高等学校教材

系统灵敏度理论导论

罗 键 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

系统灵敏度理论导论

罗　键　编著

1539724

西北工业大学出版社

1990年3月　西安

内 容 简 介

本书系统地介绍控制理论中的重要分支——动态系统灵敏度理论的基本内容及研究方法。着重讨论系统参数变化对控制系统性能的影响，相应的计算与测试手段，以及考虑参数灵敏度要求的系统设计原则与方法。全书共分九章，论述有关的基本数学知识、系统灵敏度问题的基本考虑、各种常用的系统灵敏度函数、输出灵敏度函数的计算与测量法、轨迹灵敏度函数的计算与测量方法、频域灵敏度函数的确定法、开环与闭环系统的灵敏度比较、最优系统的灵敏度分析浅论等。每章都编入了大量例题，并附有足够数量的习题。

本书可作为工科院校高年级大学生及研究生有关课程的教材，对广大科技人员也有很好的参考价值。

高等学校教材
系统灵敏度理论导论
罗 键 编著
责任编辑 王夏林
责任校对 杨长照
*
西北工业大学出版社出版
（西安市友谊西路127号）
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0179-6/TP·32（课）
*
开本 787×1092 毫米 1/16 13 印张 307 千字
1990 年 3 月第 1 版 1990 年 3 月第 1 次印刷
印数 1－2000 册 定价：2.64 元

前　言

1981年至1983年期间，我在联邦德国杜依斯堡大学电气工程系测量与调节技术研究所工作。由于该所所长P.M.Frank教授专长于系统灵敏度理论，所以工作中我接触到不少有关系统灵敏度理论方面的问题。回国后，由于科研工作的需要，又经常涉及这方面的内容，并且还定期向我校有关专业的研究生讲授“系统灵敏度理论导论”课。在这些工作的基础上，作为教学参考书，本书就应运而生了。

系统灵敏度理论是研究参数不确定性对系统性能影响的一门学问，多年来，我深感人们对它普遍不很了解，这反映在有关系统灵敏度方面的论述大部分皆分散在各种学术刊物及专业会议的论文中，即使从世界范围来看，专门介绍系统灵敏度理论的论著及教材也屈指可数。可喜的是，近年来这种情况已开始出现转机。由于对这方面知识的需求愈益增长，许多有关控制理论方面的书籍中已出现有关考虑系统灵敏度问题的专门章节。基于上述情况，在编写本书时，我力求做到富有启发性，并着眼于为读者阅读有关系统灵敏度理论方面的文献资料及今后进一步学习提高打下较为良好的理论基础。我希望，本书不仅是一本供大学高年级学生或研究生用的合适的教学参考书，而且对广大从事控制系统设计、研究与调试工作的工程技术人员也有所俾益。

为了读者阅读方便，书中经常涉及的有关数学知识已辟专章予以复习及讨论。一些零星的数学知识则视需要在用到时予以适当的讲解。

由于时间仓促，篇幅限制，随机系统的灵敏度分析及许多新的、更深入的有关内容未能在书中予以反映，有兴趣的读者可进一步参阅书后所列的参考文献。

西安交通大学信控系主任李人厚教授在百忙中极为仔细地审阅了本书的原稿，在此特致由衷的谢忱。

最后，我诚恳地欢迎读者对本书提出批评和指正。

编著者

1988年9月于西北工业大学

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 绪　论

本章用一个具体例子说明系统灵敏度理论（System Sensitivity Theory）所要研究的问题范畴，并概要地介绍稳健性（Robustness）等与灵敏度理论有关的一些基本术语与概念。

本章拟对系统灵敏度理论提供一个比较全面的概述。

第一节 系统灵敏度问题

一、参数灵敏度问题

什么是系统灵敏度问题？这个问题是怎样被提出来的？为了回答这个问题，让我们先看一个数学上的参数灵敏度问题，以便先对参数灵敏度问题有一个大致的了解。

问题是这样的：设有一个二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1-1}$$

式中　a，b，c——分别为相互无关的待定的参数。

试问 b 为何值时，它的微小变化会导致上述方程的根发生很大的变化？

为了回答这个问题，我们需要研究 dx/db。为此，将前式对 b 求导

$$2ax\frac{dx}{db}+b\frac{dx}{db}+x=0$$

于是

$$\frac{dx}{db}=-\frac{x}{2ax+b}$$

显然，当 $x=-\frac{b}{2a}$时，

$$\frac{dx}{db}\to\infty$$

这就是说，当 $x=-b/2a$ 时，b 的微小变化会导致式(1-1)的根发生很大的变化。

考虑到二次方程根的表达式为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可见上述情况发生在 $b=\sqrt{4ac}$ 处。这时，方程式(1-1)得到重根 $x_1=x_2=-b/2a$。

综上所述，如把系数 b 作为参数看待，取

$$b=\sqrt{4ac}$$

时，它的微小摄动会导致二次方程式(1-1)的根的计算结果很不准确。

在数值计算中，称上述根的计算问题是有病态的；从灵敏度理论的观点讲，这是一个对参数变化敏感的参数灵敏度问题。

顺便指出，按数值计算的理论，除了有类似上述对参数变化敏感的病态问题外，许多选用的具体算法也会因对所计算问题中的参数摄动十分敏感而造成很大的计算误差。这种算法常称为不稳定的算法。

关于数值计算领域中灵敏度问题的进一步知识，可参看文献[1]、[2]及[3]。

二、动态系统的灵敏度问题

现在我们来讨论发生在动态系统分析、设计与调试中的灵敏度问题。

首先应该说明，所谓动态系统灵敏度问题，实际上是指动态系统的数学模型的灵敏度问题。这是因为，对任何实际的动态系统进行分析、设计与调试，都是指对描述这个系统的数学模型进行分析、设计并参照它进行实际调试的缘故。

下面，我们以枢控电机的拖动控制问题为例，来看各种有关的系统灵敏度问题。

(一)枢控电机拖动系统简介

众所周知，直流电机是控制系统中常用的一种执行元件。由于枢控电动机比激磁控制的电机性能优越，在当前情况下，8千瓦以下的各种直流电机中，用永磁激磁已十分普遍，因此枢控电动机的方案用得比较广泛。控制这种电动机的原理如图1-1所示。

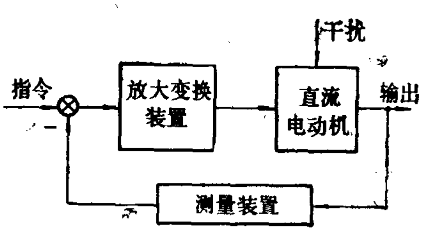

图 1-1

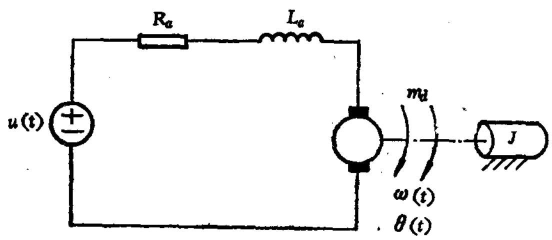

图 1-2

作为被控对象的枢控直流电机示于图1-2。图中，$u(t)$为控制电压；$\omega(t)$为输出角速度；$\theta(t)$为转角；R_a为电枢电阻；L_a为电枢电感；m_d为负载力矩；J为负载的转动惯量。为了说明问题方便，以下分析中，假设不计负载转动时的粘性摩擦。

与图1-2相应的枢控电机的信号流图如图1-3所示。图中，M_t为电磁力矩；K_t为电磁力矩系数；K_b为反电势常数；U为输入电压的拉氏变式；Ω为输出角速度的拉氏变式；Θ为转角的拉氏变式；其余符号与图1-2中的相同。

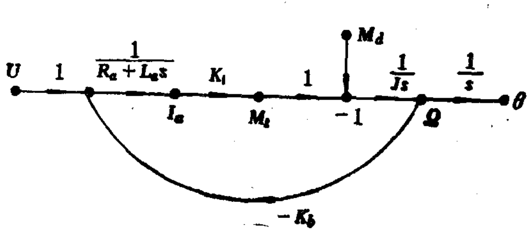

图 1-3

为了以下分析简单起见，假设系统的输出量是角速度$\omega(t)$。显然，电动机对控制信号的传递函数为

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{(R_a+L_a s)}K_t\frac{1}{Js}}{1+\frac{1}{(R_a+L_a s)}K_t\frac{1}{Js}K_b}$$

$$=\frac{\frac{1}{K_b}}{\frac{L_a J}{K_t K_b}s^2+\frac{R_a J}{K_t K_b}s+1} \tag{1-2}$$

因此，电机微分方程为

$$\frac{L_a J}{K_t K_b}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{R_a J}{K_t K_b}\frac{d\omega}{dt}+\omega=\frac{1}{K_b}u(t) \tag{1-3}$$

初始条件是

$$\omega(t_0)=\omega_0$$
$$\dot{\omega}(t_0)=\dot{\omega}_0$$

通常情况下，电机的电枢电感作用远比电阻为小，可以不计，于是式(1-3)成为

$$T_m=\frac{d\omega}{dt}+\omega=Ku(t) \tag{1-4}$$

式中 $T_m=\frac{R_a J}{K_t K_b}$ ——机械时间常数；

$K=\frac{1}{K_b}$ ——放大系数。

由于这个式子既简单又足够准确，所以是系统设计计算的依据。

体现外干扰力矩 M_d 对电机运动影响的传递函数 $\Omega(s)/M_d(s)$ 也可不难求得。

(二)枢控电机拖动控制系统的灵敏度问题

基于上述，我们可以提出一系列与系统灵敏度有关的问题：

(1)由方程式(1-3)可见，作为被控对象的枢控电机，它的动态性能可用一个线性定常二阶微分方程来描述。在这个方程中，与电机及负载性能有关的诸量 L_a、R_a、J、K_t、K_b 都是参数。由于生产过程中有制造容差；测量时有测量误差；电机组件及负载材料不断老化；以及电机的运行条件与设计时所设想的不尽一致等一系列无法预测的原因，这些参数的特点是：对各台具体的电机而言，尽管设计时的额定值一样，但具体取值却各不相同，而且这种不一致性又是无法精确控制的。所以各台电机的实际动态性能不会与设计时所设想的完全一致。也就是说，参数的不确定性会导致系统的实际性能相对于设计性能有所改变。于是，我们遇到了参数灵敏度问题。

(2)如果由于上述参数的实际值偏离设计值而造成的系统性能改变不会引起系统特性的质变，也就是说，如果参数值的摄动不会导致系统模型阶次的变化，则相对于其它情况而言，可把这类参数对系统的影响专门划类进行研究。常称这类问题为 α 参数问题。

(3)假如方程式(1-3)中的参数 L_a、R_a、J、K_t、K_b 都与设计时的额定值一致，但电机运行的初始条件值 ω_0 或 $\dot{\omega}_0$ 发生了摄动，这时，表征系统动态性能的一些量也会发生变化。这种把初始条件当作参数，考虑它们对系统性能影响的问题也值得划类进行专门研究。常称这类问题为 β 参数问题。

（4）前已述及，通常作为系统设计计算依据的是经过简化而得到的一阶方程式（1-4），而不是最原始的精确方程式(1-3)。在数学上，这等效于把作为数学模型的微分方程式(1-3)中的最高阶次项的系数由非零值取为零。这种为了计算简化而选用低阶近似方程作为设计计算依据的做法，导致了原系统数学模型的降阶。显然，这样做所得的计算结果与用精确模型计算所得的结果是有所不同的。然而这是为了计算简便而作出的一种牺牲，对系统建模工作十分有利(参看文献[4]，[5])。从灵敏度理论的观点看，这是故意人为地改变参数，从而导致了系统性能的变化。所以，这是一个灵敏度问题。在灵敏度理论中，称这种参数灵敏度情况为 λ 参数灵敏度问题。显然，凡涉及 λ 参数灵敏度的问题都会因造成原数学模型的降阶而发生系统结构改变的现象（见文献[6]）。

（5）在研究具体的拖动控制系统的方案时，一个很自然的问题是：我们应该选用开环控制还是闭环控制方案？通常情况下，回答总是：选闭环反馈控制方案！为了更全面地考虑与权衡利弊，我们不妨问一下：从灵敏度理论的观点看，是否闭环控制总比开环控制较为优越？显然，这也是一个系统灵敏度范畴的问题。

（6）假如把外干扰信号数学模型中的各种参数看成是系统的外介质参数，那么研究系统抗干扰作用的能力问题也成了一个参数灵敏度问题。换一种说法，这种灵敏度问题也可叫做系统对环境改变的灵敏度问题（见文献[7][8]）。

（7）不论从式(1-3)或式(1-4)，我们都可看到，影响被控对象的参数常有很多。为了有效地设计计算和调试系统，一个重要且自然的问题是：在如此众多的参数中，哪些对系统的影响最大？哪些由于影响不大而可忽略不计？显然，这种抓主要矛盾型的问题也是系统灵敏度理论应该研究的问题。

（8）假如我们按最优控制理论设计一个枢控电机的最优拖动控制系统，在被控对象的参数有摄动的情况下，设计所得的最优性还保得住吗？换句话说，我们很想知道参数摄动对最优控制系统的性能会有什么影响。这当然又是一个参数灵敏度方面的重要问题。

综上所述不难推想，在现实的科学技术问题中，存在着大量的灵敏度问题。从工程控制论的观点看，这都是由于系统本身的参数摄动及作用于系统上的外干扰信号的不确定性引起的。随着科学技术的发展，人们对这种不确定性因素的影响必然会给予更多的关注，这也就是人们对自适应技术及灵敏度与稳健性理论日益重视的原因。

第二节　进一步的说明

在上一节所述内容的基础上，作为绪论，现在我们拟对系统灵敏度及有关的问题进一步作些说明。

一、关于干扰作用与摄动

众所周知，任何控制系统都是由被控对象及控制器所构成。为了实现对被控对象的高质量控制，一般采用闭环反馈控制系统。

若仅以被控对象而论，由于其上作用着各种干扰信号，它的内部参数又可能有所摄动，不难推知，控制系统的输出量往往难以保持要求的定值或对指令信号进行精确跟踪。

所谓干扰信号是指影响系统性能且又无法由系统进行控制的外来作用；至于摄动，则是

指造成对象的静、动态特性发生暂时的或永久变异的内在因素。

摄动对系统的影响体现为使被控对象的数学模型偏离作为设计依据的额定的数学模型。所以摄动的存在使系统在同一指令信号及干扰信号作用下发生性能变化。也正是由于这个缘故，摄动，或更确切地说是参数的摄动，对系统来讲相当于是一种使它的性能发生变化的特殊的输入作用。因此，我们可以说，实际的系统可描绘为：在额定的数学模型上同时作用着指令信号、外干扰信号及等效于参数摄动作用的某种外作用信号。这种形象的描绘示于图1-4。鉴于这种考虑，与信号理论一样，灵敏度理论以及与之有密切关联的系统稳健性理论构成了工程控制论中的一个重要分支。

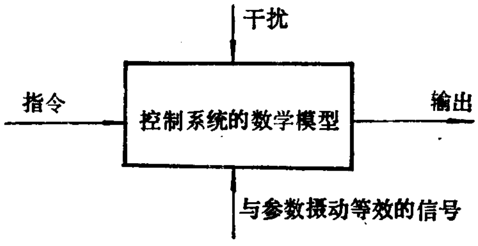

图 1-4

二、参数摄动的原因及其数学模型

是什么原因造成实际的系统对于作为设计依据的额定模型存在着不可避免的参数摄动？一般讲，主要原因有：

(1)对任何实际系统，我们总不可能把它辨识得绝对精确。换言之，用系统辨识理论求得的系统数学模型只是相对准确的；

(2)由于制造有容差，所以任何理论的构思及设计计算都不可能绝对准确地实现；

(3)随着时间的推移，任何系统都会发生老化、磨损等性能的改变以及环境和运行条件的变化；

(4)为了简化设计计算或便于数学处理，工程上常常有意把一些复杂的情况或数学模型简化或理想化。因而，相对于作为设计依据的这种简化的或理想化的模型来讲，真实系统就相当于是一种参数摄动的情况了。

通常，表示摄动的数学模型有两种。一种叫结构型不确定性模型；另一种是非结构型不确定性模型。

当被控对象的模型型式完全确定，但参数值不定时，处理这种参数不确定性的数学模型便是结构型不确定性模型。前一节提到的α参数及β参数问题就属于这种模型的问题。

如果被控对象的模型是在不计一些次要因素的假定下建立起来的，这样的模型便叫做非结构型模型。前述的λ参数灵敏度问题即为此例。

在有了α参数、β参数、λ参数灵敏度定义的基础上，又进一步引出表示参数摄动的两种不同数学模型，其目的是为了将有关的概念推广于系统稳健性的设计计算。

三、系统灵敏度与稳健性的关系

当前，在讨论与处理系统不确定性的问题时，经常见到“灵敏度”与“稳健性”这两个相互间颇有关联的术语。这里拟对它们作一些说明。

在20世纪60年代以前，人们在探讨反馈的好处时，早已意识到反馈的引入可以减弱干扰及摄动对系统的影响。这时，术语“系统灵敏度”兼指系统的性能对干扰与摄动的敏感程度。60年代末到70年代初，术语“灵敏度”开始用于专指结构不确定性对系统的影响。70年代末，出现了术语“稳健性”，它的主要含义是：系统愈稳健，则其特性受各种摄动影

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

响，特别是受非结构不确定性的影响愈小。由此可见，“灵敏度”与“稳健性”这两个术语所表达的概念实际上是相辅相成的。

由于当前各国术语不统一，对“灵敏度”与“稳健性”含义还有其它两种不同的看法。第一种看法认为“灵敏度”宜用于处理外干扰对系统的性能影响问题，而“稳健性”则用于处理摄动的影响问题（参看文献[9]）。第二种看法则认为“灵敏度”是指在作为设计计算依据的额定参数工作点附近有小的参数摄动时，这种小摄动对系统性能的影响；而“稳健性”则是指参数在上述额定点附近作大范围变动时，系统还能在一个足够大的区域中有能力保持对它的性能要求（参看文献[10]）。Frank(1985)还用实例论证了以下论点：对于同一个问题，用灵敏度观点对参数大范围变动所作的计算结果，与用基于稳健性理论所作的相应计算结果基本上是一致的。Frank提出的这种看法，用统一的观点来看待灵敏度与稳健性这两个不尽相同却又相互关联的概念，看来比较可取。

最后应该指出，灵敏度与稳健性理论仅是处理系统不确定性问题的一个方面。处理这个问题的另一个重要方面是自适应理论。不论从这两个方面的过去与现在看，还是从发展的观点看，它们的关系和功用都是相辅相成的。

四、灵敏度理论的其他研究方面

系统灵敏度理论除了研究减小系统不确定性对系统性能影响的问题外，它的另一个研究方向则是强化系统对参数摄动的敏感性，以解决控制工程中的一些特殊问题。系统辨识技术中的最佳输入问题就是这方面研究成果的典型应用。对这方面有兴趣的读者可参看文献[11]。

第二章　有关的基本数学知识

在具体讨论系统灵敏度理论之前，我们先来复习并学习一些后续章节中常要用到的数学知识。这些知识为：多变量微积分，微分方程解的存在与唯一性，以及微分方程的解与参数及初始条件的连续关系。其它一些非属基本及用得不很频繁的数学知识如特征值及奇异值等，将在有关章节中讨论。本章主要参考文献为[12][13][30]。

第一节　多变量微积分知识

一、纯量场和向量场

我们来研究有限维空间中的函数

$$T: R^n \longrightarrow R^m \tag{2-1}$$

式中　R^n——n维实空间；

R^m——m维实空间。

若取$n=1$，$m=1$，称函数T为实变量的实值函数。

若取$n=1$，$m>1$，称函数T为实变量的向量值函数。$\boldsymbol{y}=[y_1(x),\ y_2(x)]^T$，$x\in R$，就是例子。

如果取$n>1$，$m=1$，则称函数T为向量变量的实值函数。数学文献中，也常称T为纯量场。$y=y(\boldsymbol{x})=y(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$\boldsymbol{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T\in R^n$便是一例。

如果取$n>1$，$m>1$，则称函数T为向量变量的向量值函数，也常称它为向量场。这种函数的例子有

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1(\boldsymbol{x}) \\ y_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ y_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\ y_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n) \end{bmatrix}\in R^m$$

$$\boldsymbol{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T\in R^n$$

二、纯量场的微分运算

定义 2-1　纯量场对自变量向量的导数　若有纯量场

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

则它对自变量向量$\boldsymbol{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$的导数

$$
\frac{df}{d\boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

称为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的梯度。

$f(\boldsymbol{x})$对 $\boldsymbol{x}$ 的梯度常表示为：$\nabla_{\boldsymbol{x}} f$ 或 $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} f$。

为了运算方便，也有人定义梯度为

$$
\frac{df}{d\boldsymbol{x}} \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \cdots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \tag{2-2}
$$

例 2-1 若 $\boldsymbol{a} \triangleq [a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n]^T$，$\boldsymbol{x} \triangleq [x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n]^T$，则线性型为

$$
f(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n
$$

它对 $\boldsymbol{x}$ 的梯度则为

$$
\nabla_{\boldsymbol{x}} f \triangleq \frac{df}{d\boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}
$$

三、向量场的微分运算

定义 2-2 向量场对自变量向量的导数 若有向量场函数

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ \cdots, \ x_n) \\ f_2(x_1, \ \cdots, \ x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ \cdots, \ x_n) \end{bmatrix}
$$

则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的导数由下式定义

$$
\frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2-3}
$$

常称上述 $\frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}$ 为向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$对 $\boldsymbol{x}$ 的雅可比矩阵（Jacobian matrix）

例 2-2 设有向量场函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2,x_3)\\ f_2(x_1,x_2,x_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^2+x_2\\ x_3^2-x_2\end{bmatrix}$$

则雅可比矩阵为

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2x_3\end{bmatrix}$$

四、纯量场函数的复合微分法则

纯量场函数的复合微分法则可分以下六种情况来讨论：

（1）情况1

若 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$

则

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

$$=[dx_1,dx_2,\cdots,dx_n]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$=(d\boldsymbol{x})^T\nabla_x f$$

$$=(\nabla_x f)^T d\boldsymbol{x} \qquad (2\text{-}4)$$

（2）情况2

若 $f=f[x_1(a),\ x_2(a),\cdots,x_r(a)]$

则

$$\frac{df}{da}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{da}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{dx_r}{da} \qquad (2\text{-}5)$$

（3）情况3

若 $f=f[x_1(a_1,a_2,\cdots,a_s),\ x_2(a_1,a_2,\cdots,a_s),\cdots,\ x_r(a_1,a_2,\cdots,a_s)]$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_1}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial a_1}\\ \frac{\partial f}{\partial a_2}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial a_2}\\ &\cdots\cdots\\ \frac{\partial f}{\partial a_s}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_s}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_s}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial a_s}\end{aligned} \qquad (2\text{-}6)$$

（4）情况4

若 $f=f[x_1(x_r),\ x_2(x_r),\ \cdots,\ x_{r-1}(x_r),\ x_r]$

则 $$\frac{df}{dx_r}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_r}+\frac{df}{dx_2}\frac{dx_2}{dx_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{r-1}}\frac{dx_{r-1}}{dx_r}+\frac{\partial f}{\partial x_r} \tag{2-7}$$

（5）情况 5

若 $f=f[x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_r), x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_r)$
$\cdots, x_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_r), x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_r]$

则
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\\
\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+2}}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_{k+2}}+\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_r}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial x_r}
\end{aligned} \tag{2-8}$$

（6）情况 6

若 $f=f[x_1(x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_r),x_2(x_{k+1},x_{k+2},\cdots, x_r),\cdots, x_{k-1}(x_{k+1},x_{k+2},\cdots, x_r),$
$x_k(x_r),x_{k+1}, x_{k+2},\cdots, x_r]$

则
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\\
\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{k+2}}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{k+2}}+\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_{r-1}}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r-1}}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r-1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_{r-1}}+\frac{\partial f}{\partial x_{r-1}}\\
\frac{\partial f}{\partial x_r}&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dx_r}+\frac{\partial f}{\partial x_r}
\end{aligned} \tag{2-9}$$

第二节 有关微分方程的知识

一、李普希茨（Lipschitz）条件及微分方程解的存在与唯一性问题

众所周知，大部分动态系统的数学模型是所谓的微分模型，即微分方程。所以，有必要对微分方程解的存在与唯一性的有关问题有些基本了解。为此，首要的便是所谓的李普希茨条件问题。为了讲解的方便又不失一般性，现以一阶微分方程的初值问题

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(t,x)\\ x(t_0)&=x_0\end{aligned} \tag{2-10}$$

作为研究的对象。

为了保证方程式（2-10）有解且唯一，要求满足什么条件？仅仅保证右端 $f(t,x)$ 对 x 的连续性够吗？为了回答这个问题，先看一个例子。

例 2-3 试求初值问题

$$\begin{aligned}\dot{x}&=2\sqrt{x}\\ x(1)&=0\end{aligned}$$

的解。

解 由该方程可见，$x=0$显然是一个解。再找它的其它解。为此，将原方程分离变量，得

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$$

积分之，有

$$\sqrt{x}=t+C$$

式中 c——待定常数。

代入初始条件，得

$$\sqrt{x}=t-1$$

于是，要求的解为

$$x=(t-1)^2$$

显然，这是一个顶点右移到(x，t)平面上(1，0)点的抛物线方程。由于原题仅研究$\sqrt{x}$的正值，所以$\dot{x}>0$。因此，所得的解是上述抛物线的右半分支，如图 2-1 所示。

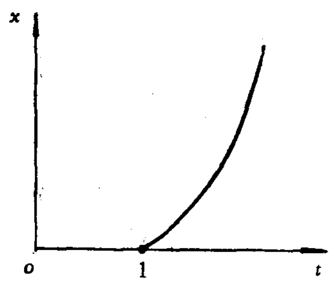

图 2-1

由这个例子可见，尽管原方程的右端$2\sqrt{x}$在$x\geqslant 0$的一切区域中定义并连续，在(x，t)平面上的(1，0)点处却同时通过了该方程的两个解曲线$x=0$及$x=(t-1)^2$，也即，点(1，0)是该微分方程的非唯一性的解点。因此可见，仅仅保证微分方程式(2-1)右端$f(t,x)$对x的连续性，还不足以保证它的解的唯一性。于是，提出了李普希茨条件的问题。

定义 2-3 李普希茨条件 如果在某闭域G上，微分方程

$$\dot{x}=f(t,x)$$

的右端$f(t,x)$满足以下条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,$$
$$\forall(t,x_1),(t,x_2)\in G$$

式中 L——常数，称为李普希茨常数。

则称函数$f(t,x)$在该闭域上对x满足李普希茨条件。

应当指出，对函数$f(t,x)$而言，它对x的李普希茨条件比它对连续的条件远为更强。函数$f(t,x)$满足对x的连续性条件，并不意味着它满足对x的李普希茨条件；反之，若函数$f(t,x)$满足对x的李普希茨条件，则必满足它对x的连续性条件。

定理 2-1 如果函数$f(t,x)$在域G中对t连续，且对变量x满足李普希茨条件，则它必对t，x同时连续。

由于本书篇幅的限制，本定理证明从略，有兴趣的读者可参看文献[13]。

现在来看一个例子。

例 2-4 试证明例 2-3 中的微分方程$\dot{x}=2\sqrt{x}$的右端函数$f(t,x)=2\sqrt{x}$不满足对x的李普希茨条件。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com