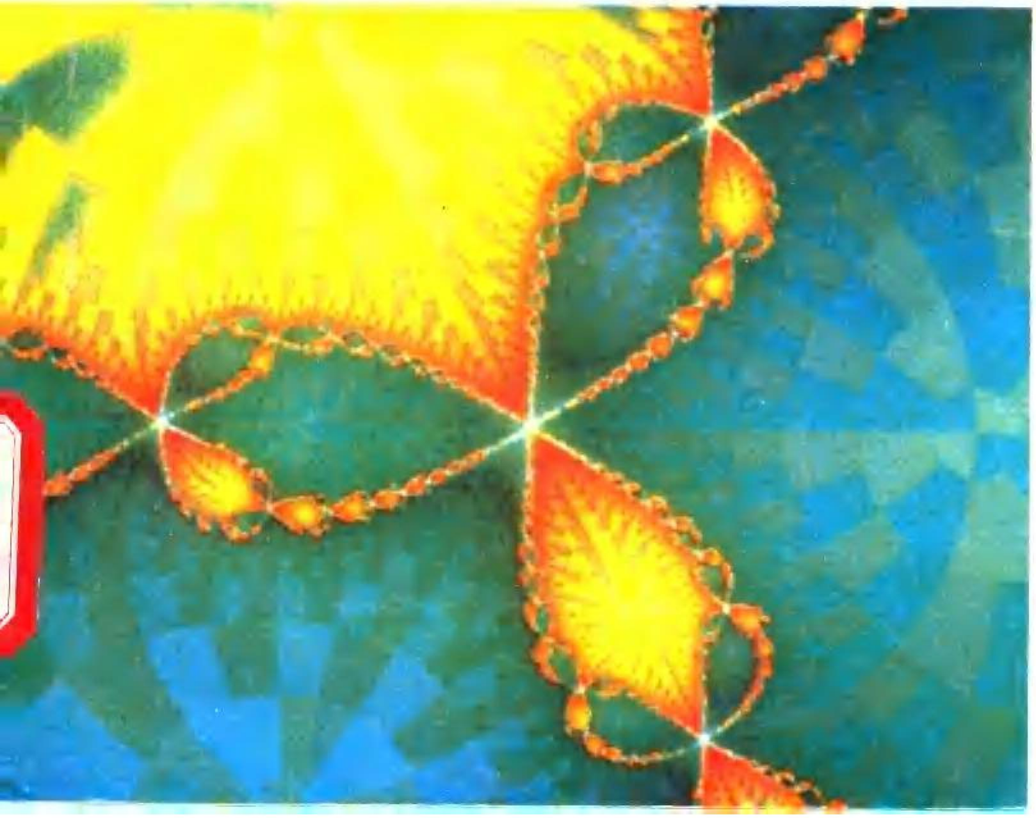
21 数学天元基金

哈密顿系统与时滞微分方程的周期解

刘正荣　李继彬　著

科学出版社

当代数学园地 4



哈密顿系统与时滞微分方程的周期解

刘正荣　李继彬　著

科学出版社

1996

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书简要地阐述近年来发展迅速的高维哈密顿系统周期解存在的变分方法，并介绍高维哈密顿系统周期解存在性与多时滞微分差分方程的周期解之间的关系，证明了微分时滞方程周期解存在的一系列定理．书中还介绍了泛函微分方程的 Hopf 分支与奇异摄动理论，其中涉及 90 年代微分方程、动力系统分支理论及非线性分析研究的最新成果．

本书可供大学数学、物理、力学等系的大学生、研究生、教师及有关的科技人员参考．

当代数学园地 4

哈密顿系统与时滞微分方程的周期解

刘正荣　李继彬　著

责任编辑：吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1996 年10月第　一　版　开本：850×1168　1/32

1996 年10月第一次印刷　印张：7 1/2

印数：1—1 400　　　　字数：193 000

ISBN 7-03-005338-9/O・857

定价：13.50 元

《当代数学园地》编委会

《当代数学园地丛书》前言

《当代数学园地》是国家自然科学基金会数学天元基金支持出版的，该项基金是为“我国数学在21世纪率先赶上世界先进水平”这一目标而设的。这也是本丛书的出版目的。中国数学要跃入世界前列，光靠从国外引入尖子是不行的。在大学以上层次，增强对现代数学思想的训练及对现代数学发展的了解，很有必要。事实上，只有这样，才会使一批尖子人才，在中国成长状大。

本丛书包含数学专著、译著、讲义和通俗读物，其宗旨是以不拘一格的形式向数学研究者、教育工作者，以及数学专业的研究生和大学生传播当今数学的最新发展，包括新理论、新概念、新方法、新思想和新动态。因此，它的组织原则有二条：一、取材新，二、可读性强。

所谓取材新，意味着书的内容须为中文图书中不多见者，尤其欢迎来自崭新的数学分支或者当今十分活跃的数学方向的题材。这是本丛书有别于其它丛书的基本特点。

所谓可读性强，意味着书须写得通俗易懂，起点要低，终点要高，最好图文并茂，这条原则对列入丛书的专著和讲义也不例外。换句话说，即便是专著和讲义，也要尽力在文笔上、组织上下功夫，达到生动活泼，深入浅出，照顾到所提及的读者面。

本丛书欢迎符合上述两原则的各类书稿，不拘篇幅大小。特别欢迎优秀留学人员来稿。对怀有报效祖国之心、但由于种种原因暂时不能回归祖国的留学人员来说，利用书的形式使自己的知识能为祖国的科学技术发展做份贡献，这是切实可行，也是深受欢迎的好事。让我们大家携起手来，不分国内国外，不分资历深

浅，共同为我国数学的发展，及在21世纪率先赶上世界先进水平而努力！

《当代数学园地》编委会

前言

关于时滞微分方程周期解的研究，除了局部Hopf分支的存在性有较系统的工作外，对比较一般的常微分方程而言，存在许多实质性困难。1974年，Kaplan与Yorke发表了《产生时滞微分方程周期解的常微分方程》一文，他们对一类具有1个或2个时滞的微分差分方程，利用具有某种对称性的常微分方程的周期解来产生时滞微分方程的周期解。此后，一些中国数学家和欧美数学家继续发展并推广了Kaplan-Yorke的技巧，对较为一般的包含1个或2个时滞的系统，获得周期解存在性的许多新结果。但是对多于2个时滞的系统，Kaplan-Yorke的技术是否仍然有效？这是近20年来未解决的问题。近年来，本书作者发现，对于多时滞的Kaplan-Yorke型微分方程，可通过经典的Hamilton(哈密顿)系统的周期解来产生时滞微分方程的周期解。换言之，作者在Hamilton系统的周期解理论与时滞微分方程的周期解理论两个不同领域之间建立了基本的联系。从而有可能应用近20年来变分方法在非线性Hamilton系统的周期解研究上所获得的突破性新成果，来研究时滞微分方程的周期解。

本书的主要目的在于介绍作者所发展的上述Kaplan-Yorke型时滞微分方程的周期解存在性理论。为此，需要用三分之一的篇幅叙述Hamilton系统的周期解存在理论，介绍临界点理论在Hamilton系统周期解研究中的应用。鉴于本书的需要，主要考虑自治Hamilton系统。第一章的材料大部分取自Mawhin与Willem的《临界点理论与Hamilton系统》一书，同时也参考了张恭庆、龙以明及Ekeland分别写的三本专著。在第二章严格证明一类时滞微分方程的周期解存在性，利用存在对称群的条件建立Hamilton系统与时滞微分系统周期解之间的联系，给出了一系列的周期解存在定理。其中处理了比

Kaplan-Yorke 的文章更为广泛的几类方程。第二章的材料取自作者近年来完成的最新科研成果，也兼顾介绍国内外学者的部分研究工作。为使本书的内容更加完整，在第三章，介绍有关泛函微分方程 Hopf 分支的定理及其应用。在第四章中介绍近年由 J.K.Hale，S.N.Chow 与黄文璋等发展的一类奇摄动泛函微分方程的动力学行为，揭示了方波与脉冲波分支的“边界层”性质。

作者感谢国家自然科学基金会数学天元基金、云南省应用基础研究基金和云南大学的资助，感谢昆明理工大学对本书出版的支持。对于澳大利亚悉尼大学何学中博士的合作，对于美国阿拉巴马大学黄文璋博士、加拿大蒙特利尔大学 J.Bélair 教授所提供的著作与资料，对于中国科学院数学研究所井竹君教授、北京大学数学系李承治教授对本书出版的支持与帮助，一并表示衷心的感谢！作者还要特别感谢重庆大学张世清博士、南开大学数学研究所龙以明教授和北京理工大学葛渭高教授，他们仔细地审阅了本书初稿，提出了许多中肯的改进意见，使本书的叙述更为严谨和完善。科学出版社吕虹编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，云南大学学报唐民英编辑为本书录入排版，在此一并表示感谢。

作者的愿望是要介绍近年来国内、外本方向研究的最新成果，但由于新的成果层出不穷，文献难免挂一漏十，题材恐有不当。倘有谬误，热忱欢迎读者不吝指正。

李继彬，刘正荣

（1996 年 3 月于昆明理工大学，云南大学）

目　录

第一章　Hamilton 系统的周期解

Hamilton 系统理论是既经典而又现代化的研究领域，可以从不同的角度来进行研究．本章重点介绍自 1978 年以来，由于变分方法的发展而建立的周期解理论，主要讨论自治 Hamilton 系统．

§1.1　Hamilton矩阵与辛矩阵

$2n$ 阶常微分方程

$$\dot{z} = J\frac{\partial H}{\partial z} = JS(t)z = A(t)z \tag{1.1}$$

称为线性 Hamilton 系统，其中 $2n \times 2n$ 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

$I = I_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵，$J^{-1} = J^T = -J$，$S \in \mathrm{gl}(2n, R)$ 是关于 t 连续的对称矩阵，

$$H = H(t, z) = \frac{1}{2} z^T S(t) z \tag{1.3}$$

是 Hamilton 量．显然，(1.3) 所定义的 H 是关于 z 的二次型．

我们用 $\mathrm{gl}(m, F)$ 表示具有元素在域 F(R 或 C) 内的 $m \times m$ 矩阵全体所构成的集合．用 $\mathrm{Gl}(m, F)$ 表示 $\mathrm{gl}(m, F)$ 中非奇异矩阵全体所构成的集合．在矩阵乘法与矩阵与数相乘两种运算下，$\mathrm{gl}(m, F)$ 具有群结构，称为一般线性群．

矩阵 $A \in \mathrm{gl}(2n, F)$ 称为 Hamilton 矩阵（或无穷小辛矩阵），倘若

$$A^T J + JA = 0. \tag{1.4}$$

命题 1.1　以下三种说法等价：(i)　A 是 Hamilton 矩阵，

(ii) $A=JR$，R 是对称矩阵，(iii) JA 是对称矩阵．又若 A 与 B 都是 Hamilton 矩阵，则 A^T，$\alpha A(\alpha\in F)$，$A\pm B$，$[A,B]=AB-BA$ 都是 Hamilton 矩阵．

证 由于 $A=J(-JA)$，从 (1.4) 可见 $(-JA)^T=(-JA)$ 故 (i) 与 (ii) 等价．又因 $J^2=-I$，故 (ii) 与 (iii) 等价．由此可见，线性 Hamilton 系统 (1.1) 的系数矩阵 $A(t)$ 是 Hamilton 矩阵．若 A，B 为 Hamilton 矩阵，A^T，αA，$A\pm B$ 显然是 Hamilton 矩阵．兹证 $[A,B]$ 为 Hamilton 阵．事实上，令 $A=JR$，$B=JS$，R，S 是对称阵．于是 $[A,B]=J(RJS-SJR)$，$(RJS-SJR)^T=S^TJ^TR^T-R^TJ^TS^T=-SJR+RJS$，故 $[A,B]$ 是 Hamilton 矩阵．

兹设 A 是 $2n\times 2n$ 矩阵，且 A 有以下分块

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

从而

$$A^TJ+JA=\begin{bmatrix} c-c^T & a^T+d \\ -a-d^T & -b+b^T \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

由 (1.5) 可见，A 为 Hamilton 矩阵的充分与必要条件是 $a^T+d=0$ 且 b 与 c 是对称矩阵．

$2n\times 2n$ 矩阵 T 称为具有乘子 μ 的辛矩阵，倘若

$$T^TJT=\mu J, \tag{1.6}$$

其中 μ 是某个非零常数．若 $\mu=1$，称 T 为辛矩阵．所有 $2n\times 2n$ 实辛矩阵集合，记为 $\mathrm{Sp}(n,R)$.

命题 1.2 若 T 为具有乘子 μ 的辛矩阵，则 T 是非奇异的，并且

$$T^{-1}=-\mu^{-1}JT^TJ. \tag{1.7}$$

若 T 与 R 分别是具有乘子 μ 与 v 的辛矩阵，则 T^T，T^{-1} 与 TR 是分别有乘子为 μ，μ^{-1} 与 μv 的辛矩阵．

证 由于 (1.6) 右边的 J 是非奇异的，故 T 必是一非奇异的．公式 (1.7) 亦可从 (1.6) 推出．若 T 是辛矩阵，由 (1.7) 可知 $T^T=-\mu JT^{-1}J$，故有 $TJT^T=TJ(-\mu JT^{-1}J)=\mu J$，因此 T^T 是具有乘子 μ 的辛矩阵．余下的证明是类似的，证略．

命题 1.2 说明 $\mathrm{Sp}(n,R)$ 是 $\mathrm{Gl}(2n,R)$ 的子群．

设辛矩阵 T 可分块为

$$T=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}.$$

于是

$$T^TJT=\begin{bmatrix}\alpha^T\gamma-\gamma^T\alpha & \alpha^T\delta-\gamma^T\beta\\ \beta^T\gamma-\delta^T\alpha & \beta^T\delta-\delta^T\beta\end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

因此，T 是具有乘子 μ 的辛矩阵当且仅当 $\alpha^T\delta-\gamma^T\beta=\mu I$ 并且 $\alpha^T\gamma$ 与 $\beta^T\delta$ 是对称矩阵．

由公式(1.7)可知

$$T^{-1}=\mu^{-1}\begin{bmatrix}\delta^T & -\beta^T\\ -\gamma^T & \alpha^T\end{bmatrix}.$$

定理 1.3 线性 Hamilton 系统 (1.1) 的基本解矩阵 $Z(t,t_0)$ 关于一切 $t,t_0\in R$ 是辛矩阵．反之，若 $Z(t,t_0)$ 是连续可微的辛矩阵，则 $Z(t,t_0)$ 是 (1.1) 的一个解矩阵．

证 设 $U(t)=Z(t,t_0)^TJZ(t,t_0)$. 由于 $Z(t_0,t_0)=I$，故 $U(t_0)=J$. $\dot U(t)=\dot Z^TJZ+Z^TJ\dot Z=Z^T(A^TJ+JA)Z=0$. 这说明 $U(t)\equiv J$，即 $Z(t,t_0)$ 为辛矩阵．反之，若 $Z^TJZ=J$，$t\in R$，则 $\dot Z^TJZ+Z^TJ\dot Z=0$，从而 $(\dot ZZ^{-1})^TJ+J(\dot ZZ^{-1})=0$. 这说明 $A=\dot ZZ^{-1}$ 是 Hamilton 矩阵，故 $\dot Z=AZ$.

推论 1.4 常数矩阵 A 是 Hamilton 矩阵当且仅当对一切 $t\in R$，e^{At} 是辛矩阵.

以下我们简要地讨论一下 Hamilton 矩阵与辛矩阵的谱系．若多项式 $P(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_0$ 满足关系 $P(-\lambda)=P(\lambda)$，称 $P(\lambda)$ 为偶次多项式．此时 λ 的一切奇数幂系数等于零．又若 $P(\lambda)=\lambda^m P(\lambda^{-1})$，即 $P(\lambda)$ 的系数对一切 k 满足关系 $a_k=a_{m-k}$，称 $P(\lambda)$ 为反向多项式．

定理 1.5 实 Hamilton 矩阵的特征多项式是偶次多项式．因此，若 λ 是该矩阵的一个特征值，则 $-\lambda$，$\bar{\lambda}$，$-\bar{\lambda}$ 也是该矩阵的特征值．实辛矩阵的特征多项式是反向多项式．因此若 λ 是该矩阵的一个特征值，则 λ^{-1}，$\bar{\lambda}$，$\bar{\lambda}^{-1}$ 亦然．

证 因为 $\det J=1$．设 A 为 Hamilton 矩阵，则

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=\det(A-\lambda I)=\det(JA^TJ-\lambda I)=\det(JA^TJ+\lambda JJ)\\&=\det J\det(A+\lambda I)\det J=\det(A+\lambda I)=P(-\lambda).\end{aligned}$$

故 $P(\lambda)$ 为偶次多项式．

又设 T 为辛矩阵．易证 $\det T=1$，故

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=\det(T-\lambda I)=\det(T^T-\lambda I)=\det(-JT^{-1}J-\lambda I)\\&=\det(-JT^{-1}J+\lambda JJ)=\det(-T^{-1}+\lambda I)\\&=\det T^{-1}\det(-I+\lambda T)\\&=\lambda^{2n}\det(-\lambda^{-1}I+T)=\lambda^{2n}P(\lambda^{-1}).\end{aligned}$$

因此$P(\lambda)$为反向多项式. 证毕.

注意到 J 是一个特殊的辛矩阵，为研究非线性问题的需要，我们再讨论一个特殊的线性边值问题

$$\dot{u}(t)=-\lambda Ju(t),\quad u(0)=u(T),\tag{1.9}$$

其中 $\lambda\in R$，$T>0$. (1.9) 中的微分方程有解

$$u(t)=\exp(-\lambda tJ)c,\quad c\in R^{2n}.$$

由于$J^2=-I$，故

$$\exp(-\lambda tJ)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda t)^kJ^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda t)^{2k}I}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2k+1}(-1)^k J}{(2k+1)!}$$
$$= (\cos\lambda t)I - (\sin\lambda t)J.$$

于是 $u(t) = (\cos\lambda t)c - (\sin\lambda t)Jc$，$c\in R^{2n}$. 这个解满足周期边界条件当且仅当

$$[(1-\cos\lambda T)I + (\sin\lambda T)J]c = 0. \tag{1.10}$$

在上式两边关于 c 与 Jc 取内积，由于 $(Jc, c) = 0$，故

$$(1-\cos\lambda T)|c|^2 = (\sin\lambda T)|Jc|^2 = 0.$$

这说明 (1.10) 存在非平凡解当且仅当 $\lambda = \lambda_k = 2k\pi / T$，$k\in Z$. 取 $\lambda = \lambda_k$，方程 (1.10) 变为 $0\cdot c = 0$，故 $c\in R^{2n}$ 是任意的. 因此，以下命题成立.

命题 1.6 周期边值问题 (1.9) 具有非平凡 T 周期解当且仅当对某个 $k\in Z$，$\lambda = \lambda_k \equiv = 2k\pi / T$. 此时，问题 (1.9) 有 $2n$ 维解向量空间

$$u(t) = (\cos\lambda_k t)c - (\sin\lambda_k t)Jc, \tag{1.11}$$

其中$c\in R^{2n}$是任意常数.

关于线性 Hamilton 系统的更多讨论，读者可参考 [MeH 1] 及书中的参考文献.

§ 1.2 平衡点邻域的局部周期解

首先讨论平衡点与周期解关于参数改变的持续性. 考虑依赖于参数 μ 的微分方程

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{2.1}$$

其中 f: $O\times Q\to R^m$ 是光滑的，O 是 R^m 中的开集，Q 是 R^k 中的开集. 设 $x = \xi_0$，$\mu = \mu_0$ 时系统 (2.1) 有一个平衡点，即 $f(\xi_0, \mu_0) = 0$. 所谓平衡点的持续性，即在参数 μ_0 的邻域内存在一个满足 $\xi(\mu_0) = \xi_0$ 的光滑函数 $\xi(\mu)$，使得对 μ_0 邻域内的

所有 μ 值，$\xi(\mu)$ 仍然是 (2.1) 的平衡点，即 $f(\xi(\mu),\mu)=0$. 对一般情况而言，(2.1) 的解 $\varphi(t;\xi,\mu)$ 是参数 μ 的光滑函数．设解 $\varphi(t;\xi_0,\mu_0)$ 是 (2.1) 的 T 周期解．周期解的持续性是指存在一对定义于 μ_0 邻域内的光滑函数 $\xi(\mu)$，$\tau(\mu)$，使得 $\xi(\mu_0)=\xi_0$，$\tau(\mu_0)=T$ 并且 $\varphi(t;\xi(\mu),\tau(\mu))$ 是 (2.1) 的周期解．上述持续性即平衡点与周期解随参数小改变的保持性．

平衡点 $x=\xi_0=\xi(\mu_0)$ 称为初等平衡点，倘若 $\partial f(\xi_0,\mu_0)/\partial\xi$ 是非奇矩阵．(2.1) 的周期解 $\varphi(t;\xi_0,\mu_0)$ 是周期 T 解，当且仅当 $\varphi(T;\xi_0,\mu_0)=\xi_0$. 对于一般的自治微分方程（或 Hamilton 系统)(2.1)，称周期解 $\varphi(t;\xi_0,\mu_0)$ 是初等周期解，倘若 $+1$ 是单值矩阵 $\partial\varphi(T;\xi_0,\mu_0)/\partial\xi$ 的具有重数为 1 或为 2 的特征值．该特征值称为乘子．

命题 2.1　设微分系统 (2.1) 具有一个非退化的积分，则其初等平衡点与初等周期解具有持续性．

证　对于初等平衡点，用隐函数定理于关系 $f(x,\xi)=0$. 根据假设 $f(\xi_0,\mu_0)=0$ 但 $\partial f(\xi_0,\mu_0)/\partial\xi$ 非奇异，故由隐函数定理，存在函数 $x=\xi(\mu)$ 使得 $\xi(\mu_0)=\xi_0$，$f(\xi(\mu),\mu)=0$.

对于初等周期解，我们需要考虑 Poincaré 回复映射．事实上，Poincaré 映射是连续地依赖于参数 μ 的．设 $P(x,\mu)$ 是当 $\mu=\mu_0$ 时过截面 $\sum$ 的 Poincaré 映射．对 $P(x,\mu)-x$ 应用隐函数定理即得一般系统 (2.1) 周期解具有持续性的结论．余下的情况亦可类似地证明．

现在我们可以证明著名的 Lyapunov 中心定理了．

定理 2.2(Lyapunov 中心定理)　设一个具有非退化积分的系统 (2.1) 在其平衡点处有特征根 $\pm i\omega$，λ_3，λ_4，…，λ_m，其中 $i\omega\neq0$ 是纯虚的，若 $\lambda_j/i\omega$ 是非整数，$j=3,4,\cdots,m$，则存在从平衡点放射出来的单参数周期轨道族，当沿此解族逼近平衡点时，解族的周期趋于 $2\pi/\omega$；其他非平凡特征乘子趋

于 $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$，$j=3,4,\cdots,m$.

注记 2.3（i）对于 Hamilton 系统，Hamilton 量永远是非常周期轨的非退化积分．因此上述定理对 Hamilton 系统成立．

（ii）如果 (2.1) 是 Hamilton 系统，并且在平衡点存在多对纯虚特征根 $i\omega_k$，那么非共振条件"$(\lambda_j/i\omega_k)\neq$ 整数，$j\neq k$"满足．定理 2.2 说明，系统存在多族周期解，且当周期轨道接近平衡点时，周期逼近于 $2\pi/\omega_k$.

定理 2.2 的证明 设 $x=0$ 是 (2.1) 的平衡点，并且在该点方程有形式

$$\dot{x}=Ax+g(x), \tag{2.2}$$

其中 $g(0)=\partial g(0)/\partial x=0$. 由于我们寻找原点近旁的周期解，故可作变换 $x\to\varepsilon x$，ε 为小参数，化方程为

$$\dot{x}=Ax+O(\varepsilon). \tag{2.3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时系统 (2.3) 是线性的．由于线性系统有特征值 $\pm\omega i$，从而有周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解：$\exp(At)a$，其中 a 为常非零向量．该周期解的特征乘子是 $\exp(2\pi A/\omega)$ 的特征值，即 1，1，$\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$. 由定理的假设，非平凡的特征乘子不是 $+1$，故线性系统的周期解是初等的．根据命题 2.1，方程 (2.3) 存在形如 $\exp(At)a+O(\varepsilon)$ 的周期解．在原坐标下，解有形式 $\exp(At)a+O(\varepsilon^2)$. 因此，定理 2.2 成立．

定理 2.2 中的非共振条件是重要的，J.Moser[Mos 1] 曾经举出以下反例说明，虽然 Hamilton 量

$$H(z,\bar{z})=\frac{1}{2}(|z_2|^2-|z_1|^2)+(|z_1|^2+|z_2|^2)\operatorname{Re}(z_1z_2) \tag{2.4}$$

所对应的线性化系统有特征值 $\pm i$，但由于非共振条件不成立，(2.4) 仅有的周期解是零解 $z_1=z_2=0$. [注意，(2.4) 中 $z_k=x_k+iy_k$.]

1973 年，A.Weinstein[Wei 1, 2] 证明了一个引人注目的结果，该文用 R^{2n} 中的 Hamilton 函数 H 在原点（平衡点）的正定性