



# 高等传热学

(热传导和对流传热与传质)

杨强生 浦保荣 编著

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书由热传导和对流传热与传质两部分组成。第一篇热传导系统地阐述了导热的理论基础、多维稳态导热和非稳态导热、近似分析解法和相变导热,并简要介绍拉普拉斯变换法和格林函数法。第二篇介绍无相变的对流传热与传质,并从基本方程组出发讨论了层流和紊流换热、工程传质计算以及自然对流。书中把动量、能量和质量的传递过程联系在一起分析,有助于读者深入理解各种传递过程。书中有例题,每章末附有习题和参考文献,书末附有常用的工质热物性表和索引。

本书可作为能源、动力、化工、制冷空调和工程热物理等专业研究生用高等传热学教材,也可供有关专业教师、高年级本科生和科技工作者参考。

责任编辑 陆义群

封面设计 刘 伟



高等传热学

上海交通大学出版社·出版

(上海市华山路1954号 邮政编码200030)

新华书店上海发行所·发行

立信常熟印刷联营厂·印刷

开本:787×1092(毫米) 1/16 印张:19.75 字数:490000

版次:1996的4月第1版 印次:1996年4月第1次

印数:1-1000

ISBN7-313-01615-8/TM·096

定价:15.40元

# 前 言

一个多世纪来,传热传质学的发展极为迅速,涉及的领域十分宽广。在自然界以及众多的工业部门有着广泛的应用,例如,地球物理、航空航天、动力、化工、交通运输以及环境保护等领域均与传热传质学科的发展密切相关。

热能传递有两种不同的基本机理——热传导(导热)和辐射传热。当物体中存在着温度梯度,由组成物体的各种微观质点的热运动引起的传热称为热传导。热辐射则是由于物体内部微观质点的热运动而向四周介质发射的电磁波,温度不同的物体之间无须直接接触即可实现辐射传热。如果在流动的流体中发生热能传递,那末由于流体的宏观运动将使导热的扩散过程增强,这是一种对流换热过程。它仍然取决于物体之间的迁移和接触,就传热机理而言仍可归为热传导一类。不过,就传热方式来说,可以划分为导热、对流换热和热辐射三种不同的过程。其中,每种传热方式又有各自的分支和应用领域,或成为不同交叉学科的组成部分,更多的则是以复合传热的方式出现。

本书是在大学本科传热学教学基础上编写的供研究生用的高等传热学教材。全书阐述热传导和对流传热与传质,可供能源、动力、化工、制冷空调和工程热物理等专业的研究生和本科高年级学生,以及有关的教师和工程技术人员阅读。

传热传质学的发展极为迅速,每年有大量文献发表。本书既不可能是文献的综述,也不可能包罗所有的方面。重点是阐明热传导以及对流传热与传质的基本原理和基本解题方法,尽可能把物理概念阐述清楚。鉴于热传导和对流传热中动量传递、能量传递和质量传递之间有不少共同的规律,而且一类问题的求解结果可以推广到具有相同形式的微分方程式和边界条件的另一类问题,因此在学习过程中应尽可能把它们联系起来学习,可收到举一反三、事半功倍之效。在学习本书时,读者应具有工程热力学和传热学的基础知识,以及掌握工程数学的有关内容。本书以解析解为主,数值计算的内容没有收入。对流传热与传质中仅限于并未发生相变,发生相变的内容另有专门文献介绍。

编者曾对上海交通大学动力系和能源系的硕士生和博士生进行了十余届的教学工作,积累了丰富的教学经验。本书第二篇曾广泛参考了高教出版社1985年出版的《对流传热与传质》教材;并相应地作了修订和改写。许多教师和学生曾就教材的一些内容与编者进行了深入的讨论,对编写工作给予很大的帮助,在此谨向他们表示感谢。

全书共分11章,第一篇热传导共六章由浦保荣编写,涉及导热的基本理论、多维稳态导热和非稳态导热。第四章介绍拉普拉斯变换和格林函数法。最后简要介绍近似分析解法和相变导热。第二篇是无相变的对流传热与传质,由杨强生编写,涉及基本方程组、层流换热和紊流换热、传质计算以及自然对流。全书由杨强生统稿。本书采用国际单位制,书末附有超越方程的根和拉普拉斯变换表,以及常用工质的热物性表。书中有若干例题,各章末附有习题和参考文献,另有主要符号表和索引。本教材可供72学时课程的教学用。

在编写过程中编者虽然认真查阅了有关的教科书和部分文献资料,但限于自己的水平,缺点和错误仍在所难免。再加上受篇幅限制,许多问题无法充分展开。恳请广大读者不吝指教,以使本书的质量能不断提高。

杨强生 浦保荣  
于上海交通大学动力系  
1995年6月

# 主要符号表

|   |  |
|---|--|
| <p><math>A</math> 面积, 表面积, <math>m^2</math></p> <p><math>a</math> 热扩散率(导温系数), <math>m^2/s</math>; 当地音速, <math>m/s</math></p> <p><math>Bi</math> 毕渥数</p> <p><math>B_h</math> 传热势函数</p> <p><math>B_m</math> 传质势函数</p> <p><math>b</math> 平行平板间半宽度, <math>m</math></p> <p><math>C_f</math> (局部)阻力系数</p> <p><math>c</math> 比热容, <math>J/(kg \cdot K)</math></p> <p><math>D, d</math> 圆管直径, <math>m</math></p> <p><math>D_j</math> 组成物 <math>j</math> 的质扩散率, <math>m^2/s</math></p> <p><math>E</math> 由内能和动能组成的总能量, <math>J/kg</math></p> <p><math>Ec</math> 埃克特数</p> <p><math>Fo</math> 傅里叶数</p> <p><math>f</math> 无量纲流函数</p> <p><math>G</math> 质流量, <math>kg/s</math>; 质流率或质速度, <math>kg/(m^2 \cdot s)</math></p> <p><math>Gr</math> 葛拉晓夫数</p> <p><math>Gr_m</math> 传质葛拉晓夫数</p> <p><math>Gr^*</math> 修正葛拉晓夫数</p> <p><math>H</math> 拉梅系数; 边界层形状系数; 高度, <math>m</math></p> <p><math>h</math> <math>\alpha/\lambda</math>; 焓, <math>J/kg</math></p> <p><math>J</math> 扩散质流率, <math>kg/(m^2 \cdot s)</math></p> <p><math>k</math> 紊流动能, <math>J/kg</math></p> <p><math>L</math> 长度, 肋高, 距离, <math>m</math>; 固液相变潜热, <math>J/kg</math></p> <p><math>Le</math> 刘易士数</p> <p><math>L, l</math> 距离, 紊流的混合长, <math>m</math></p> <p><math>M</math> 质流量, <math>kg/s</math>; 动量 <math>kg \cdot m/s</math>; 马赫数; 分子量</p> <p><math>m_j</math> 组成物 <math>j</math> 的质量百分数</p> <p><math>\dot{m}</math> 壁面法向质流率, <math>kg/(m^2 \cdot s)</math></p> <p><math>Nu</math> 努谢尔特数</p> <p><math>n_\alpha</math> 元素 <math>\alpha</math> 的质量百分数</p> <p><math>n_{\alpha,j}</math> 元素 <math>\alpha</math> 在组成物 <math>j</math> 中的质量百分数</p> <p><math>Pe</math> 贝克来数</p> | <p><math>Pr</math> 普朗特数</p> <p><math>Pr_i</math> 紊流普朗特数</p> <p><math>p</math> 压力, <math>Pa, bar</math></p> <p><math>Q</math> 热流量, <math>W</math></p> <p><math>q</math> 热流, 热流密度, <math>W/m^2</math></p> <p><math>R, r</math> 半径, <math>m</math>; 圆柱坐标中的变量; 气体常数, <math>J/(kg \cdot K)</math></p> <p><math>S</math> 导热形状因子; 相界面位置, <math>m</math></p> <p><math>Sc</math> 施密特数</p> <p><math>Sh</math> 薛伍德数</p> <p><math>St</math> 斯坦顿数</p> <p><math>St_m</math> 传质斯坦顿数</p> <p><math>s</math> 化学当量比常数</p> <p><math>t</math> 温度, <math>^\circ C</math></p> <p><math>T</math> 温度, <math>^\circ C, K</math>; 温度函数的象函数</p> <p><math>U</math> 内能, <math>J/kg</math>; 湿边周长, <math>m</math></p> <p><math>u, v, w</math> 速度矢量在坐标 <math>x, y</math> 和 <math>z</math> 上的分量, <math>m/s</math></p> <p><math>u_\tau</math> 剪切速度, <math>m/s</math></p> <p><math>u_\infty</math> 边界层外的主流速度, <math>m/s</math></p> <p><math>\bar{u}</math> 紊流速度的时均值, <math>m/s</math></p> <p><math>u'</math> 紊流速度的脉动分量, <math>m/s</math></p> <p><math>V</math> 容积, <math>m^3</math>; 容积流量, <math>m^3/s</math>; 来流速度, <math>m/s</math></p> <p><math>x, y, z</math> 直角坐标系</p> <p><math>x_1, y_1, z_1</math> 正交坐标系</p> <p style="text-align: center;"><b>希腊字符</b></p> <p><math>\alpha</math> 换热系数, <math>W/(m^2 \cdot K)</math></p> <p><math>\beta</math> 楔状流锥角; 容积膨胀系数, <math>K^{-1}</math></p> <p><math>\Gamma_j</math> 组成物 <math>j</math> 的质量产生率, <math>kg/(m^3 \cdot s)</math></p> <p><math>\Delta</math> 热边界层厚度, <math>m</math></p> <p><math>\Delta_2</math> 焓厚度, <math>m</math></p> <p><math>\Delta_t</math> 换热厚度, <math>m</math></p> |
|---|--|

$\delta$  厚度,速度边界层厚度,m;单位脉冲数  
 $\delta_1$  边界层排量厚度,m  
 $\delta_2$  边界层动量厚度,m  
 $\delta_3$  边界层剪切厚度,m  
 $\delta_m$  传质边界层厚度,m  
 $\epsilon$  紊流动能的粘性耗散,W/kg  
 $\epsilon_a$  紊流质扩散率,m<sup>2</sup>/s  
 $\epsilon_h$  紊流热扩散率,m<sup>2</sup>/s  
 $\epsilon_m$  紊流动量扩散率,m<sup>2</sup>/s  
 $\eta$  无量纲距离,相似参数  
 $\theta$  过剩温度,℃;无量纲温度;倾角  
 $\kappa$  混合长常数;绝热指数  
 $\Lambda$  波长,m;当地参数  
 $\lambda$  导热系数,W/(m·K)  
 $\xi$  无量纲距离  
 $\rho$  密度,kg/m<sup>3</sup>  
 $\tau$  时间,s;剪应力,N/m<sup>2</sup>;无量纲温度  
 $\tau_0$  周期,s  
 $\Phi$  能量粘性耗散函数,W/m<sup>3</sup>  
 $\varphi$  角度,rad,  
 $\Psi$  流函数,m<sup>2</sup>/s  
 $\omega$  角频率,1/s

### 角 注

aw 绝热壁状态  
c 管中心线;对流分量  
cp 定物性  
cr 临界值  
f 流体  
i 圆环内表面  
in 管进口状态  
j 混合物中某一组成物  
l 层流状态;液体  
m 平均值;传质计算的有关量  
o 圆环外表面  
q 定热流  
R 按参考温度确定流体的物性  
S 饱和状态  
T 定壁温  
t 紊流状态  
w 壁面  
x、y、z 物理量在坐标 x、y、z 上的分量;局部量  
a 组成物某一元素  
 $\infty$  边界层外主流状态

# 目 录

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 第一篇 热传导.....            | 1  |
| 第一章 导热的理论基础.....        | 1  |
| 1.1 导热基本定律 .....        | 1  |
| 1.2 各向异性材料中的导热 .....    | 3  |
| 1.3 导热方程 .....          | 6  |
| 1.4 导热过程的单值性条件 .....    | 9  |
| 1.5 无量纲的导热方程.....       | 11 |
| 1.6 导热正问题和导热反问题.....    | 12 |
| 1.7 导热问题的求解方法.....      | 13 |
| 习题 .....                | 15 |
| 参考文献 .....              | 17 |
| 第二章 多维稳态导热 .....        | 18 |
| 2.1 分离变量法.....          | 18 |
| 2.2 直角坐标系中的二维稳态导热.....  | 20 |
| 2.3 圆柱坐标系中的二维稳态导热.....  | 35 |
| 2.4 地下埋管导热.....         | 45 |
| 2.5 导热形状因子.....         | 47 |
| 习题 .....                | 48 |
| 参考文献 .....              | 49 |
| 第三章 非稳态导热 .....         | 51 |
| 3.1 非稳态导热的基本概念.....     | 51 |
| 3.2 集总热容系统的非稳态导热.....   | 51 |
| 3.3 有限区域内的一维瞬态导热.....   | 55 |
| 3.4 无界区域内的一维非稳态导热.....  | 64 |
| 3.5 多维非稳态导热.....        | 67 |
| 3.6 非齐次的非稳态导热问题.....    | 72 |
| 3.7 周期性边界条件下的非稳态导热..... | 76 |
| 习题 .....                | 79 |
| 参考文献 .....              | 80 |
| 第四章 拉普拉斯变换法和格林函数法 ..... | 81 |
| 4.1 拉普拉斯变换的基本概念.....    | 81 |



|            |                           |            |
|------------|---------------------------|------------|
| 4.2        | 用拉普拉斯变换法求解非稳态导热问题         | 85         |
| 4.3        | 适用于短时间与长时间的解              | 91         |
| 4.4        | 格林函数法                     | 92         |
| 4.5        | 格林函数的确定                   | 94         |
| 4.6        | 格林函数在直角坐标系中的应用            | 95         |
|            | 习题                        | 98         |
|            | 参考文献                      | 99         |
| <b>第五章</b> | <b>近似分析解法</b>             | <b>100</b> |
| 5.1        | 导热方程的积分形式                 | 100        |
| 5.2        | 稳态导热问题的积分法求解              | 102        |
| 5.3        | 非稳态导热的积分法                 | 105        |
|            | 习题                        | 110        |
|            | 参考文献                      | 110        |
| <b>第六章</b> | <b>相变导热</b>               | <b>111</b> |
| 6.1        | 一维相变导热                    | 111        |
| 6.2        | 固相热容可忽略时的相变导热             | 113        |
| 6.3        | 相变问题的精确解                  | 115        |
| 6.4        | 求解相变问题的积分法                | 118        |
|            | 习题                        | 120        |
|            | 参考文献                      | 120        |
| <b>第二篇</b> | <b>对流传热与传质</b>            | <b>122</b> |
| <b>第七章</b> | <b>对流传热与传质的基本方程组</b>      | <b>122</b> |
| 7.1        | 质量守恒定律和连续性方程式             | 123        |
| 7.2        | 动量守恒定律和动量方程式              | 124        |
| 7.3        | 能量守恒定律和能量方程式              | 128        |
| 7.4        | 熵方程                       | 131        |
| 7.5        | 质量组分方程式                   | 132        |
| 7.6        | 边界层方程组                    | 134        |
| 7.7        | 传递过程的无量纲参数                | 139        |
| 7.8        | 边界层积分方程式                  | 141        |
|            | 习题                        | 148        |
|            | 参考文献                      | 149        |
| <b>第八章</b> | <b>层流流动与换热</b>            | <b>151</b> |
| 8.1        | 管内充分发展区的层流流动和换热           | 151        |
| 8.2        | 二侧热流不等的同心圆环形管道内充分发展区的层流换热 | 159        |

|             |                                     |     |
|-------------|-------------------------------------|-----|
| 8.3         | 已知壁温时的热进口段的对流换热                     | 165 |
| 8.4         | 已知热流时圆管热进口段的对流换热                    | 175 |
| 8.5         | 外掠平壁的层流流动和换热的相似解                    | 179 |
| 8.6         | 具有轴向压力梯度的外掠物体的层流换热                  | 187 |
| 8.7         | 流体物性对换热的影响                          | 195 |
| 8.8         | 考虑能量粘性耗散的对流换热                       | 199 |
| 8.9         | 具有未加热初始段的外掠平壁的对流换热——边界层积分方程式应用之一    | 203 |
| 8.10        | $u_\infty$ 任意变化时的对流换热——边界层积分方程式应用之二 | 207 |
|             | 习题                                  | 212 |
|             | 参考文献                                | 216 |
| <b>第九章</b>  | <b>紊流流动与换热</b>                      | 217 |
| 9.1         | 紊流的基本概念                             | 217 |
| 9.2         | 管内紊流流动                              | 223 |
| 9.3         | 圆管紊流充分发展区的对流换热                      | 227 |
| 9.4         | 定壁温条件下外掠平壁的紊流换热                     | 233 |
| 9.5         | 具有未加热初始段的外掠平壁的紊流换热                  | 237 |
| 9.6         | 紊流两方程模型( $k-\epsilon$ 模型)           | 239 |
|             | 习题                                  | 241 |
|             | 参考文献                                | 244 |
| <b>第十章</b>  | <b>传质计算</b>                         | 246 |
| 10.1        | 传质的基本概念                             | 246 |
| 10.2        | 边界层传质方程组及其简化形式                      | 250 |
| 10.3        | 壁面 $m'' \rightarrow 0$ 时层流边界层的传质计算  | 253 |
| 10.4        | 壁面 $m'' \neq 0$ 时层流边界层的传质计算         | 255 |
| 10.5        | 平壁紊流传质边界层                           | 263 |
| 10.6        | 传质计算应用举例                            | 264 |
|             | 习题                                  | 268 |
|             | 参考文献                                | 269 |
| <b>第十一章</b> | <b>自然对流</b>                         | 270 |
| 11.1        | 自然对流的支配方程组                          | 270 |
| 11.2        | 竖壁层流边界层方程组的相似解(定壁温)                 | 271 |
| 11.3        | 竖壁层流边界层方程组的相似解(变壁温)                 | 277 |
| 11.4        | 边界层积分方程式及其应用                        | 279 |
| 11.5        | 具有传质的自然对流(竖壁层流定壁温)                  | 282 |
|             | 习题                                  | 283 |
|             | 参考文献                                | 285 |

|  |         |
|--|---------|
| 附录.....  | 286     |
| 附表 1 超越方程的根 .....  | 286     |
| 附表 2 函数的拉普拉斯变换表 .....  | 289     |
| 附表 3 空气的热物理性质 ( $p=1.01325\text{bar}$ , $M=28.966$ ) .....             | 296     |
| 附表 4 干饱和水蒸气的热物理性质 .....  | 297     |
| 附表 5 饱和水的热物理性质 .....   | 298     |
| 附表 6 未使用过的润滑油的热物理性质 .....  | 299     |
| 附表 7 汞(Hg)、钠(Na)、钠(22%)、钾(78%)合金和钾(K)的热物理性质 .....                      | 299     |
| 附表 8 大气的热物理性质 .....  | 300     |
| 附表 9 一些物质在双组分稀混合物中扩散时的施密特数 $Sc_i$ (普通大气条件) .....                       | 300     |
| 附表 10 饱和空气中水蒸气的分压力和水蒸气的质量百分数 ( $p=1.01325\text{bar}$ ) .....           | 301     |
| 附表 11 一些物质的质扩散率 $D$ .....  | 301     |
| 附表 12 双组分气体混合物的热物理性质 ( $p=1.01325\text{bar}$ , $T=290\text{K}$ ) ..... | 302     |
| <br>索引.....  | <br>303 |

# 第一篇 热 传 导

## 第一章 导热的理论基础

本章阐述导热的理论基础。首先介绍导热的基本定律,然后,基于导热基本定律及能量守恒定律,建立导热的微分方程,最后讨论导热问题的单值性条件及导热问题的求解方法。

### 1.1 导热基本定律

#### 1.1.1 温度场

某一物理量在空间的分布称为该物理量的场,如电场、磁场、引力场。温度在空间的分布称为温度场。温度场有稳态温度场和非稳态温度场之分,如果温度场不随时间而变,称为稳态温度场;反之,称为非稳态温度场。

如果我们用  $r$  表示泛指的空间坐标,  $\tau$  表示时间,则稳态温度场及非稳态温度场的数学表达式分别为

$$t=f(r) \quad (1-1)$$

$$t=f(r,\tau) \quad (1-2)$$

同一时刻,物体中由温度相同的点构成的面称为等温面。非稳态温度场的等温面可以随时间而变化。

沿等温面的法线方向的温度变化率最大,称为温度梯度,用符号  $\text{grad}t$  表示,取等温面的外法线方向作为温度梯度的正方向。直角坐标系中,温度梯度的表达式为

$$\text{grad}t = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad (1-3)$$

上式中,  $i, j, k$  分别表示  $x, y, z$  方向的单位向量。

#### 1.1.2 导热基本定律

物体内的分子、原子及自由电子等微观粒子处于不断的热运动中,其热运动的强弱与所处的温度有关,温度高,则热运动就强。当物体内部温度分布不均匀时,微观粒子间就发生能量交换,热量从温度较高(即热运动较强)的部分传递到温度较低(热运动较弱)的部分。这种依靠微观粒子的热运动而产生的能量传递现象,称为热传导,简称导热。物体在导热过程中,各部分物质不发生宏观位移。

导热现象遵循傅里叶定律。在各向同性的介质中,傅里叶定律的向量表达式为

$$q = -\lambda \text{grad } t = -\lambda \nabla t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cdot n \quad (1-4)$$

式中,  $q$  是热流密度(或称热通量), 它是一个向量, 其大小等于单位时间内通过单位等温面面积的热量, 并以等温面的外法线方向为正方向, 单位是  $\text{W}/\text{m}^2$ 。 $\lambda$  是比例系数, 称为导热系数(或称导热率)。 $\nabla$  是 nabla 算子,  $n$  是法线方向的单位向量。

傅里叶定律是导热的一条基本定律。它表明, 在各向同性介质中, 热流密度的大小与温度梯度成正比, 其方向与温度梯度反向。由此可知, 热流密度向量垂直于等温面, 沿着温度降低的方向。物体内的温度场一经确定, 即可由傅里叶定律求得物体各处的热流密度, 进而求得热流量(即单位时间内的导热量)。因此, 在导热问题的求解时, 首先应把注意力集中于求解温度场。

在直角坐标系中, 热流密度向量可表示为

$$q = q_x i + q_y j + q_z k \quad (1-5)$$

上式中,  $q_x, q_y, q_z$  表示  $q$  在  $x, y, z$  方向的分量。

式(1-3)及式(1-5)代入式(1-4), 得到

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \quad (1-6)$$

上式表明, 热流密度在任一方向上的分量与该方向上的温度变化率成正比。

特别值得指出的是, 上面的讨论仅对各向同性材料中的导热过程有效。

根据傅里叶定律, 当物体中某处由于热扰动而使该处温度发生变化时, 整个物体内的温度分布及热流密度立刻发生变化, 即使离开扰动源无限远的地方, 也能马上感受到扰动的影响, 这表明, 热扰动是以无限大的速度传播的。显然, 这一结论有很大的局限性, 声音(压力波)以声速传播, 电磁波以光速传播, 热扰动也必定以一有限的速度传播。由统计热力学理论可知, 热扰动只能以有限的速度在物体内部传播。因此, 必须对傅里叶定律作适当的修正, 式(1-4)变为<sup>[1]</sup>

$$\frac{a}{c^2} \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \text{grad } t \quad (1-7)$$

$$c = \sqrt{a/\tau_0}$$

式中,  $a$  是材料的热扩散率(或称导温系数),  $c$  是热传播速度,  $\tau_0$  称为松弛时间。在大多数实际导热问题中,  $a$  比  $c^2$  小 10 个量级, 因而式(1-7)中左边第一项与第二项相比可忽略不计, 式(1-7)退化为傅里叶定律, 只有在深冷时, 或在热负荷急剧变化的场合, 前者  $c$  的值很小, 后者  $\frac{\partial q}{\partial t}$  很大, 式(1-7)左边第一项才不能忽略。

### 1.1.3 导热系数

导热系数是表征材料导热能力的物理量, 单位是  $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 或  $\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ 。它与材料的种类及其所处的状态有关。

热物性学的现代理论提供了对导热过程微观机理的解释, 并有助于材料热物性宏观测试值的整理。但这些理论尚不完善, 还不能用于精确预测材料的导热系数值, 材料导热系数仍然由专门实验测定。

傅里叶定律提供了导热系数的定义式, 是由实验测定材料导热系数的基础。由式(1-4)可得导热系数的定义式为

$$\lambda = -\frac{q}{\text{grad } t} \quad (1-8)$$

在实验中,只要测定热流密度  $q$  及物体内的温度分布,就可由式(1-8)求得导热系数。

不同材料的导热系数差别极大。一般而言,纯金属的导热系数最大(纯金属中,又以银的导热系数为最大),气体的导热系数最小。传热学教材[2]的附录中,列出了常见材料的导热系数。有关导热系数更详细的资料,可参阅文献[3~5]。

## 1.2 各向异性材料中的导热

各个方向上导热系数都相同的材料,称为各向同性材料。此外,还有许多天然的或人造的材料,其导热系数随方向而变化,这样的材料称为各向异性材料。例如石英、木材、石墨、层压板、玻璃钢等。木材中,在顺木纹、垂直于木纹以及环绕木纹的三个方向上,导热系数是各不相同的。各向异性材料中的热传导理论在科学和技术的各个领域里起着重要作用,但这方面的成果却十分有限。本教材中,仅涉及其最基础的内容。

各向异性材料与各向同性材料相比,其导热过程有两个重要的差别。其一,各向异性材料沿各个方向的导热系数是不同的。其二,各向异性材料在某一方向上的热流密度分量不仅与该方向上的温度变化率有关,而且还与其垂直方向上的温度变化率有关。在直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  中,沿三个坐标轴方向的热流密度分量可表示为

$$q_1 = -\lambda_{11} \frac{\partial t}{\partial x_1} - \lambda_{12} \frac{\partial t}{\partial x_2} - \lambda_{13} \frac{\partial t}{\partial x_3} \quad (1-9a)$$

$$q_2 = -\lambda_{21} \frac{\partial t}{\partial x_1} - \lambda_{22} \frac{\partial t}{\partial x_2} - \lambda_{23} \frac{\partial t}{\partial x_3} \quad (1-9b)$$

$$q_3 = -\lambda_{31} \frac{\partial t}{\partial x_1} - \lambda_{32} \frac{\partial t}{\partial x_2} - \lambda_{33} \frac{\partial t}{\partial x_3} \quad (1-9c)$$

以上三式可概括成如下的表达式

$$q_i = -\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \frac{\partial t}{\partial x_j} \quad i=1,2,3 \quad (1-10)$$

式中,  $\lambda_{ij}$  表示  $j$  方向上的单位温度变化率在  $i$  方向上引起的热流密度的大小,反映了材料的定向导热性能,称为导热系数分量。根据不可逆过程热力学中的翁萨格原理(Onsager's principles),导热系数分量服从互易关系<sup>[6]</sup>

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad i, j=1,2,3 \quad (1-11a)$$

以外,正如文献[15]所述,根据不可逆热力学,有

$$\lambda_{ii} > 0 \quad i=1,2,3 \quad (1-11b)$$

而且,系数  $\lambda_{ij} (i \neq j)$  的大小被下述要求所限制

$$\lambda_{ii} \cdot \lambda_{jj} - \lambda_{ij}^2 > 0 \quad i \neq j \quad (1-11c)$$

导热系数的方向性使得各向异性材料中的导热规律复杂化了。但是,如果恰当地选择坐标系(数学上通过矩阵的初等变换),一定可以找到一个坐标系  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 在  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  坐标系中,沿  $\xi_i (i=1,2,3)$  方向的热流密度分量只与该方向上的温度变化率有关,而与其他两个方向上的温度变化率无关。即

$$q_{\xi_1} = -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad q_{\xi_2} = -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad q_{\xi_3} = -\lambda_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (1-12)$$

坐标轴  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  称为导热系数主轴,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  称为主导导热系数。此式与式(1-4)形式上几乎完全相同, 只是三个主导导热系数之值在一般情况下互不相等。在主轴坐标系  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  内, 热流密度向量表示为

$$q = -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} i' - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} j' - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} k' \quad (1-13)$$

$$\neq -\lambda \text{grad } t$$

由上式可知, 在各向异性材料中, 热流密度一般不垂直于等温面(温度梯度一定垂直于等温面), 且热流密度也不一定与温度梯度恰好反向。

下面以一个二维问题为例, 具体说明各向异性材料中导热的规律及其导热系数的变化特征。图 1.1 上表示一块叠层各向异性材料的平板, 图中斜线表示叠层面, 沿叠层面及垂直叠层面是导热系数的主轴  $\xi_1$  和  $\xi_2$ , 其主轴方向的导热系数分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ 。直角坐标系  $(x_1, x_2)$  与主轴不一致, 现要推导在坐标系  $(x_1, x_2)$  中的方向导热系数与主轴导热系数间的关系。

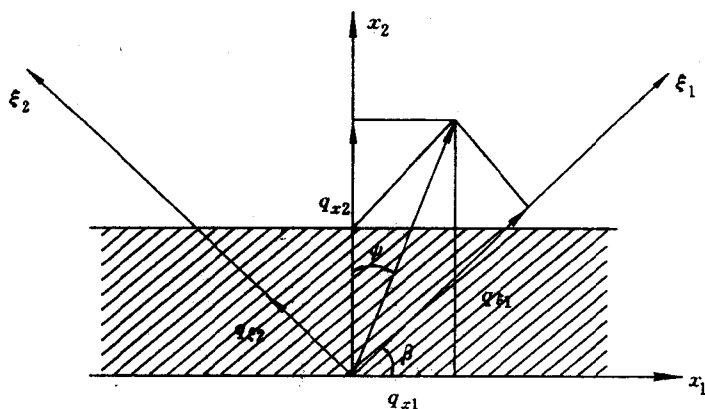


图 1.1 叠层材料中的导热

现以主轴坐标系为旧坐标系, 而以坐标系  $(x_1, x_2)$  为新坐标系。在主轴坐标系中, 温度梯度及热流密度分别为

$$\text{grad } t = \frac{\partial}{\partial \xi_1} i' + \frac{\partial}{\partial \xi_2} j' \quad (1-14a)$$

$$q_{\xi_1} = -\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad q_{\xi_2} = -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (1-14b)$$

$$q = q_{\xi_1} i' + q_{\xi_2} j' \quad (1-14c)$$

$i'$  和  $j'$  分别表示主轴方向的单位向量。

在坐标系  $(x_1, x_2)$  中, 温度梯度及热流密度分别为

$$\text{grad } t = \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j \quad (1-15a)$$

$$q_{x_1} = -\lambda_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-15b)$$

$$q_{x_2} = -\lambda_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-15c)$$

$$q = q_{x_1}i + q_{x_2}j \quad (1-15d)$$

同一物体中,温度梯度及热流密度与坐标系无关。由此,可以得到

$$q_{x_1} = q_{\xi_1} \cos \beta - q_{\xi_2} \sin \beta \quad (a)$$

$$q_{x_2} = q_{\xi_1} \sin \beta + q_{\xi_2} \cos \beta \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cos \beta - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \sin \beta \quad (c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sin \beta + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \cos \beta \quad (d)$$

(c)和(d)联立,可解得

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \beta \quad (e)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \sin \beta + \frac{\partial}{\partial x_2} \cos \beta \quad (f)$$

式(e)和式(f)代入式(a),得到

$$\begin{aligned} q_{x_1} &= -\lambda_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \beta \right) \cos \beta + \lambda_2 \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \sin \beta + \frac{\partial}{\partial x_2} \cos \beta \right) \sin \beta \\ &= -(\lambda_1 \cos^2 \beta + \lambda_2 \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial x_1} - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1-16a)$$

同理可得

$$q_{x_2} = -(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_1} - (\lambda_1 \sin^2 \beta + \lambda_2 \cos^2 \beta) \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-16b)$$

比较式(1-15b)、(1-15c)和式(1-16a)、(1-16b),得

$$\lambda_{11} = (\lambda_1 \cos^2 \beta + \lambda_2 \sin^2 \beta) \quad (1-17a)$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \beta \cos \beta \quad (1-17b)$$

$$\lambda_{22} = (\lambda_1 \sin^2 \beta + \lambda_2 \cos^2 \beta) \quad (1-17c)$$

式(1-17)告诉我们,各向异性材料的导热主轴及主轴方向导热系数知道后,任何方向上的导热系数就能算出。

如果使图 1.1 所示叠层平板的两表面维持常温  $t_{w1}$  和  $t_{w2}$ , 则平板中将产生一维稳态温度场,  $t = t(x_2)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_1} = 0$ 。此时,

$$q_{x_1} = -(\lambda_1 - \lambda_2) \cos \beta \sin \beta \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-18a)$$

$$q_{x_2} = -(\lambda_1 \sin^2 \beta + \lambda_2 \cos^2 \beta) \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-18b)$$

热流密度与  $x_2$  轴的夹角的正切为

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{q_{x_1}}{q_{x_2}} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \beta \cos \beta}{\lambda_1 \sin^2 \beta + \lambda_2 \cos^2 \beta} \quad (1-19)$$

显然,若能满足以下两个条件,则  $\psi = 0$ , 或热流密度的方向与等温面法线方向一致: (1)  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 即材料为各向同性; 或(2)  $\beta = 0$ , 即坐标系  $(x_1, x_2)$  与主轴一致。

对各向异性材料来说,即使取主轴坐标系,热流密度并不与等温面垂直,而温度梯度总是沿等温面的法线方向。



在本书以后的讨论中,只讨论各向同性材料中的导热。

### 1.3 导热方程

傅里叶定律揭示了物体中任意位置处热流密度与该处温度梯度间的关系。如果把能量守恒定律与傅里叶定律结合起来,就能得到导热方程。导热方程是所有导热过程所必须遵循的,它可以以积分方程或微分方程的形式表示,本节中仅论述导热微分方程。

在直角坐标系中的导热微分方程,许多传热学教材中都有推导[2],这里直接引用其推导结果:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho c t) = \nabla(\lambda \nabla t) + q_v \quad (1-20)$$

式中, $c$ 是材料的比热, $\rho$ 是密度, $q_v$ 是体积发热率。

常物性时,式(1-20)变为

$$\frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} \quad (1-21)$$

上式中, $a = \lambda / (\rho c)$ 称为热扩散率,它也是一个重要的热物性参数,表征材料在非稳态导热过程中扩散热量的能力,其值可由物性表中查得。不同材料的热扩散率差别极大,油的扩散率为 $1 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ ,而银的扩散率可达 $2 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ 。式中,等号左边称为非稳态项,等号右边第一项称为扩散项,第二项称为热源项。

无内热源时, $q_v = 0$ ,式(1-21)简化为

$$\frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t \quad (1-22)$$

上式常称为傅里叶导热微分方程,它是一个典型的抛物线型偏微分方程。

对于稳态导热问题,非稳态项消失,式(1-21)简化为

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (1-23)$$

上式称为泊桑方程。

对于无内热源稳态导热问题,上式可进一步简化为

$$\nabla^2 t = 0 \quad (1-24)$$

上式称为拉普拉斯方程,它是典型的椭圆型偏微分方程。

在求解实际导热问题时,所遇到的物体的几何形状是各式各样的,为了使该问题易于求解,往往对不同的具体问题采用不同的坐标系,以尽可能减少导热方程中自变量的数目,或使边界条件的表达简化。下面,我们推导任意正交坐标系中的导热微分方程。

任意正交坐标系中导热方程的推导,可以采用控制容积内的能量平衡法,也可通过不同正交坐标系中基本量(单位向量、梯度等)的关系,由直角坐标系中的导热微分方程转换而得<sup>[10]</sup>。这里采用第一种方法。

图 1.2 表示一个正交坐标系 $(x_1, x_2, x_3)$ , $x_1, x_2, x_3$ 是它的坐标轴,它与直角坐标 $x, y, z$ 的函数关系为