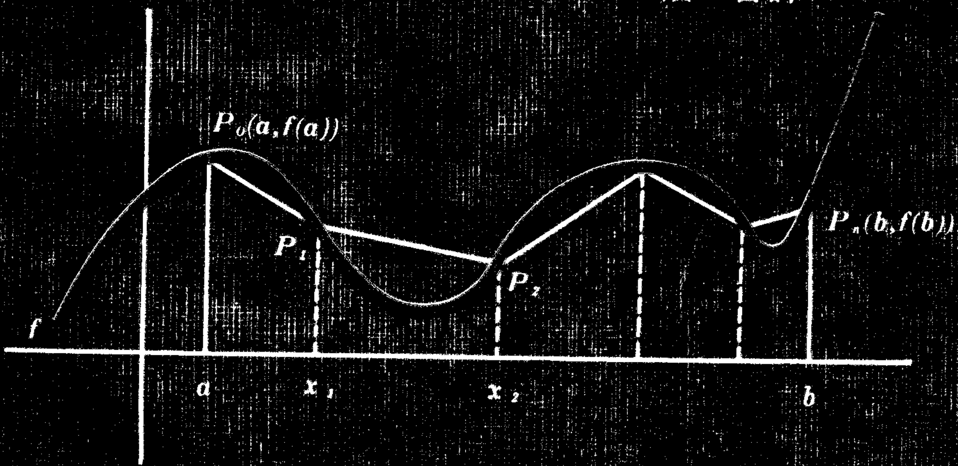
微積分

下冊

EDWIN E. MOISE 原著

李巡伯 徐復 張德新 葉福 合譯



校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行

中華民國五十八年九月初版
中華民國六十六年九月三版

大學用書 微 積 分（全三册）
下册 定價 新台幣陸拾元整
（外埠酌加運費滙費）

譯 者	李巡伯 吳森原 葉 福
發行人	卓 鑫 淼
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470 郵撥：6481
印刷者	中 臺 印 刷 廠 臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（58040）

微　積　分

下 册 目 次

第十一章　無窮級數

第十二章　線性空間與向量空間

第十三章 富氏級數

第十四章 線性變換・矩陣・行列式

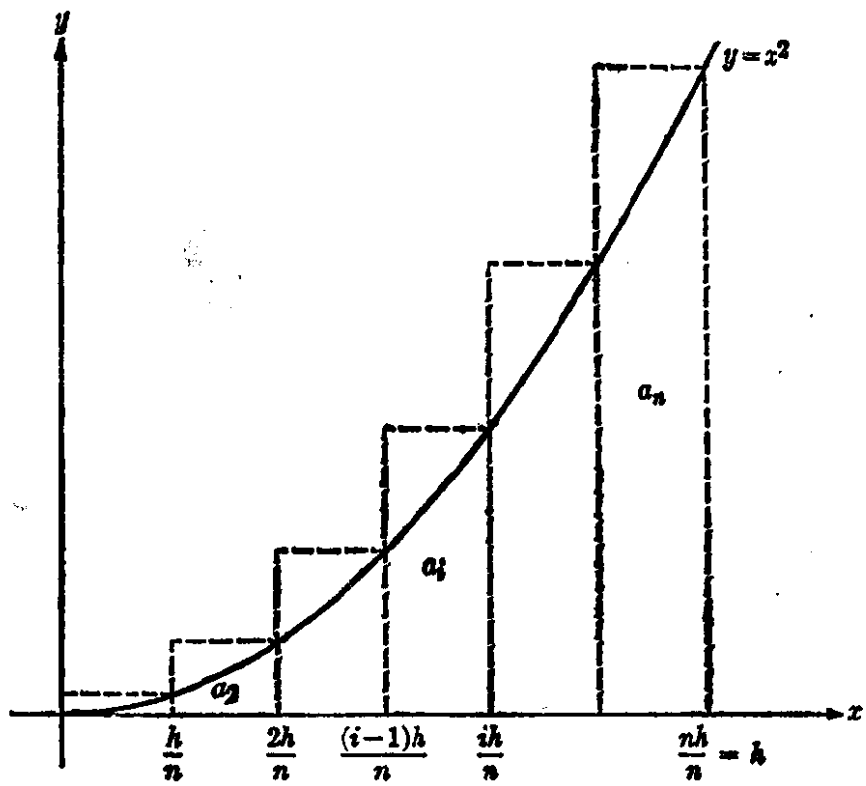
第十五章 多變數之函數

11

無窮級數

11.1 序列之極限

前在2.10節中已有求**序列** (sequence) 極限之問題. 當時欲求 $y=x^2$ 之圖形下由 0 至 h 之區域 R 之面積.



如圖所示, 以多邊形區域 R_n 趨近於 R; 得 R_n 之面積爲

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ih}{n}\right)^2\frac{h}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h^3}{n^3}i^2=\frac{h^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{h^3}{n^3}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)=\frac{h^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right);$$

而欲證得

$$\lim_{n\to\infty} A_n = h^3/3.$$

此即欲證當 n 充分大時，$A_n \approx h^3/3$. 令此近似值之誤差為 E_n，則

$$E_n = A_n - \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{h^3}{3} = h^3 \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\right).$$

上式右端第三個因式恆小於 1，故 $E_n < h^3/n$，因而當 $h^3/n < \frac{1}{1000}$，即當 $n > 1000h^3$ 時，可得 $E_n < \frac{1}{1000}$. 一般言之，對每一 $\epsilon > 0$，欲得

$$E_n = h^3/n < \epsilon,$$

僅須取 $n > h^3/\epsilon$ 即可.

由上之討論，知

$$\lim_{n\to\infty} A_n = L$$

之定義可寫成：

定義：已予一數列（每項均為數之序列特稱為數列）$A_1, A_2, \cdots$ 及一數 L. 若對每一 $\epsilon > 0$. 恆存在一 N，使

$$n > N \Rightarrow L - \epsilon < A_n < L + \epsilon$$

成立，則

$$\lim_{n\to\infty} A_n = L.$$

此與 5.3 節中

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

之定義類似.〔事實上，一序列可視為一定義域為所有正整數之函數：對每一 n，此函數在 n 之值表為 A_n 以替代 $A(n)$.〕

依此定義，和、積與商之定理均能加以證明.在附錄 C 中，此各定

理已寫成使其證明顯易之次序．爲便於查考起見，玆簡述之如下；今後用及時，均不再加以註明．

定理 1. 若 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ 且 $\lim_{n\to\infty} B_n = B$，則

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B, \tag{1}$$

且

$$\lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB. \tag{2}$$

若 $B \neq 0$，且對每一 n，$B_n \neq 0$，則

$$\lim_{n\to\infty} A_n / B_n = A/B. \tag{3}$$

有極限之序列稱爲**收斂** (**convergent**)．注意：上述定理中，須知序列 $A_1, A_2, \cdots$ 與 $B_1, B_2, \cdots$ 均收斂，始能證得其和、積與商亦如是．下面將述及一較強之定理，其收斂性在其結論中而不在假設中．

定義：若對每一 n，$A_n \leqq A_{n+1}$，則序列 $A_1, A_2, \cdots$ 稱爲**遞增** (**increasing**)．若對每一 n，$A_n \geqq A_{n+1}$，則此序列稱爲**遞減** (**decreasing**)．遞增(減)數列亦可簡稱爲增(減)數列．若對每一 n，$A_n < A_{n+1}$，則此序列稱爲**嚴格遞增** (**strictly increasing**)；若對每一 n，$A_{n+1} < A_n$，則此序列稱爲**嚴格遞減** (**strictly decreasing**)．

定義：若存在一數 M，使對每一 n，$A_n \leqq M$，則 M 稱爲數列 $A_1, A_2, \cdots$ 之一**上界** (**upper bound**)，而謂此數列**上方有界** (**bounded above**)．若有一數 K，使對每一 n，$K \leqq A_n$，則 K 稱爲此數列之一**下界** (**lower bound**)，而謂此數列**下方有界** (**bounded below**)．

欲證之定理如下：

定理 2. 若一數列遞增且上方有界，則此數列收斂。

此卽若

$$A_1\leqq A_2\leqq\cdots\leqq A_n\leqq A_{n+1}\leqq\cdots\leqq M,$$

則此數列有一極限．此原理之第一個有趣的應用可能讀者已於幾何中見過．已予一直徑爲 1 之圓，作其內接正 $2n$ 邊形．對每一 n，令 A_n 爲此正 $2n$ 邊形之周長．（最好由 $n=2$ 開始．）由初等幾何知此數列 $A_2, A_3, \cdots$ 遞增，且因每一內接多邊形之周長小於外接正方形之周長，故對每一 n，$A_n<4$．（試作出一圖形．）於是知此數列收斂．當然，其極限爲 π．

今開始證明此定理．令 S 爲一切 A_n 所成之集合，即

$$S=\{A_n\}.$$

於是 S 有一上界．由最小上界公設 (LUBP)，知 S 有一最小上界．（參看上册第 5.6 節．）此數稱爲 S 之**上限** (**supremum**)，而以 $\sup S$ 表之．令

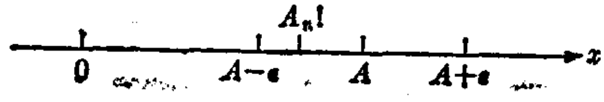
$$A=\sup S.$$

今證

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A.$$

令 ϵ 爲任一正數，則 $A-\epsilon<A$，故 $A-\epsilon$ 不爲 S 之上界，因而有一 N，使 $A_N>A-\epsilon$．但由於此數列遞增，故知

$$n>N\Rightarrow A_n>A-\epsilon.$$



因 A 爲 S 之一上界，且 $A+\epsilon>A$，故 $A+\epsilon$ 爲 S 之一上界，因而對每一 n，

$$A_n<A+\epsilon,$$

故

$$n>N \Rightarrow A-\epsilon<A_n<A+\epsilon,$$

因而 $\lim_{n\to\infty} A_n=A$，卽所欲證者.

對減數列可得一"對稱之定理"：

定理 3. 若一數列遞減，且下方有界，則此數列收斂.

此卽若 $A_1, A_2, \cdots$ 遞減，且對每一 n，$A_n \geqq K$，則此數列收斂.

【證明】 對每一 n，令 $B_n=-A_n$，則 $B_1, B_2, \cdots$ 遞增，且上方有界，故爲收斂.令 $\lim_{n\to\infty} B_n=B$，則 $\lim_{n\to\infty} A_n=-B$.

最後提及附錄 C 中之一些定理，此諸定理將有助於解下之習題.

定理 4 (消失定理 annihilation theorem). 若 $\lim_{n\to\infty} A_n=0$ 而 $B_1, B_2, \cdots$ 有界，則 $\lim_{n\to\infty} A_nB_n=0$.

(若有一數 M，使對每一 n，$|B_n| \leqq M$，則稱數列 $B_1, B_2, \cdots$ 有界.意卽此數列旣爲上方有界又爲下方有界.)

定理 5 (壓縮原理 The squeeze principle). 若 $\lim_{n\to\infty} A_n=L$，$\lim_{n\to\infty} C_n=L$，且對每一 n，$A_n \leqq B_n \leqq C_n$，則 $\lim_{n\to\infty} B_n=L$.

定理 6. 收斂數列恆有界.

此事對增數列顯然爲眞：若 $A_1, A_2, \cdots$ 遞增，且 $\lim_{n\to\infty} A_n=A$，則對每一 n，$A_1 \leqq A_n \leqq A$.同理，對減數列亦眞.一般情形之證明參看附錄 C.此定理有一簡易之應用：若一數列不爲有界則必不收斂.

敍述

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\infty, \quad \lim_{n\to\infty} A_n=-\infty$$

之意義正如所期者，可參照第 5.3 節之形式自行寫出其定義.此類數列不收斂.若 $\lim_{n\to\infty} A_n=\infty$，則謂此數列**發散至無限大** (**diverges to nfinity**).若 $\lim_{n\to\infty} A_n=-\infty$，則謂此數列**發散至負無限大** (**diverges**

to minus infinity)．此處必須注意：若允許極限值爲 ∞ 或 $-\infty$ 者爲收斂，則定理 6 不成立，且定理 1 於多種情形下變爲無意義.（無法作"數" ∞ 與 $-\infty$ 之代數運算.）

習 題 11.1

討論下列之極限，即指出其是否存在，如可能並求出此數。

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ （須由極限之定義入手.）

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}$ （試用本節中最後幾個定理之一.）

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+n^2+\pi}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(2n+1)}{n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

 〔提示：$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}$ 爲已知. 試求出 $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$，並用其結果於本題.〕

6. $\lim\limits_{n\to\infty}B_n$，其中 B_n 爲半徑爲 1 之圓外切正 $2n$ 邊形之周長.（不必證明所作之答案爲眞，但事實上應爲眞.）

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln 1/n$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$（僅討論存在.可用幾何解釋.）

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}$（僅討論存在.）

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$（僅討論存在.）

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{i\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n}$（幾何意義？）

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)} \left(\frac{1}{n}\right)$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} e^{i/n}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} n \tan \frac{1}{n}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n\right]$

（事實上,此極限存在；若能求出其幾何意義,則可加以證明. 此極限稱爲**歐拉常數** (**Euler's constant**).無人知其是否爲有理數.）

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2}$（僅討論存在.）

11.2 無窮級數·收斂性·比較檢驗法

無窮級數爲如下所示之"形式和":

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

此處稱其爲"形式和",蓋因在多種情形下,此無窮多之項並無任何之"和". 例如級數

$$1+1+1+\cdots \text{(至無窮多項)}$$

無和;同樣級數

$$1-1+1-1+1\cdots \text{(至無窮多項)}$$

亦無和.但在多種情形下無窮多項之和可用下述極限之方式以定義之.

已予一級數

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

對每一 n，令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

則稱 A_n 爲此級數之 n **項部分和** (**nth partial sum**)．若

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A,$$

其中 A 爲一(有限)數，則謂此級數**收斂** (**convergent**)，以 A 爲其**和** (**sum**)．或謂此級數收斂至 A．若此數列 $A_1,A_2,\cdots$ 無極限值，則謂此級數**發散** (**divergent**)．若

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\infty,$$

則謂此級數**發散至無限大**；若

$$\lim_{n\to\infty}A_n=-\infty,$$

則謂此級數**發散至負無限大**．此各敍述可簡記爲

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=A,\quad \sum_{i=1}^{\infty}a_i=\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}a_i=-\infty.$$

讀者所曾見之收歛級數最初之例或爲幾何級數

$$1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots\quad(0<r<1),$$

此處

$$A_n=1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r}-\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

若已知

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0\qquad(0<r<1),\tag{1}$$

則

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{1}{1-r}\quad(0<r<1);\tag{2}$$

即

$$\sum_{i=0}^{\infty}r^i=\frac{1}{1-r}\quad(0<r<1).\tag{3}$$

有甚多種方法可以證明 (1) 式．下之證明較爲有趣．因 $0<r<1$，故知對每一 n，

$$r^{n+1}<r^n.$$

由此知數列 $r, r^2, r^3, \cdots$ 遞減，且有一下界，即 0．因而此數列收歛至某一極限值 L．於是

$$\lim_{n\to\infty} r^n=L,\ \lim_{n\to\infty} r^{n+1}=L.$$

(何故？一數列去掉其第一項後，其極限有無變動?)．故

$$L=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=r\lim_{n\to\infty} r^n=rL,$$

而

$$L=rL,\quad \text{即}\quad (1-r)L=0.$$

因 $1-r\neq 0$，故得 $L=0$．於是

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0\qquad (0<r<1).$$

事實上此結果對 $-1<r\leqq 0$ 亦成立．由下述之簡易定理即可得知

定理 1. 若 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$．反之亦然．

證明？(寫出 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ 與 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 之定義，立即可以看出其幾乎完全相同．)

由此得下之定理．

定理 2. 若 $-1<r<1$，則

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0.$$

因對每一 $r\neq 1$，代數公式

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=(1-r^{n+1})/(1-r)$$

恆成立，故對幾何級數有下述更一般化之結果：

定理 3. 若 $-1<r<1$，則

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i=\frac{1}{1-r}.$$

因 $\lim_{n\to\infty}[-r^{n+1}/(1-r)]=0/(1-r)=0$，故上式成立．若其第一項爲 a 而不爲 1，則得

定理 4. 若 $-1<r<1$，則

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i=\frac{a}{1-r}.$$

用下述定理易於看出級數之發散．

定理 5. 若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

【**證明**】 對每一 n，如前令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

設 $\lim_{n\to\infty} A_n=A$，則對 $n>1$，$\lim_{n\to\infty} A_{n-1}=A$．故

$$\lim_{n\to\infty}(A_n-A_{n-1})=A-A=0.$$

但 $A_n-A_{n-1}=a_n$，故 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，即所欲證．

例如當 $a\neq 0$，$|r|\geqq 1$ 時，幾何級數 $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$ 發散．此例中 $|a_n|=|a|\cdot|r|^n\geqq|a|$，故 a_n 不趨近於 0.

注意： 定理 5 之逆不成立，即一級數之第 n 項可趨近於 0，而此級數仍爲發散．最簡單之例爲下列級數：

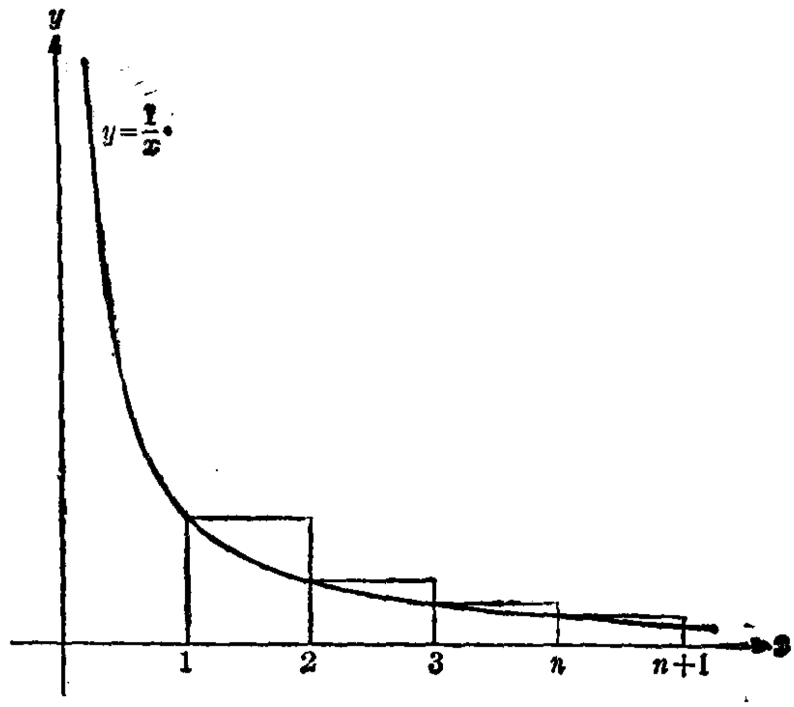
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

其後五項均爲 $\frac{1}{5}$；等等．此處 $a_n\to 0$，但其部分和 A_n 無界．

一個更爲有趣之例乃所謂之“**調和級數**” (**harmonic series**)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

事實上此級數發散．欲證此，最簡單之方法爲作一圖：



對每一 n，此圖形下由 $x=1$ 至 $x=n+1$ 之面積較所有外接矩形之全面積爲小，故

$$A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}.$$

但此一積分爲 $\ln(n+1)$；而

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty,$$

故其部分和 A_n 構成一無界數列，因而此級數必發散至無限大。簡述之爲下列定理。

定理 6. $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i=\infty$.

上述之比較方法亦可適用於級數收斂之證明。例如討論

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}.$$

此處 $a_i=1/i^2$，故 $\lim_{i\to\infty} a_i=0$，但由此並不能推證此級數收斂。然而其代數形式暗示其可能與下列之瑕積分有關：

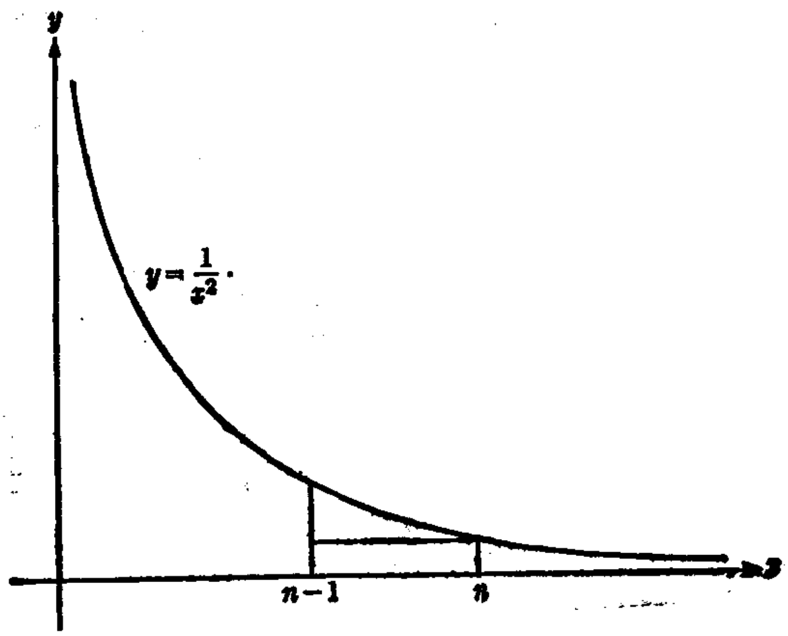
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{a}+1\right)=1.$$

因對每一 x，$\frac{1}{x^2}>0$，故此積分由下趨於其極限，且對每一 n，

$$\int_1^n \frac{dx}{x^2}<1.$$

因函數 $1/x^2$ 遞減，故

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2}>\frac{1}{n^2} \qquad (n>1).$$



(此處矩形之面積爲 $1/n^2$.) 故

$$\frac{1}{2^2}<\int_1^2 \frac{dx}{x^2},\quad \frac{1}{3^2}<\int_2^3 \frac{dx}{x^2},$$

且

$$A_n=\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}<1+\int_1^n \frac{dx}{x^2}<2.$$

顯然，部分和所成之數列 $A_1, A_2, \cdots$ 遞增，且爲上方有界．故得