微积分教程

扈志明 韩云瑞 主编 施学瑜主审

下

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

微积分教程

（下册）

扈志明　韩云瑞　主编

施学瑜　主审

清华大学出版社

(京)新登字158号

内容提要

本书分上、下两册。上册内容包含实数与函数，极限论与连续函数，一元函数微积分，数项级数与函数项级数(包括幂级数和 Fourier 级数)；下册内容包含空间解析几何，多元函数微积分，向量分析与常微分方程初步。书中每节后都附有适量的习题，每一章后附有综合性较强的、有一定难度的补充题。本书可供理工科大学一年级的微积分课程作为教材或者教学参考书。上、下两册的讲授时间总共大约需要160学时。本书还可以作为复习微积分(高等数学)，准备参加理工科硕士研究生入学考试的参考书。

书　名：微积分教程(下册)
作　者：扈志明等
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研楼，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　**印张**：12.375　**字数**：322千字
版　次：2000年2月第1版　2000年2月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-01201-6/O・226
印　数：0001～5000
定　价：15.00元

前　言

本书是清华大学理工科各系一年级《微积分》课程的教材，它的前身是同名讲义.该讲义从1991年以来经过三次修改，并在清华大学各系使用多年，已经成为清华大学《微积分》课程的主要教材之一.清华大学应用数学系先后有十余位教师参与过原讲义的编写与修改工作.现在的这部教材是在原有的基础上再次进行较大的修改而写成的.

随着科学技术的发展与教学改革的深入，近年来清华大学《微积分》课程的教学思想与内容要求发生了很大变化，这部微积分教材从一个侧面反映了清华大学《微积分》课程教学的发展趋势和教学水平.

由于近代数学以及许多有应用价值的数学知识不断地被充实到大学数学的教学内容中来，经典微积分的课时不断地被压缩，在这种情况下，更应当重视《微积分》课程在大学数学课程体系中的基础地位，在适当精简教学内容的同时，应当更好地把握微积分的基本要求，在较短的时间内，使学生掌握微积分的基本思想与基本方法.在为其它数学课程与各专业课程奠定良好的基础的同时，使学生的数学素养和能力得到扎实的提高.这是本书编写的主要指导思想.

在《微积分》课程的教材中，使分析的概念和原理与代数的运算相结合，将现代数学的观点和语言融入经典的微积分素材之中，已经是一种趋势，在这方面，本书编者已经做过反复的探索.但是，经典微积分的思想与方法仍然是基础数学与应用数学的非常重要的基础.《微积分》课程教学的主要任务，是使大学生掌握经典微积

分的基本思想与基本方法.大学生们可以通过学习后续数学课程了解现代数学的内容与方法.鉴于这些考虑,在引进现代数学的原理和语言方面,本书只作了适量的努力.

尽管本书与传统的微积分教材没有体系上的重大区别,但是它的内容与叙述方法却有许多变化.例如,多元微积分与常微分方程的材料处理尽可能地使用线性代数语言描述,第二型线、面积分与向量场有机地结合起来,并更加重视物理背景,多元微分的分析概念更好地与几何直观相结合等.

教材中尽可能地将微积分发展中若干重要思想有机地融会于教学内容之中,向读者介绍了微积分的重要原理的产生背景与发展过程,展示一代代数学大师的光辉思想与巨大贡献.使学生在学习微积分知识的同时,在微积分前进的历史足迹中,受到启迪,吸取力量.

施学瑜教授对于本书的编写给予了热情的关心和指导,他认真阅读了教材全部内容,提出了许多有价值的意见和建议.吴洁华副教授也对教材提出了非常中肯的意见,他们的许多建议都已经为编者所采纳.孙念增教授曾经认真审阅过原讲义下册,并提出了具体的指导意见.马连荣博士,吕志博士,刘智新博士,杨和平、卢旭光博士,章梅荣教授,胡金德教授都曾经参加过原讲义的编写工作,许甫华副教授,王燕来副教授,刘庆华副教授都曾为这部教材的形成作出过贡献.除此之外,谭泽光教授,白峰杉教授为本教材的编写提供了多方面的支持和鼓励.借此机会,向他们一一致谢.

由于编者水平所限,错误与疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1998年11月于清华大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

下　册

第 9 章　空间解析几何

微积分中的许多概念和原理都有直观的几何意义.将抽象的数学概念和原理与几何直观有机地结合,不仅可以加深对问题的理解,而且能够启发人们的想像能力和创造能力.几何的方法是现代数学重要的组成部分,限于篇幅,这里只能介绍多元微积分中常用的一些空间解析几何知识.

9.1　向量及其运算

9.1.1　向量及其线性运算

在物理学中的力、位移和速度等一些量,不仅有量的大小,还有确定的方向,这样的量称为**向量**(Vector).在几何上,常常将向量表示为一个有方向的线段,例如图 9.1 中的线段$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$都表示向量.有时也用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 等表示向量.

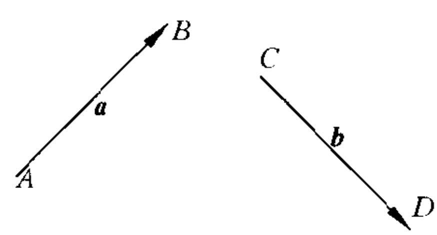

图　9.1

向量的大小称为该向量的**模**,或**长度**,也称为向量的**范数**(norm).向量$\overrightarrow{AB}$的范数就等于该线段的长度,并用$|\overrightarrow{AB}|$表示.如果 $\boldsymbol{a}$ 表示向量,则用$|\boldsymbol{a}|$表示该向量的范数.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且范数相等,则称这两个向量**相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的范数相等但方向相反,则记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

范数等于零的向量称为**零向量**,用 $\mathbf{0}$ 或 θ 表示零向量,零向量的方向是不确定的.

对任一非零向量 $\boldsymbol{a}$,都存在一个范数与 $|\boldsymbol{a}|$ 相等但方向相反的向量,将后者记作 $-\boldsymbol{a}$.

下面介绍向量的线性运算. 线性运算是向量最主要的一种运算,它包括向量的**加法**与**数乘**.

向量的加法服从平行四边形法则:设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个任意向量. 用 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$,将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至点 O,并用 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$,然后以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$(图 9.2),该平行四边形的对角线 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

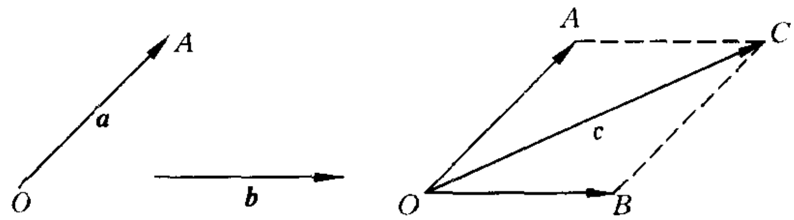

图 9.2

也可以用三角形法则说明向量的加法:设 $\boldsymbol{a}$ 为向量 $\overrightarrow{OA}$,将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A,此时 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 C,那么向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种方式定义的向量加法与平行四边形法则是一致的.(图 9.3)

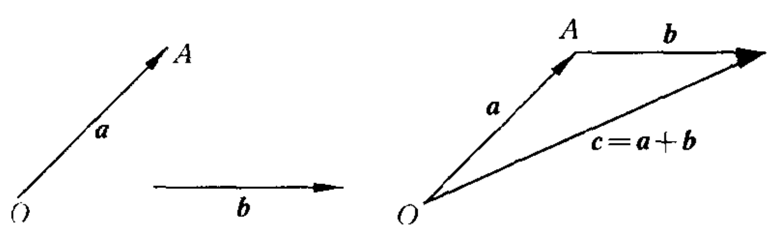

图 9.3

设向量 $-\boldsymbol{b}$ 是一个方向与 $\boldsymbol{b}$ 相反,但其范数与 $\boldsymbol{b}$ 范数相等的向量. 我们规定

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{9.1.1}$$

读者可以根据向量加法的平行四边形法则或者三角形法则说明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的直观意义.

定理 9.1.1 向量的加法具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$(结合律);

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

最后的不等式具有明显的几何意义:三角形的任意一个边长不超过其它两个边长之和.

向量的**数乘**是这样定义的:设 $\boldsymbol{a}$ 为任意向量,λ 为任意实数.用 λ 乘 $\boldsymbol{a}$ 得到一个新的向量 $\lambda\boldsymbol{a}$.这个向量的范数是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.它的方向是这样规定的:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 一致;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

定理 9.1.2 向量的数乘有下列性质:设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数,则有

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$;

(3) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(4) $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$,$\lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$;

(5) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{\theta}$,则 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是一个单位向量(即范数等于 1 的向量),并且 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}$.

9.1.2 向量的积

向量的积有内积,外积和混合积三种.下面逐一介绍.

1. 向量的内积

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至点 O,并用

$\overrightarrow{OB}$表示 $\boldsymbol{b}$. 此时,线段$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的夹角 α 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记作 $\widehat{\boldsymbol{ab}}$,两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角满足 $0\leqslant \widehat{\boldsymbol{ab}} \leqslant\pi$(图 9.4).

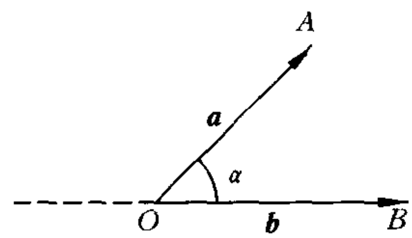

图 9.4

定义 9.1.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量,$\widehat{\boldsymbol{ab}}$ 是它们的夹角,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**(inner product)定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}. \tag{9.1.2}$$

任意两个向量的内积$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是一个实数,因此向量的内积又称为**数量积**. 通常,三维空间中的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的内积用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间夹一个圆点 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示,所以向量的内积又称为**点乘积**.

另外又规定,任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量的内积等于零,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\theta}=0$.

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交**(orthogonal),或者**垂直**,并记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 显然任意向量与零向量正交.

定理 9.1.3 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数,则有

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 令 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}^2\geqslant 0$,并且当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$ 时有 $\boldsymbol{a}^2=0$;

(4) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则有

$$\cos\widehat{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|};$$

(5) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$;

(6) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$;

(7) 如果 $\boldsymbol{a}$ 与所有向量都正交,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$;

(8) 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$.

以上各条性质请读者自己验证.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

现在解释数积的几何意义.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 为单位向量，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 为非零向量. 延长 $\overrightarrow{OA}$ 成直线 l，自向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 向直线 l 引垂线交 l 于点 C（图 9.5），得到直线 l 上的向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，称这个向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的**投影**(project). 向量 $\boldsymbol{c}$ 的范数为 $|\boldsymbol{c}|=\left||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}\right|=|\boldsymbol{b}|\left|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}\right|$. 它的方向是这样的：当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}>0$ 时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致；当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}<0$ 时，方向相反；当 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 时，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}$.

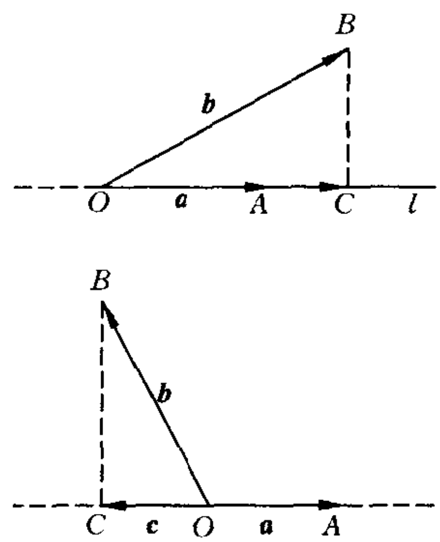

图 9.5

2. 向量的外积

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，这是一个新的向量，它的范数为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\widehat{\boldsymbol{ab}}. \qquad (9.1.3)$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 成右手系. 也就是说，伸出右手的拇指、食指和中指，并且使中指与前两者都垂直. 如果拇指代表 $\boldsymbol{a}$，食指代表 $\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向与中指方向是一致的.（图 9.6）

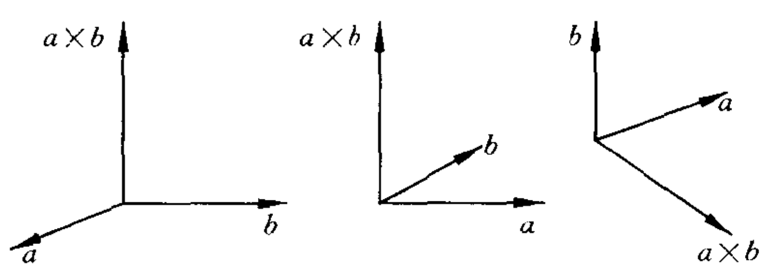

图 9.6

由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，所以外积又称为**向量积**. 另外，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 又称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**叉积**.

由外积的定义直接看出，任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$；如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线（即 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反），则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\theta}$.

向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的几何意义是这样的：如果用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 为邻边构造平行四边形，这个平行四边形的面积就是向量积的范数 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\widehat{\boldsymbol{ab}}$（图 9.7）.

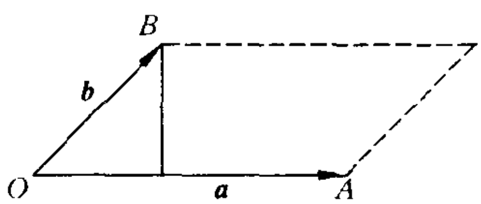

图 9.7

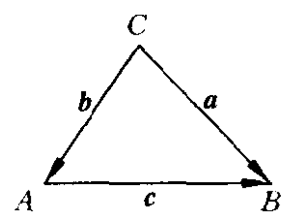

图 9.8

定理 9.1.4 向量的外积有下列性质：设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ、μ 为任意实数，则有

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律）；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$；

例 9.1.1 设三角形 ABC 的三个边长分别等于 a、b 和 c，求证（图 9.8）

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{9.1.4}$$

证明 注意到 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$，所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB},\end{aligned}$$

于是得到

$$\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB},$$

从而
$$|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}|,$$
即
$$ab\sin C=cb\sin A=ca\sin B.$$
由此立即得到(9.1.4)式，证毕.

3. 向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的**混合积**为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，这是一个实数.

以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱作平行六面体(图 9.9)，六面体的底是由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形，这个平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，又用 α 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角，则平行六面体的体积恰好是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 也就是说，混合积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

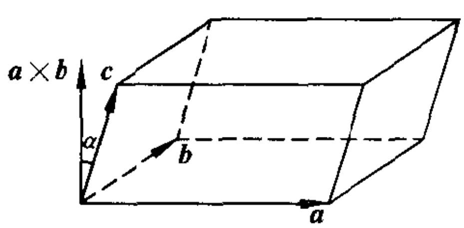

图 9.9

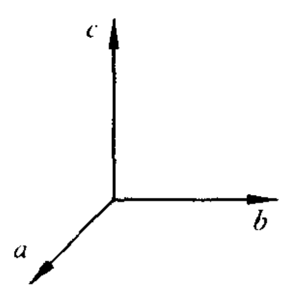

图 9.10

定理 9.1.5 向量的混合积有下列性质：设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为任意向量；λ,μ 为任意实数，则

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a}_1+\mu\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，其中 $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$ 为任意向量；

(3) 当且仅当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 在同一平面时，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$；

(4) 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为互相正交的单位向量，且构成右手系(图

9.10)，则有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=1.$$

习 题 9.1

1. 求证向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相正交的充分必要条件是：对任意实数 λ，有 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$.

2. 求证向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交的充分必要条件是对任意实数 λ，都有 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量，则有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$$

并说明等式的几何意义.

4. 证明向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 正交.

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，并满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}$，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=?$

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=26,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

7. 已知 $|\boldsymbol{a}|=10,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，计算 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}$，求证 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，求证 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行.

10. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量，求证

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

9.2 空间直角坐标系

9.2.1 直角坐标系的建立

设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为互相正交的三个单位向量，以 O 点为公共起点，并且组成右手系(图 9.11). 过点 O 沿着三个向量方向作直线 Ox,Oy

和 Oz. 分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向作为它们的正向,并且取这些向量的长度作为单位,就使得 Ox,Oy 和 Oz 成为三条实数轴,称为**坐标轴**. 由点 O 和坐标轴 Ox,Oy,Oz 就组成了一个**直角坐标系** $Oxyz$,点 O 称为**坐标原点**.

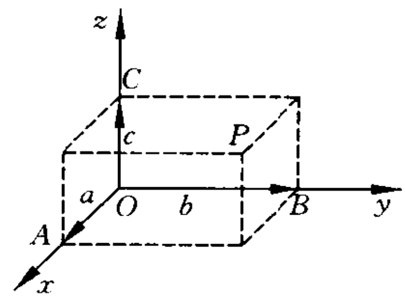

图 9.11

设 P 为空间任意一点,自 P 向三条坐标轴作垂线,分别交 Ox,Oy,Oz 于点 A,B,C,这三个点分别代表 Ox,Oy,Oz 轴上的三个实数 a,b,c. 这三个数分别称为点 P 的 x 坐标,y 坐标和 z 坐标,记作 $P=(a,b,c)$或 $P(a,b,c)$. 反之,任意给定有次序的三个实数 a,b,c,在空间存在唯一的点 P,使得 P 的三个坐标分别为 a,b,c. 这就是说,空间的点和有序数组(a,b,c)之间建立了一一对应的关系.

在上述坐标系中,单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为**基向量**.

如果点 $P=(a,b,c)$,则向量$\overrightarrow{OP}$可表示为

$$\overrightarrow{OP} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}. \tag{9.2.1}$$

注意这个表达式中三个实数 a、b、c 与该向量终点 P 的坐标一致. 这里的 a、b、c 也称为向量$\overrightarrow{OP}$的三个坐标. 如果一个向量是以原点 O 为起点的,那么其终点 P 就可以完全确定这个向量. 因此,在空间中,一个点可以看作是以该点为终点的向量,反之向量也可以用它的终点来表示. 今后,我们将把点和向量不加区分.

设 P、Q 是空间的两个点,向量$\overrightarrow{PQ}$的模 $|\overrightarrow{PQ}|$ 称为 P 与 Q 之间的**距离**,记作 $d(P,Q)$,即

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}|. \tag{9.2.2}$$

设 $P=(a,b,c)$,即由 P 向三坐标轴引垂线分别交 Ox,Oy,Oz 轴于点 A,B,C. 这三个点分别代表实数 a,b,c,则向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的模分别为

$$|\overrightarrow{OA}| = |a|, \quad |\overrightarrow{OB}| = |b|, \quad |\overrightarrow{OC}| = |c|.$$

注意到这三个向量互相正交，并且

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{9.2.3}$$

由定理 9.1.3 内积性质(8)就可以推出

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

于是

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

即点 P 与原点 O 的距离为

$$d(P,O) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

完全类似地可以证明，点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 与 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 的距离为

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{9.2.4}$$

例 9.2.1 在 Oz 轴上求一点 M，使它与 $A(-4,1,7)$ 的距离等于它到 $B(3,5,-2)$ 的距离.

解 设 $M=(0,0,z)$，则由(9.2.4)式，

$$d(M,A) = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7-z)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2},$$

$$d(M,B) = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2-z)^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2},$$

令 $d(M,A)=d(M,B)$，得方程

$$66 - 14z + z^2 = 38 + 4z + z^2.$$

解此方程得到 $z=\dfrac{14}{9}$，$M=\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

在直角坐标系 $Oxyz$ 中，平面 xOy，yOz 与 zOx 称为**坐标面**. 这三个坐标面将空间分成八个部分，这八个部分称为八个**卦限**. 在 xOy 上方的四个卦限是第一，二，三，四卦限，在 xOy 平面下方的称为第五，六，七，八卦限(图 9.12).

对于空间任一点 $P(a,b,c)$，可以根据它的三个坐标 a,b,c 的不同符号，按下面的表格来判断 P 点所属的卦限.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com