。第五章讨论单调的和 K -单调的非线性算子方程及其扰动问题的投影近似可解性。第六章讨论了两类抽象算子发展方程的半离散和离散的投影近似解。各章均有应用举例，包括对于线性的和非线性的积分方程、常微分方程、椭圆型偏微分方程以及发展方程的应用，以帮助读者应用算子方程的理论和方法去处理具体的方程数值解的课题。

本书是在作者近几年为中山大学计算数学专业研究生开设的算子方程近似解课程的讲稿，以及第一作者赴外地讲学的讲稿的基础上整理修改而成的，其中吸收了国内外较多文献的成果，也含有作者的一些工作。

作者在从事这一方面的工作以及在本书的写作过程中，得到吉林大学冯果忱教授和武汉大学雷晋干教授的支持和推动，在此谨表谢意。作者还十分感谢李荣华教授和李岳生教授的支持和帮助。

希望通过本书的出版，能为有兴趣的科研工作者和教学工作提供一本有用的参考书，并对于研究生的专题学习与专题研究有所帮助。但限于作者的水平，书中缺点和错误在所难免，敬希读者批评指正。

作 者

1991年2月于中山大学

Operator Equations and Their Approximate Solutions by Projection Methods

Chen Mingjun Chen Zhongying

Synopsis

The purpose of this book is to present a general theory of operator equations and their approximate solutions by projection methods. The Galerkin type methods, collocation method and least square method can be viewed as specific projection techniques. The operator equations studied here include linear equations involving completely continuous operators and general linear operators, nonlinear equations involving monotone operators, fixed point equations and evolution equations involving abstract operators. This monograph deals with the existence and the uniqueness of ordinary or generalized solutions, approximation-solvability, convergence, stability and error estimate of projection methods. Examples of applications are given to the numerical solutions for integral equations and differential equations.

目 录

第一章 引论	(1)
§ 1 逼近格式概述	(1)
§ 2 投影算子与投影逼近格式	(4)
第二章 全连续线性算子方程及其投影近似解	(14)
§ 1 全连续算子	(14)
§ 2 Banach 空间中全连续线性算子方程的投影 近似可解性	(18)
§ 3 Hilbert 空间内自共轭的全连续线性算子的 特征值及其投影近似	(22)
§ 4 应用举例——Fredholm 积分方程的投影法	(32)
第三章 一般线性算子方程及其投影近似解	(36)
§ 1 有界线性算子方程的投影近似可解性	(36)
§ 2 稠定线性算子方程的广义解及其投 影近似可解性	(45)
§ 3 逼近格式的稳定性	(66)
§ 4 应用举例——线性常微分方程边值 问题的数值解	(68)
§ 5 应用举例——椭圆型线性偏微分方程边 值问题的数值解	(72)
第四章 拓扑度与不动点方程	(77)
§ 1 欧氏空间中连续映射的拓扑度	(77)
§ 2 Banach 空间中全连续场的拓扑度	(97)

§ 3	A-proper 映射的广义拓扑度	(103)
§ 4	不动点定理	(109)
§ 5	不动点方程的投影近似解	(116)
第五章	单调算子方程及其投影近似解	(123)
§ 1	算子的连续性 · 导数与微分	(123)
§ 2	Banach 空间到其共轭空间的单调算子 ...	(135)
§ 3	单调算子方程的投影近似可解性	(146)
§ 4	K- 单调算子方程的投影近似可解性	(155)
§ 5	应用举例——非线性微分方程边值问题的 数值解	(163)
第六章	算子发展方程及其投影近似解	(184)
§ 1	预备知识	(184)
§ 2	一类带有对 t 的一阶微商的发展方程的 投影解	(202)
§ 3	一类带有对 t 的二阶微商的发展方程的 投影解	(233)
参考文献		(252)

Contents

Chapter 1

Introduction.....	(1)
1. An Outline of Approximation Schemes.....	(1)
2. Projection Operators and Projective Approximation Schemes	(4)

Chapter 2

Equations Involving Completely Continuous Linear Operators and Their Approximate Solutions by Projection Methods	(14)
1. Completely Continuous Operators	(14)
2. Projectional Approximation-Solvability for Equations Involving Completely Continuous Linear Operators in Banach Spaces	(18)
3. Eigenvalues of Completely Continuous Self-Conjugate Linear Operators and Their Projectional Approximation in Hilbert Spaces	(22)
4. An Example of Application: Projection Methods for the Fredholm Integral Equation.....	(32)

Chapter 3

Equations Involving General Linear Operators and Their Approximate Solutions by Projection Methods	(36)
1. Projectional Approximation-Solvability for Equations Involving Bounded Linear Operators ...	(36)
2. Generalized Solutions of Equations Involving Densely Defined Linear Operators and Their Projectional Approximation-Solvability.....	(45)

Stability of Approximation Schemes	(66)
4. Examples of Applications : Numerical Solutions for Boundary Problems of Linear Ordinary Differential Equations	(68)
5. Examples of Applications : Numerical Solutions for Boundary Problems of Linear Partial Differential Equations of Elliptic Type	(72)

Chapter 4

Topological Degree and Fixed Point Equations	(77)
1. Topological Degree of Continuous Mapping in Euclidean Spaces.....	(77)
2. Topological Degree of Completely Continuous Field in Banach Spaces	(97)
3. Generalized Topological Degree of A-proper Mapping	(103)
4. Fixed Point Theorems	(109)
5. Approximate Solutions of Fixed Point Equations by Projection Methods	(116)

Chapter 5

Equations Involving Monotone Operators and Their Approximate Solutions by Projection Methods ...	(123)
1. Continuity Properties of Operators, Derivatives and Differentials	(123)
2. Monotone Operators from a Banach Space to Its Conjugate Space.....	(135)
3. Projectional Approximation-Solvability of Monotone Operator Equations.....	(146)

4. Projectional Approximation-Solvability of K-monotone Operator Equations	(155)
5. Examples of Applications: Numerical Solutions for Boundary Problems of Nonlinear Differential Equations.....	(163)
Chapter 6	
Evolution Equations Involving Abstract Operators and Their Approximate Solutions by Projection Methods.....	(184)
1. Preliminaries.....	(184)
2. Approximate Solutions for a Class of Evolution Equations with First-Order Derivative with Respect to Time by Projection Method	(202)
3. Approximate Solutions for a Class of Evolution Equations with Second-Order Derivative with Respect to Time by Projection Method;.....	(233)
References.....	(252)

第一章 引 论

算子方程及其近似求解的理论是理论数学和计算数学领域的一个重要分支. 一方面, 各种各样的数学方程, 线性方程和非线性方程, 微分方程、积分方程和积分微分方程等等, 都提出大量的理论问题, 促使人们运用算子方程去描写和概括这些极其丰富的现象, 探讨和研究这些问题的解的存在性、唯一性以及求解的数值方法, 从新的理论高度去揭示问题的规律, 认识问题的本质. 另一方面, 算子方程的近似理论的突出特点是广泛应用泛函分析方法于方程数值理论的研究, 这为计算数学提供了有力的工具, 并带来某些影响深远的变革. 这些理论所概括的规律性东西, 可以为解决有关的具体课题提供一般的框架, 可能的路径, 或者有益的启示.

为了便于在本书后面对各类算子方程展开讨论, 本章先就近似求解的计算格式作一概述, 为以后各章作准备.

§1 逼近格式概述

设 X 和 Y 为两个抽象度量空间, T 为 X 到 Y 的算子, 求解算子方程

$$Tu = f, \quad (1.1)$$

此处 $f \in Y$.

方程的数值解法大致可以分为两大类: 逐次逼近和有限维逼近. 各种类型的迭代法属于前者; 投影法(包括各种 Galerkin 型方法, 最小二乘法, 配置法等), 求解微分方程和积分方程的有