《概率论与数理统计》
学习指导书

裴雪重　强陶　陈志军　编

航空工业出版社
1988

内容提要

本书是中国人民大学出版社出版的《概率论与数理统计》的自学指导书，该书介绍了自学的四个环节以及《概率论与数理统计》一书的各章要点和习题详解。主要包括各章的概念、公式、难点解释等。解题时着重于技能和技巧，有些典型习题做了一题多解，书后附有常用的数表。本书对于成人高等教育自学考试和大中专相关专业的师生均有参考价值。

《概率论与数理统计》学习指导书

裴雪重　强陶　陈志军　编

航空工业出版社出版发行

（北京市和平里小关东里14号）

全国各地新华书店经售

北京市通县向阳印刷厂印刷

1988年10月第1版　　1988年10月第1次印刷

开本：787×1092毫米1/32

印张：8

印数：1—2500　　字数：18千字

ISBN　7-80046-073-8/O·002

定价：1.90元

目　录

一、绪 言

中国人民大学出版社出版、由人民大学数学教研室编写的《概率论与数理统计》，是受国家教育委员会委托而编写的高等财经院校的试用教材。这个教材目前又被定为财政经济类高等教育自学考试(本科)的自学教材。该书内容包括初等概率论、数理统计及马尔可夫链的概念和简单应用。

自学概率论与数理统计的读者，在处理习题方面往往会遇到困难。编写本书的目的，在于帮助和指导广大自学读者较好地理解各章知识的要点，提高解题的技能和技巧。

本书分为四个部分：绪言；自学数学的四个环节；各章要点；各章解题指导。

本书是以裴雪重同志长期从事《概率论与数理统计》教学的实践经验为基础，裴雪重同志任主编，由强陶同志和陈志军同志参加，共同编写而成的。

二、自学数学的四个环节

“概率论与数理统计”是现代数学的一个重要的组成部分，也是众多的数学分支中较为难学的一部分。难就难在它比一般的数学学科更加抽象，计算也常常显得比较繁琐。但是如果掌握了恰当的学习方法，自学者不仅可以获得成功，而且在学习过程中还会逐渐体会到，概率论与数理统计虽难却有趣，虽繁却有用。

自学“概率论与数理统计”在学习方法上应注意以下几个环节：

第一，阅读教材。

自学的首要问题是把教材阅读好。阅读要仔细，不要图快。必须在对前面的内容获得了正确的了解的基础上，再继续阅读后面的内容。正确理解新的内容，常常需要反复阅读，并多多思考。这是对付抽象问题的基本方法。对于教材中的例题，看懂后最好独立地做一遍，写出详细的计算。

应该特别注意概率论中基本概念的定义。自学时力求对新概念理解得正确，记忆得明确，理解概念是学好数学的基础。要认真思考教材中对某些定义所举的例子，并设法自己举出类似的例子来。在阅读教材的时候，把内容的摘要和自己的体会可以写在笔记本上，这常常是很有益的学习方法。

阅读每一个定理时，其基本形式应该搞清楚。定理都是由条件、结论与证明组成的。条件在证明过程中都必须用到。阅读时应能够准确地指出定理中每一项条件在证明中的

什么地方被利用到。写一写复杂定理证明的概要是有益的。

第二，做习题。

做习题是学习数学的基本方法，是必须的步骤。阅读教材后，应马上着手解教材中相应部分的习题。当然，做习题前，应对教材的例题做彻底的理解。人民大学出版的《概率论与数理统计》各章配备习题并不算多，自学者应努力解出全部习题。我们这本学习指导书对各章的习题都做了详尽的解答，以供自学者参考。大部分习题各提供一种解法，有些典型习题做了一题多解。希望读者养成独立做习题的习惯。当做完习题时，或有些题经深思熟虑也难以应付时，可以查阅有关解答。

做习题时要从数材的有关原理出发，注意解题每一步的根据。根据必须是被确认无误的。

如果对同一道习题，读者知道有几种不同的解法，则应选择最简明最恰当的解法。对于该指导书的一题多解情况，读者也应做出自己的判断。这样做的目的是，读者通过比较鉴别，可以熟悉知识，更深刻地理解知识。

在解题开始前，为自己拟定一个简短的解题计划——基本步骤，是有好处的。这一点对解比较复杂的习题更加重要。

应该详细地，按按例题的规范解答习题。不要把习题解在零散的纸上，而是解在固定的习题本上。字迹要工整。两题之间要留有适当的空白，以备补写必要的体会。

每道习题都应解出所要求的最终的答案，不要虎头蛇尾，自以为会了就不再解下去了。因为解题不彻底，将得不到完全的练习，问题常常容易出现在这一部分。如果同类习题较多时，当然可以摘其一、二详解，其它做一般的思考便

可以了。解题的答案应该化简到最简的形式。

第三，做笔记。

做习题并不是深化理解知识的唯一手段。阅读教材或做习题时都可以做笔记。做笔记的一个重要意义是及时记载下自学遇到的问题或随感、联想等，这样便于深入地学习。这些问题或联想常常是不能在书中找到的，有待于求教别人得到解答，或随着学习的进展和深入自己予以解答。

做笔记的另一个重要意义，在于培养自学者独立工作的能力和创造力。做好的笔记就是一本新的创作。

建议在第一遍阅读教材时在笔记本中记下定义、定理的表述，定理证明的基本步骤、公式以及例题解答的思路。

笔记本边上留出空白，以便标出疑难问题。

不要忽视整齐书写的重要意义。笔记本的书写应该清楚、整洁并有条理。这不仅可以使自学者养成有秩序进行学习的习惯，而且还可以避免许多错误。潦草的书写经常使繁复的计算功亏于篑一。

建议做笔记时，在以公式形式得出的结论下，打上重点记号，或画上一个小方框，以便在复习时能一望而知，且能更好地记住这些公式。

第四，自我检查。

测验或考试是教学的必要环节，它可以达到检查学习中存在的问题和复习巩固已学知识的目的。

自我检查如何进行呢？每自学完一章可以进行一次自我检查。检查的题目可以是教材中的例题，也可以是精选后的习题。书中的例题可以对照，我们这本书的习题解答也可以对照。还可以从类似教材中选一些例题或习题，做为自我检查题。检查时应该计时，以加强时间观念，适应考试的需要。

三、各章要点

第一章　随机事件及其概率

本章主要介绍的是概率论中的基本知识和一些基本概念。

首先，要对事件以及事件的随机性加以深刻的理解。在概率论和数理统计中，主要研究的是随机事件的规律性。

本章的要点是：

1．随机事件的概率。本书主要介绍了统计概率和古典概率两种。这两种概率的区别在于，统计概率是在大量重复试验中，某事件发生可能性具有一定的稳定性。当试验的次数越大，这种某事件出现的频率越稳定；而古典概率中组成的基本事件(样本点)总数为有限个。另外古典概率还要求各基本事件出现的可能性相同。对于统计概率，事件频率的稳定性是概率的经验基础，事件的概率完全决定于事件本身的结构。

2．我们要很好地掌握概率的两种运算法则，即加法法则和乘法法则。

在加法法则中，要注意互斥事件和的概率和任意几个事件和的概率结果是不一样的，这尤其在实际应用中要注意。

对于概率乘法，我们首先要弄懂条件概率的概念。在此基础上定义的两事件交的概念也要搞清楚，还要分清概率的乘法法则的两种形式。

3． 全概率公式为我们提供了一种思想方法．这就是把复杂事件B分割成一些互斥事件的并事件．而这些互斥事件是一些简单事件，再将加法法则与乘法法则相结合，计算出需求的复杂事件B的概率。

贝叶斯公式是解决全概率问题相通问题的。已知各个先验概率和对应的条件概率，现在复杂事件B已经出现，那么各先验概率又是多少？就是推断事件B来自各先验事件的可能性。

全概率公式及贝叶斯公式主要应学会运用。

4． 关于事件独立的定义要很好掌握，其要点是要真正区分事件独立和事件互斥，这是两个本质完全不同的概念，切勿混淆。两个事件(有非零概率)互斥就不独立，独立就不互斥。应该特别注意的是：对立不是独立，对立是互斥的特例。还应指出，事件的互斥性或独立性的判定，虽然可以从定义式或充分条件出发，但在实际中，则主要依靠直观认识，依靠实践经验。

由于本章学习牵扯到排列组合问题，因此在这里把有关知识概括如下。

排列、组合

1． 加法原理

完成一件事情的方法有不同类型，各类方法能独立完成，求完成这件事情总的方法数用加法。

设第1类方法有m种，…，第n类方法有m_n种．总方法数为N，则：

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

2． 乘法原理

完成一件事情的方法分步进行，各个步骤结合起来才能

完成，求完成这件事情总的方法数用乘法。

设第1步方法有m_1种，……，第n步方法有m_n种，总方法数为N，则：

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\ \cdots\ \cdot m_n$$

3．排列

(1) 选排列

从n个不同的元素中，每次取$m(m<n)$个元素按一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中每次取m个元素的选排列。用A_n^m表示，则有：

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

(2) 全排列

n个不同的元素排列一列叫做n个不同元素的全排列。所有不同排列的种数为全排列数。用p_n表示，则有：$p_n=A_n^n=n!$

(3) 可重复排列

从n个不同的元素中，取m个元素进行排列，并且每个元素都可以重复选取，叫做n个不同元素在m个位置上的可重复排列。则有：

$$N=\underbrace{n\cdot n\cdots\cdot n}_{m\text{个}}=n^m$$

4．组合

(1) 组合

从n个不同的元素中，每次选取$m(m\leqslant n)$个元素组成一组，而不考虑顺序如何，叫做从n个不同元素中每次取m个元素的组合，所有不同组合的种数叫做组合数。用符号C_n^m表示，则有：

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=$$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(2) 可重复组合

从n个不同的元素中选取m个元素组成一组，并且每个元素都可以重复选取，叫做从n个不同元素中取m个元素的可重复组合。所有不同组合的种数叫做可重复组合数。用符号C_n^m表示，且有：

$$C_n^m=C_{n+m-1}^m$$

(3) 组合的两条重要性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

5. 二项式定理

当n为正整数时，有：

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$$

下面列的是本章的基本概念、定理、定义及公式。

§1 随机事件

在这一章中，首先要对事件及其关系和运算有一个明确的认识。

1. 事件：在概率论中，我们把试验的结果称为事件。

不可能事件用Φ表示。

必然事件用Ω表示。

2. 事件间的关系：

(1) 事件的包含：如果事件A发生必然导致事件B发生，即A中的每一个样本点都包含在B中，称为事件B包含事件

A。记作：

$$B\supset A \quad 或 A\subset B$$

（2）事件的相等：如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，即 A 与 B 所含的样本点完全相同。则称事件 A 和 B 相等(或等价)。记作：

$$A=B$$

（3）事件的互不相容：如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 A 与 B 没有公共样本点，则称事件 A 和 B 互不相容(互斥)。

（4）事件的对立：如果样本空间中有两个事件 A 和 B，并且 A 和 B 互不相容，则称事件 A 和 B 对立。

3. 事件间的运算：

（1）事件的并(和)：两个事件 A、B 中至少有一个发生，是一个事件，即这个事件是由事件 A 和 B 所有的样本点构成，则称作事件 A 与 B 的并(和)，记作：

$$A+B \quad 或 \quad A\cup B$$

（2）事件的交(积)：两个事件 A 与 B 同时发生，是一个事件，即这个事件是由事件 A 和 B 的所有公共点构成，称为事件 A 与 B 的交。记作：

$$AB \quad 或 \quad A\cap B$$

（3）事件的差：事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，即这个事件是属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成，称为事件 A 与 B 的差。记作：

$$A-B$$

（4）完备事件组：事件 A_1，…，A_n 两两互斥且 $A_1+\cdots+A_n=\Omega$，称 A_1，…，A_n 构成一个完备事件组。

4. 随机事件(简称事件)：每次试验中，可能发生也可能不发生的，而在大量试验中具有某种规律性的事件称为随

机事件。

必然事件：每次试验中一定发生的事件。

不可能事件：每次试验中一定不发生的事件。

§2 概率

1. 概率的统计定义：在相同的条件下，重复进行几次试验，事件A发生的频率m/n稳定地在某一常数p附近摆动，且一般说，n越大，摆动的幅度越小，则称常数p为事件A的概率，记作：$P(A)$。

2. 概率的古典定义：若试验结果一共由n个基本事件A_1，A_2，…，A_n组成，这些事件的出现具有相等的可能性，而事件A由其中某m个基本事件所组成，则事件A的概率是：

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

这里A_1，…，A_n构成一个等概完备的事件组。

§3 概率的加法法则

加法法则：两个互斥事件A、B之和的概率等于这两个事件概率之和。即：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

广义加法法则：对任意两个事件A、B之和的概率等于这两个事件概率相加后再与这两个事件交的概率之差。即：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

从上面的加法法则可以得到以下几个结论

1. A_1，A_2，…，A_n两两互斥，则有：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$$

即：$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

2． A_1，A_2，…，A_n构成完备事件组，则

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

即：$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

3． 对立事件A和B的概率之和为 1

即：$P(A)+P(B)=1$　　　$P(A)=1-P(B)$或

$P(B)=1-P(A)$

4． 如果$B\supset A$，则：

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

§4 条件概率与乘法法则

1． 条件概率：在事件B已经发生的条件下，事件A发生的概率，称作事件A在给定B下的条件概率。记作：

$$P(A/B)$$

2． 乘法法则：两个事件A、B之交的概率，等于其中任一事件(其概率不为零)的概率乘以另一事件在已知前一事件发生条件下的条件概率。

即　$P(AB)=P(A)P(B/A)$　　（若$P(A)>0$）

或　$P(AB)=P(B)P(A/B)$　　（若$P(B)>0$）

3． 全概率定理(全概率公式)：如果事件A_1，A_2，…构成一个完备事件组，且都具有正概率，则对任一概率不为零的事件B，有：

$$P(A_m/B)=\frac{P(A_m)P(B/A_m)}{\sum_i PA_i P(B/A_i)} \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

§5 独立试验概型

两个事件独立：如果事件A发生的可能性不受事件B发生与否的影响，即$P(A/B)=P(A)$。则称事件A对于事件

B独立。

n个事件独立：如果$n(n>2)$个事件A_1，$A_2\cdots$，A_n中任何一个事件发生的可能性都不受其它一个或n个事件发生与否的影响，则称A_1，A_2，$\cdots$，A_n相互独立。

关于独立性的命题：

命题1：A与B独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

命题2：若A与B独立，则$\bar{A}$与B，A与$\bar{B}$、$\bar{A}$与$\bar{B}$中的每一对事件都相互独立。

命题3：若A_1，$\cdots$，A_n相互独立，则有

$$P(A_1\cdots A_n)=\prod_{k=1}^{n}P(A_k)$$

命题4：若A_1，$\cdots$，A_n相互独立，则有

$$P(\sum_{k=1}^{n}A_k)=1-\prod_{k=1}^{n}P(\bar{A}_k)$$

独立试验序列概型：在同样条件下重复进行试验的数学模型。

试验的独立性：一次试验的结果不受其它各次试验结果的影响。

贝努里定理(贝努里公式)：设一次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，则n重贝努里试验中，事件A恰好发生K次的概率$P_n(K)$为

$$P_n(K)=C_n^k p^k q^{n-k}\qquad(k=0,1,\cdots,n)$$

其中：$q=1-p$

第二章　随机变量及其分布

本章主要介绍了随机变量的概念及分类：连续型随机变

量及离散型随机变量。并把这两种随机变量的分布及分布函数作了介绍，同时，还把二元连续型随机变量及离散型随机变量的有关知识向读者作了介绍。

本章的要点是：

1． 关于离散型随机变量的分布有三种表示法：

(1) 列表法——将随机变量可能取值及相应的概率以表格的形式列出。

(2) 表达式法——将随机变量的概率分布用一系列等式表示。

(3) 图示法——将随机变量的取值在坐标横轴表示，相对应的概率在纵轴上表示，作出图形。

2． 关于连续型随机变量的分布主要用密度函数来描述，密度函数反映了随机变量在任意点附近取值概率的大小，同时，还可以用坐标平面上曲线表示。

3． 随机变量的分布函数是其累积概率函数的一种特殊情况，是从左端点(或$-\infty$)到任意一点x的累积概率函数。读者要从其性质对分布函数加深理解。

4． 二元随机变量是多元随机变量最简单的一种，我们研究二元随机变量，很多结果可以推广到n元随机变量的情况。

5． 二元随机变量分成离散型和连续型两种，离散型随机变量的概率分布可以用概率分布表及联合分布律来表示，而连续型随机变量的概率分布可以用联合分布密度来表示。

6． 二元离散型随机变量的边缘分布及二元连续型随机变量的边缘分布及二元连续型随机变量的边缘分布密度的定义及概念。