桥梁结构力学

Qiaoliang Jiegou Lixue

李明昭　万国宏　编著

人　民　交　通　出　版　社

第一章 能量原理

本章的内容将用来作为以后的章节中推导公式和解决问题的手段。虽然有一部分内容在后来的章节中未用到，但如读者要探讨一些公式的不同证明方法，还是有必要加以参考的。

第一节 连续体的虚功原理[●]

本节介绍以三维的连续体为对象证明虚功原理的方法。

（1）变形连续体的虚变形功

变形连续体为Ω，表面为S，受有体力（X，Y，Z）和面力（$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{Z}$）。物体内部的应力为（σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}，τ_{yx}，τ_{zy}，τ_{xz}）。

设变形体产生虚位移（δ_u，δ_v，δ_w）。这里的u是x方向的位移，v是沿y方向的位移，w是沿z方向的位移。δ_u、δ_v、δ_w各为u，v，w的变分。下面采用记号l、m、n各表示变形体表面各点法线的方向余弦，$\iint$是在全表面的积分，$\iiint$是在全体积的积分。

在发生虚位移过程中，外力（只包括表面力和体积力）所作总功A为：

$$A=\iint(\bar{X}\delta_u+\bar{Y}\delta_v+\bar{Z}\delta_w)ds+\iiint(X\delta_u+Y\delta_v+Z\delta_w)d\Omega$$

将上式写成如下形式：

$$\begin{aligned}A=&\iint[(\bar{X}-\sigma_x l-\tau_{xy}m-\tau_{xz}n)\delta_u+(\bar{Y}-\tau_{yx}l-\sigma_y m\\&-\tau_{yz}n)\delta_v+(\bar{Z}-\tau_{zx}l-\tau_{zy}m-\sigma_z n)\delta_w]ds\\&+\iint[(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n)\delta_u+(\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n)\delta_v\\&+(\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n)\delta_w]ds+\iiint(X\delta_u+Y\delta_v+Z\delta_w)d\Omega\end{aligned}\qquad(1\text{-}1)$$

在式(1-1)中，第一项面积分简称为I_1，第二项面积分简称为I'，对于I'应用奥斯特罗格拉特斯基（Остроградский）公式化成体积分。

上面的公式中I'为：

$$\iint[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(n,z)]ds$$

$$=\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\Omega$$

● 本节采用了王光远对虚功原理的证明法。

上式中的 $\cos(n, x)$、$\cos(n, y)$、$\cos(n, z)$各为 l、m 和 n。

在 I'之内

$$P=\sigma_x\delta_u+\tau_{yx}\delta_v+\tau_{zx}\delta_w$$
$$Q=\tau_{xy}\delta_u+\sigma_y\delta_v+\tau_{zy}\delta_w$$
$$R=\tau_{xz}\delta_u+\tau_{yz}\delta_v+\sigma_z\delta_w$$

用奥氏公式得:

$$\begin{aligned}I'=\iiint\Big(&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta_u+\sigma_x\frac{\partial\delta_u}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}\delta_v\\&+\tau_{yx}\frac{\partial\delta_v}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}\delta_w+\tau_{zx}\frac{\partial\delta_w}{\partial x}\\&+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\delta_u+\tau_{xy}\frac{\partial\delta_u}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\delta_v\\&+\sigma_y\frac{\partial\delta_v}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\delta_w+\tau_{zy}\frac{\partial\delta_w}{\partial y}\\&+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\delta_u+\tau_{xz}\frac{\partial\delta_u}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\delta_v\\&+\tau_{yz}\frac{\partial\delta_v}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\delta_w+\sigma_z\frac{\partial\delta_w}{\partial z}\Big)d\Omega\end{aligned}$$

考虑到 $\quad\delta\varepsilon_x=\dfrac{\partial(\delta u)}{\partial x},\ \delta\varepsilon_y=\dfrac{\partial(\delta v)}{\partial y},\ \delta\varepsilon_z=\dfrac{\partial(\delta w)}{\partial z}$

$$\delta\gamma_{xy}=\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}+\frac{\partial(\delta v)}{\partial x},\ \text{得}\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial y}=\delta\gamma_{xy}-\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}$$
$$\delta\gamma_{yz}=\frac{\partial(\delta v)}{\partial z}+\frac{\partial(\delta w)}{\partial y},\ \text{得}\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial z}=\delta\gamma_{yz}-\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}$$
$$\delta\gamma_{zx}=\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}+\frac{\partial(\delta u)}{\partial z},\ \text{得}\ \frac{\partial(\delta w)}{\partial x}=\delta\gamma_{zx}-\frac{\partial(\delta u)}{\partial z}$$

将上述这些关系式代入 I'，再将 I'代入下式:

$$A=I_1+I'+\iiint(X\delta_u+Y\delta_v+Z\delta_w)d\Omega$$

整理后得 $\quad A=I_1+I_2+I_3+I_4$

式中: $$\begin{aligned}I_1=\iint[&(\bar X-\sigma_x l-\tau_{xy}m-\tau_{zx}n)\delta_u\\&+(\bar Y-\tau_{yx}l-\sigma_y m-\tau_{yz}n)\delta_v\\&+(\bar Z-\tau_{zx}l-\tau_{zy}m-\sigma_z n)\delta_w]ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2=\iiint\Big[&\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X\Big)\delta_u+\Big(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y\Big)\delta_v\\&+\Big(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z\Big)\delta_w\Big]d\Omega\end{aligned}$$

$$I_3=\iiint\left[(\tau_{yx}-\tau_{xy})\frac{\partial(\delta_v)}{\partial x}+(\tau_{zy}-\tau_{yz})\frac{\partial(\delta_w)}{\partial y}\right.$$

$$\left.+(\tau_{xz}-\tau_{zx})\frac{\partial(\delta_u)}{\partial z}\right]\cdot d\Omega$$

$$I_4=\iiint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}$$

$$+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx})d\Omega$$

如果是刚体，就没有变形，则 $I_4=0$，此时 $A=I_1+I_2+I_3$。这时 $I_1+I_2+I_3$等于刚体位移的虚功，以 A_g 表示。

如是变形体，I_4是与变形有关的外功，以 A_b 表示，得到外力总功 $=A=A_g+A_b$。A_b称为虚变形能。

（2）变形体虚功原理的表达方式及其证明

变形连续体的虚功原理叙述如下：

变形连续体平衡的必要和充分条件是：对任意微小的虚位移，外力所做的总功等于变形体所接受的总的虚变形能 I_4。以式子表达，即为 $A=A_b=I_4$。

或写出全式：

$$A=\iiint_\Omega(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx})d\Omega$$

证明：

当物体平衡时，I_1积分号内的三个小括弧内的式子都等于零，它们是边界的平衡条件；I_2积分号内的三个小括弧内的式子都等于零，它们是变形体内的三个平衡条件；I_3积分号内的三个小括弧内的式子都等于零，它们反映剪应力互等定理。于是由 $I_1+I_2+I_3=0$ 得 $A=A_b=I_4$。这就证明了原理的必要性。

又，如果 $A=A_b=I_4$是成立的，则必定 $I_1+I_2+I_3=0$，但由于 δ_u，δ_v，δ_w 是任意的，可知 I_1，I_2，I_3 的积分号内的小括弧内的式子都恒等于零，这就是说满足平衡条件。这是原理的充分性。

虚功原理是和平衡条件是等价的，因而可以适用于各种不同的物体，与材料的性质无关。多年来力学书上将虚变能 A_b 反其号定义为虚内功。

设图1-1的杆轴与 x 轴重合。在受弯杆件中只考虑 σ_x 和 τ_{xy} 这两种应力。虚应变为

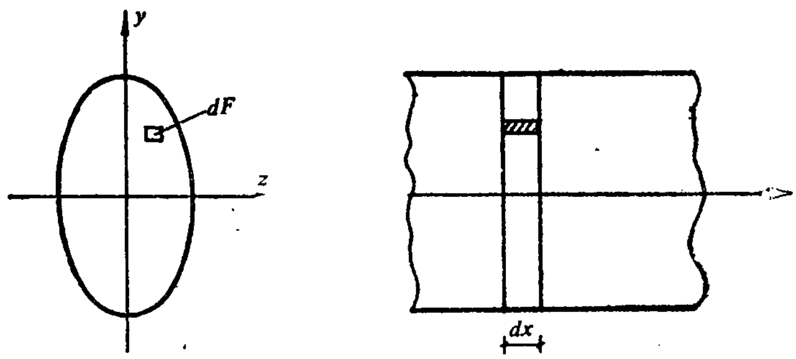
$$\delta\varepsilon_x=\varepsilon_n-Ky,\quad \delta\gamma_{xy}=\gamma$$

上式的 ε_n 是杆轴处的线应变，K 为曲率的改变量，γ 为剪应变。则：

$$A=\sum\int_l\int_F[\sigma_x(\varepsilon_n-Ky)+\tau_{xy}\gamma]dFdx$$

考虑到 $\int_F\sigma_x dF=N,\quad \int_F\sigma_x y dF=-M,\quad \int_F\tau_{xy}\gamma dF=\alpha Q\bar{\gamma}$

式中 N、M、Q 各为轴力、弯矩和剪力，$\bar{\gamma}$ 为横断面上的平均剪应变，α 为剪应力修正系数。



a）杆件断面　　　　b）杆件微元长度

图 1-1

得
$$A=\int_{l}(N\varepsilon_{n}+MK+\alpha Q\bar{\gamma})dx \tag{1-2}$$

也可写为：

$$\text{虚内功}=-\int_{l}(N\varepsilon_{n}+MK-\alpha Q\bar{\gamma})dx \tag{1-2-1}$$

$$\text{虚内功}+\text{虚外功}=0 \tag{1-2-2}$$

例1-1　用虚功原理推导位移法方程

解　有一个具有 n 个未知量的挠曲杆件系统的位移法问题，其未知量以Δ_1、Δ_2、…、Δ_n表示。在基本结构上单纯由于荷载产生的弯矩图以 M_p 表示，单纯由于各 Δ_i 产生的弯矩图以 $\Delta_i M_i$ 表示，这里M_i表示单纯由$\Delta_i=1$在基本结构上产生的弯矩图。

最终弯矩图
$$M=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta_i+M_p$$

令结构的实际力在单纯由于 Δ_i 在结构上产生的位移上做虚功，如只计弯曲变形对位移的影响，则对杆长 l 定积分，有：

虚内功
$$W_{内}=-\Delta_i\int\frac{M_i M dx}{EI}$$

$$=-\Delta_i\sum_{j=1}^{n}\int\frac{M_i M_j\Delta_j dx}{EI}-\Delta_i\int\frac{M_i M_p dx}{EI}$$

式中：dx——微分杆长；

E——弹性模量；

I——抗弯惯矩。

虚外功 $W_{外}=\sum\limits_{a=1}^{m}P_a\Delta_{p_a i}$　　其中，单纯由于Δ_i在基本结构上的第 a 号荷重作用线上引起的位移为 $\Delta_{p_a i}$。实际结构上共有 m 个荷载。

按虚功原理 $W_{内}+W_{外}=0$，并在等号的两边同时除以 Δ_i，得到：

$$-\sum_{j=1}^{n}\int\frac{M_iM_jdx}{EI}\cdot\Delta_j-\int\frac{M_iM_pdx}{EI}+\frac{\sum\limits_{a=1}^{m}P_a\Delta_{p_ai}}{\Delta_i}=0 \tag{1-3}$$

下面证明：$\int\frac{M_iM_pdx}{EI}=0$

在位移法的基本结构上只有外荷载作用时称为 P 情况，只发生 Δ_i 时称为 i 情况。i 情况的外力在 P 情况的位移上做的外虚功以 W_{ip} 表示。i 情况的外力是单纯由于 Δ_i 位移在基本结构的附加约束上引起的反力，而在 P 情况下附加约束无位移，因此 $W_{ip}=0$，据虚功原理 $\int\frac{(\Delta_iM_i)M_pdx}{EI}=W_{ip}=0$，因为$\Delta_i\neq0$，故得$\int\frac{M_iM_pds}{EI}=0$。

下面考虑 $\frac{\sum\limits_{a=1}^{m}P_a\Delta_{p_ai}}{\Delta_i}$这一项的求法。

以 W_{pi} 表示 P 情况的外力（包括荷载和附加约束中的反力）在 i 情况的位移上做的外虚功，则：

$$W_{pi}=\sum_{a=1}^{m}P_a\Delta_{p_ai}+R_{ip}\cdot\Delta_i$$

上式中的 R_{ip} 表示荷载在基本结构上的第 i 号附加约束中产生的约束反力。

前面已述 $W_{ip}=0$，按虚功互等定理 $W_{pi}=W_{ip}$，因此 $W_{pi}=0$，得 $\left(\sum\limits_{a=1}^{m}P_a\Delta_{p_ai}\right)\div\Delta_i=-R_{ip}$，将这个式子代入本例的式(1-3)，得到：

$$\sum_{j=1}^{n}\int\frac{M_iM_jdx}{EI}\cdot\Delta_j+R_{ip}=0 \tag{1-4}$$

下面考虑 $\int\frac{M_iM_j\Delta_jdx}{EI}$的物理意义。

我们将基本结构上单纯发生 Δ_i 和单纯发生 Δ_j 的情况各称为 i 情况和 j 情况。

外虚功 $W_{ij}=W_{ji}=\int\frac{M_iM_jdx\Delta_j\Delta_i}{EI}$

$$W_{ij}=(r_{ij}\cdot\Delta_j)\Delta_i,\quad W_{ji}=(r_{ij}\Delta_i)\cdot\Delta_j$$

从以上的式子可见 $\int\frac{M_iM_jdx}{EI}=r_{ij}=r_{ji}$

这里的 r_{ij} 和 r_{ji} 都是约束反力系数。其物理意义如下：

Δ_i 在 j号附加约束中产生的约束反力为 $r_{ji}\Delta_i$；

Δ_j 在 i号附加约束中产生的约束反力为 $r_{ij}\Delta_j$。

经如上的解释，本例的式(1-4)即写成

$$\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\Delta_j+R_{ip}=0 \tag{1-5}$$

式(1-5)是位移法方程的标准形式，依次令 $i=1, 2, 3, \cdots, n$，即得 n 个方程。

例1-2 用虚功原理求杆件的刚度矩阵。

解 位移法的基本结构是由一系列的两端固定的杆件所组成。作为解题的准备，须先推导杆端反力和杆端位移的关系式。杆端位移为 v_i、θ_i、v_j、θ_j，杆端反力为 V_i、M_i、V_j 和 M_j，其正方向如图1-2所示。

用端点位移来表示端点反力，写出四个式子，用矩阵表示如下：

$$\underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}} = \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}} \tag{1-6}$$

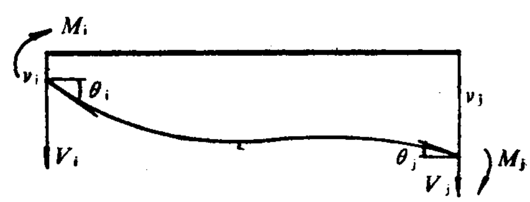


图 1-2

本例式(1-6)所示的等号右边的4×4的方阵称为杆件（端点的）刚度矩阵，其元素称为刚度系数。

杆件的挠度以 v 来表示：

$$v(x)=v_iN_1(x)+\theta_iN_2(x)+v_jN_3(x)+\theta_jN_4(x)\cdots$$

我们知道跨内无荷载的杆件单纯由于杆端位移产生挠曲，其挠曲方程为

$$v''''(x)=0$$

经四次积分后出现四个积分常数 C_1、C_2、C_3、C_4，利用 $v(0)=v_i$，$v'(0)=\theta_i$，$v(l)=v_j$ 和 $v'(l)=\theta_j$ 这四个边界条件求出以 v_i、θ_i、v_j 和 θ_j 表示的 C_1、C_2、C_3 和 C_4，即得：

$$v(x)=v_iN_1(x)+\theta_iN_2(x)+v_jN_3(x)+\theta_jN_4(x)。$$

其中 $N_1(x)$、$N_2(x)$、$N_3(x)$和 $N_4(x)$的具体函数式不在这里给出，由读者自己推导。

令处于 $v(x)$所示的挠曲平衡状态的杆件发生虚位移如下：

$$v^*(x)=v_i^*N_1(x)+\theta_i^*N_2(x)+v_j^*N_3(x)+\theta_j^*N_4(x)。$$

这里的 v_i^*、θ_i^*、v_j^* 和 θ_j^* 都是任意的微小量，只计挠曲变形的虚内功，杆件为等截面。

$$内力虚功W_{内}=-\int_0^l \underset{（实弯矩）}{EIv''(x)}\underset{（虚曲率）}{v^{*''}(x)}dx$$

$$\begin{aligned}
&=-EI\int_0^l [v_iN_1''(x)+\theta_iN_2''(x)+v_jN_3''(x)+\theta_jN_4''(x)] \\
&\quad\times[v_i^*N_1''(x)+\theta_i^*N_2''(x)+v_j^*N_3''(x)+\theta_j^*N_4''(x)]dx \\
&=-EI\int_0^l [v_iv_i^*N_1''N_1''+v_i\theta_i^*N_1''N_2''+v_iv_j^*N_1''N_3'' \\
&\quad+v_i\theta_j^*N_1''N_4''+\theta_iv_i^*N_2''N_1''+\theta_i\theta_i^*N_2''N_2''+\theta_iv_j^*N_2''N_3'' \\
&\quad+\theta_i\theta_j^*N_2''N_4''+v_jv_i^*N_3''N_1''+v_j\theta_i^*N_3''N_2''+v_jv_j^*N_3''N_3'' \\
&\quad+v_j\theta_j^*N_3''N_4''+\theta_jv_i^*N_4''N_1''+\theta_j\theta_i^*N_4''N_2''+\theta_jv_j^*N_4''N_3'' \\
&\quad+\theta_j\theta_j^*N_4''N_4'']dx
\end{aligned} \tag{1-7}$$

外力虚功 $$W_{外}=V_iv_i^*+M_i\theta_i^*+V_jv_j^*+M_j\theta_j^* \tag{1-8}$$

将式(1-7)和式(1-8)代入 $W_{内}+W_{外}=0$，即得到具体的虚功方程。

v_i^*、θ_i^*、v_j^*、θ_j^* 带有任意性，每一个都可以不为零，亦可以为零 。

令 $v_i^* \neq 0$，$\theta_i^* = v_j^* = \theta_j^* = 0$，从 $W_内 + W_外 = 0$ 的两边各项约掉公因子 v_i^*，得到

$$V_i = \int_0^l N_1''N_1''dx \cdot v_i + \int_0^l N_2''N_1''dx \cdot \theta_i + \int_0^l N_3''N_1''dx \cdot v_i$$
$$+ \int_0^l N_4''N_1''dx \cdot \theta_j \tag{1-9}$$

令 $\theta_i^* \neq 0$，$v_i^* = v_j^* = \theta_j^* = 0$，得到

$$M_i = \int_0^l N_1''N_2''dx \cdot v_i + \int_0^l N_2''N_2''dx \cdot \theta_i + \int_0^l N_3''N_2''dx \cdot v_i$$
$$+ \int_0^l N_4''N_2''dx \cdot \theta_j \tag{1-10}$$

令 $v_j^* \neq 0$，$v_i^* = \theta_i^* = \theta_j^* = 0$，得到

$$V_j = \int_0^l N_1''N_3''dx \cdot v_i + \int_0^l N_2''N_3''dx \cdot \theta_i + \int_0^l N_3''N_3''dx \cdot v_j$$
$$+ \int_0^l N_4''N_3''dx \cdot \theta_j \tag{1-11}$$

令 $\theta_j^* \neq 0$，$v_i^* = \theta_i^* = v_j^* = 0$，得到

$$M_j = \int_0^l N_1''N_4''dx \cdot v_i + \int_0^l N_2''N_4''dx \cdot \theta_i + \int_0^l N_3''N_4''dx \cdot v_j$$
$$+ \int_0^l N_4''N_4''dx \cdot \theta_j \tag{1-12}$$

式(1-9)、(1-10)、(1-11)、(1-12)写为

$$\underset{4\times1}{\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}} = EI\int_0^l \underset{4\times4}{\begin{pmatrix} N_1''N_1'' & N_2''N_1'' & N_3''N_1'' & N_4''N_1'' \\ N_1''N_2'' & N_2''N_2'' & N_3''N_2'' & N_4''N_2'' \\ N_1''N_3'' & N_2''N_3'' & N_3''N_3'' & N_4''N_3'' \\ N_1''N_4'' & N_2''N_4'' & N_3''N_4'' & N_4''N_4'' \end{pmatrix}} dx \underset{4\times1}{\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}} \tag{1-13}$$

式(1-13)的等号右边的 4 × 4 的方阵称为杆的刚度矩阵。与式（1-6）对照，$k_{12} = EI\int_0^l N_1''N_2''dx$，$k_{13} = EI\int_0^l N_1''N_3''dx$，…，其余类推，这些都是刚度系数，组成杆的刚度矩阵的元素。

例1-3 用虚功原理求荷载在固端杆件引起的支反力。

解 位移法的基本结构是由一系列的两端固定的杆件所组成，作为解题的准备，须先推导荷载在杆的两个固定端引起的支反力。支反力的名称及其正方向如图1-3。

令图1-3所示的外力在图1-2的 $v^*(x) = v_i^* N_1(x) + \theta_i^* N_2(x) + v_j^* N_3(x) + \theta_j^* N_4(x)$ 虚位移

上做虚外功，用 W_{qv} 表示，再令图1-2所示的外力在图1-3所示的位移上做虚外功，用 W_{vq} 表示，据虚功互等定理 $W_{vq}=W_{qv}$。

由于在图1-3所示的情况中，杆件的端点无位移，因此 $W_{vq}=0$，从而 $W_{qv}=0$。

因此，得 $W_{qv}=V_{ip}v_i^*+M_{ip}\theta_i^*+V_{jp}v_j^*+M_{jp}\theta_j^*$

$$+\int_0^l q(x)[v_i^*N_1(x)+\theta_i^*N_2(x)+v_j^*N_3(x)+\theta_j^*N_4(x)]dx=0$$

令 $v_i^*\neq 0$，$\theta_i^*=v_j^*=\theta_j^*=0$，得

$$V_{ip}=-\int_0^l q(x)N_1(x)dx \tag{1-14}$$

令 $\theta_i^*\neq 0$，$v_i^*=v_j^*=\theta_j^*=0$，得

$$M_{ip}=-\int_0^l q(x)N_2(x)dx \tag{1-15}$$

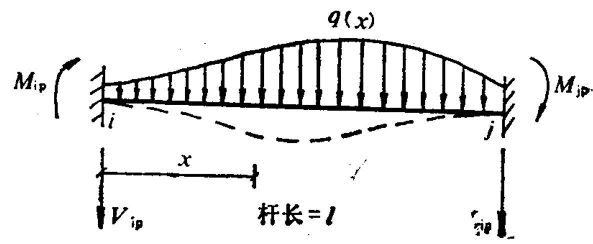


图 1-3

令 $v_j^*\neq 0$，$v_i^*=\theta_i^*=\theta_j^*=0$，得

$$V_{jp}=-\int_0^l q(x)N_3(x)dx \tag{1-16}$$

令 $\theta_j^*\neq 0$，$v_i^*=\theta_i^*=v_j^*=0$，得

$$M_{jp}=-\int_0^l q(x)N_4(x)dx \tag{1-17}$$

将式(1-14)、(1-15)、(1-16)、(1-17)写为：

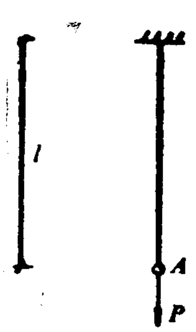


图 1-4

$$\begin{Bmatrix} V_{ip} \\ M_{ip} \\ V_{jp} \\ M_{jp} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\int_0^l qN_1dx \\ -\int_0^l qN_2dx \\ -\int_0^l qN_3dx \\ -\int_0^l qN_4dx \end{Bmatrix} \tag{1-18}$$

式(1-18)是挠曲杆的荷载反力列阵。

例1-4 杆件受轴力如图1-4所示。已知 $N=C\cdot\varepsilon^2$，N 为轴力，C 为常数，ε 为轴向应变。试计算 A 点的竖向位移Δ。

解 用虚功原理推导出的求位移的单位荷载法在本例这样的非线性问题仍是适用的。

$$1\cdot\Delta=\int_0^l\left(\int_0^\varepsilon \bar{N}\cdot d\varepsilon\right)ds \tag{1-19}$$

这里 $\bar{N}=1$，$\varepsilon=N^{\frac{1}{2}}/C^{\frac{1}{2}}$。

考虑到 $N=P$ 得 $\Delta=\dfrac{P^{\frac{3}{2}}}{C^{\frac{3}{2}}}l$

第二节 卡氏定理（Castigliano）

一、卡氏第二定理[1]

设结构上有一系列的广义力 P_1，P_2，…，P_n 作用，与它们相应的广义位移各为 δ_1，δ_2，…，δ_n。广义力可能是荷载，如图1-5所示，也可能是发生位移的支杆的反力，如图1-6所示。

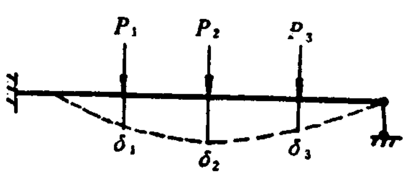


图 1-5

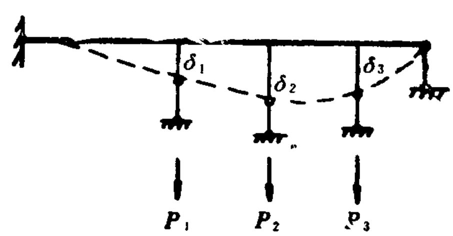


图 1-6

结构的应变能等于广义力做的外功，应变能 u 可表达为广义位移(δ_1，δ_2，…，δ_n)的函数。设想当一个广义位移 δ_i 增加微量$\Delta\delta_i$，而其他的广义位移都保持不变，这时与 δ_i 相应的广义力P_i 必也有增量ΔP_i。在发生$\Delta\delta_i$的过程中外力功的增量为 $\Delta T_{外}=(P_i+\Delta P_i)\cdot\Delta\delta_i=P_i\Delta\delta_i+\Delta P_i\cdot\Delta\delta_i$，略去高阶微量，得 $\Delta T_{外}=P_i\Delta\delta_i$。

这时应变能的增量为 $\Delta u=\dfrac{\partial u}{\partial\delta_i}\Delta\delta_i$。

由于$\Delta T=\Delta u$，得到

$$P_i=\frac{\partial u}{\partial\delta_i}\tag{1-20}$$

上式是卡氏第二定理的数学表示式。

在推导上式时未以叠加原理为先决条件，式(1-20)表示：线性和非线性结构只要将应变能表达为广义位移的函数，应变能对于任一广义位移 δ_i 的偏导数即等于与 δ_i相应的广义力P_i。

例题1-5 求 BD 杆的轴力 s（图1-7）。

解 令 δ 表示 D 点的位移（竖向的），BD 杆的伸长即为 δ，则 AD 杆的伸长为$\delta\cos\alpha$，DC 杆的伸长为 $\delta\cos\alpha$。

中间轴力杆的应变能 $=\dfrac{1}{2}N\delta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AE(\delta)^2}{l}$，三根杆的总应变能

$$u=\frac{1}{2}\cdot\frac{AE\delta^2}{l}+2\times\frac{1}{2}\times AE\times\frac{\delta^2\cos^2\alpha}{(l+\cos\alpha)}$$

即
$$u=\frac{AE\delta^2}{2l}(1+2\cos^3\alpha)。$$

---

[1] 卡氏的两个定理能被相互独立地证明出来，第二定理应用面广且较易证明，故先第二定理。

据公式 $P_i = \frac{\partial u}{\partial \delta_i}$ 得：

$$P = \frac{\partial u}{\partial \delta} = \frac{AE\delta}{l}(1 + 2\cos^3\alpha)$$

求出 $\delta = \frac{Pl}{AE(1 + 2\cos^3\alpha)}$

以 s 表示 BD 杆的轴力，则：

$$s = \frac{AE\delta}{l} = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

本题是线性结构的计算。

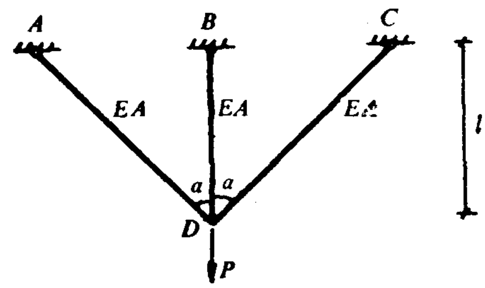


图 1-7

例题1-6

图1-8的 BC 和 CD 原在一直线上，在 C 点加载后 C 点下垂，求 δ。

解 令 Δl 表示受载后 BC 杆和 DC 杆的伸长。

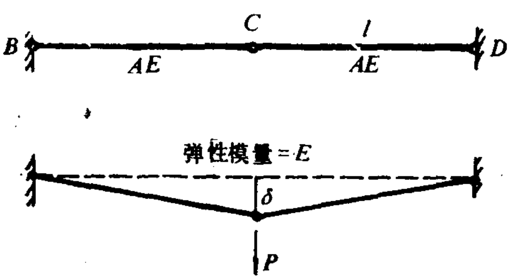


图 1-8

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + \delta^2} - l$$

$$= \sqrt{l^2\left(1 + \frac{\delta^2}{l^2}\right)} - l$$

$$= l\left[1 + \left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - l$$

因为 $\frac{\delta}{l}$ 远远小于 1，用二项式定理展开 $\left[1 + \left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 时，只需保留两项：

$1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1^{\frac{1}{2} - 1} \cdot \frac{\delta^2}{l^2}$，得：

$$\Delta l = l + \frac{\delta^2}{2l} - l = \frac{\delta^2}{2l}$$

两杆的总应变能 $u = 2\left[\frac{AE}{2l}(\Delta l)^2\right] = \frac{AE\delta^4}{4l^3}$

据公式 $P_i = \frac{\partial u}{\partial \delta_i}$ 得：$P = \frac{\partial u}{\partial \delta} = \frac{AE\delta^3}{l^3}$，求出 $\delta = l\left(\frac{P}{AE}\right)^{\frac{1}{3}}$。

虽然应力和应变是成比例的，但此题还是一个非线性问题，位移和荷载不成比例。这是由于变形（Δl）和位移 δ 不成比例，此结构在受力过程中虎克定律虽然成立，但荷载和位移不成比例。这是几何非线性之例。

卡氏第二定理能提供将应变能用于非线性结构和线性结构的分析方法，结构力学中的位移法方程也能用卡氏第二定理求出来。位移法是以节点位移 D_1、D_2、…、D_n 为基本未知数的，节点上的相应的广义外力各表示为 P_1，P_2，…，P_n。从卡氏第二定理可得 n 个联立方程

$$P_1 = \frac{\partial u}{\partial D_1}, \quad P_2 = \frac{\partial u}{\partial D_2}, \quad \cdots, \quad P_n = \frac{\partial u}{\partial D_n} \tag{1-21}$$

上述方程就是位移法方程，其物理意义是节点的平衡条件。而变形连续条件在求应变能的数学式时加以考虑。

二、卡氏第一定理

线性结构在一组荷载 P_1，P_2，…，P_i，…，P_n 作用下积蓄了应变能 u。

$$u=\frac{1}{2}\int\frac{M^2ds}{EI}+\frac{1}{2}\int\frac{N^2ds}{EA}+\frac{1}{2}\alpha\int\frac{Q^2ds}{GA} \tag{1-22}$$

上式中的弯矩 M，轴力 N 及剪力 Q 都是荷载的线性函数，因此应变能是荷载的二次函数，α 是剪应力的修正系数。

u 对其中某一荷载 P_i 取偏导数，则得

$$\frac{\partial u}{\partial P_i}=\Sigma\int\frac{M\frac{\partial M}{\partial P_i}ds}{EI}+\Sigma\int\frac{N\frac{\partial N}{\partial P_i}ds}{EA}+\Sigma\alpha\int\frac{Q\frac{\partial Q}{\partial P_i}ds}{GA}$$

上式中的 M 是由各荷载单独作用引起的弯矩图叠加而成，可写为 $M=M_{p_1}+M_{p_2}+\cdots+M_{p_i}+\cdots+M_{p_n}$。

$\frac{\partial M}{\partial P_i}=\frac{dM_{p_i}}{dP_i}$——单独由于 $P_i=1$ 产生的弯矩图，可写为 $\overline{M}_i$。同理 $\frac{\partial N}{\partial P_i}$ 可写成 $\overline{N}_i$，

$\frac{\partial Q}{\partial P_i}$ 可写成 $\overline{Q}_i$，代入上式，得 $\frac{\partial u}{\partial P_i}=\int\frac{M\overline{M}_i ds}{EI}+\int\frac{N\overline{N}_i ds}{EA}+\alpha\int\frac{Q\overline{Q}_i ds}{GA}=\Delta_i$， 可见

$\frac{\partial u}{\partial P_i}$ 就是沿 P_i 方向上的位移 Δ_i。因而得：

$$\Delta_i=\frac{\alpha u}{\partial P_i} \tag{1-23}$$

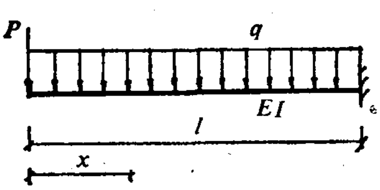


图 1-9

这就是卡氏第一定理。

例1-7

求 P 方向的位移，不计剪切变形。

解 $$u=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M^2dx}{EI}$$

公式 $\Delta_i=\frac{\partial u}{\partial P_i}=\int\frac{M\frac{\partial M}{\partial P_i}dx}{EI}$，这里 $P_i=P$，为了将 u 表示为外荷载的函数，先建立弯矩函数 $$M(x)=-Px-q\frac{x^2}{2},\quad \frac{\partial M}{\partial P_i}=-x$$

代入 $$\Delta_i=\int_0^l\frac{M\frac{\partial M}{\partial P_i}dx}{EI}$$

求出 $$\Delta_i=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{ql^4}{8EI}$$

如果在待求位移的方向上并无集中荷载作用，也能用本定理求该方向上发生的位移。方法是设想在该方向上存在一个集中荷载 P，应用本定理求出该力方向上的位移，然后再在所

得 Δ 的算式中令 $P=0$。在本例中令 $P=0$ 得 $\Delta_1=ql^4/8EI$。它就是单纯由于均布荷载 q 在 A 端产生的竖向位移。

卡氏第二定理是利用了应变能 $u=\frac{1}{2}\int\frac{M^2ds}{EI}+\cdots$，这个公式推导出来的，而 $\frac{1}{2}\int\frac{M^2ds}{EI}$ 等只在线性结构问题上才能成立。因此卡氏第二定理只能用于线性结构。

第三节　势能最小原理

结构的位能（势能）用记号 $P\cdot E$ 来表示，用下式来给以**定义**：

$$P\cdot E=u(\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_n)+\left(-\sum_{i=1}^{n}F_i\Delta_i\right) \tag{1-24}$$

上式的等号右边的第一部分是用未知位移来表示的应变能，第二部分是荷载的位能。各 Δ_i 是沿各荷载 F_i（或支反力）方向发生的位移的最终值，如图1-10所示。这里荷载的势能**定义**为荷载的最终值在作用点回复到初始位置的过程中做的功。势能是一个按定义作成的以未知位移（在荷载或支反力方向上的位移）为自变量的函数，这个函数具有很重要的性质，有助于我们计算线性和非线性结构的位移和反力，有助于建立平衡方程，且有助于推导其他的定理。

如势能 $P\cdot E$ 对任一个位移 Δ_i 取偏导数，即得

$$\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_i}=\frac{\partial u}{\partial\Delta_i}-F_i$$

据卡氏第二定理，$\frac{\partial u}{\partial\Delta_i}=F_i$，因此

$$\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_i}=0 \tag{1-25}$$

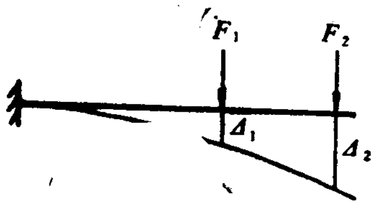


图 1-10

这个式子适用于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的情况，共得 n 个方程。

要注意：在以各 Δ_i 表示应变能时，根据变形**连续条件**先建立各位移 Δ_i 和变形的关系，从而建立变形和应变能的关系，这样得到以各 Δ_i 为自变量表示的 $P\cdot E$ 函数式。所导出的 $\partial P\cdot E/\partial\Delta_i=0$ 方程组，意味着这组位移自行调整使势能为一驻值以符合平衡条件。当结构处于稳定平衡时其势能为一极小值。在此情况下 $\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_i}=0$，这组方程是势能最小原理的数学表示式。

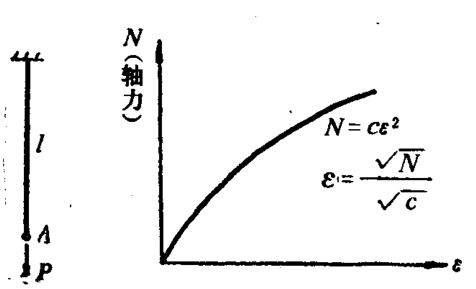


图 1-11

例1-8　求 A 点位移 Δ。

解　$P\cdot E=u-P\Delta$

应变能　$u=\int_0^{\varepsilon}N(ld\varepsilon)=lc\int_0^{\varepsilon}\varepsilon^2d\varepsilon=\frac{cl\varepsilon^3}{3}$

因　$\varepsilon=\frac{\Delta}{l}$，得 $u=\frac{cl}{3}\cdot\frac{\Delta^3}{l^3}$，因此，　$P\cdot E=-P\Delta+\frac{cl}{3}\cdot\frac{\Delta^3}{l^3}$，

由 $\dfrac{d(P\cdot E)}{d\Delta}=-P+cl\cdot\dfrac{\Delta^2}{l^3}=0$，求出 $\Delta=\left(\dfrac{P}{c}\right)^{\frac{1}{2}}l$。

本例的计算结果与第1节的例4相同。

例1-9 杆长都为l，各杆的轴力N与轴向应变ε有如下的非线性关系：$\varepsilon=\dfrac{N^3}{D^3}$，$N=\varepsilon^{\frac{1}{3}}D$，$D$为已知常数。

求A点的水平和竖向位移Δ_1和Δ_2。

解

$$P\cdot E=\int_0^l\left(\int_0^{\varepsilon_{AB}}Nd\varepsilon\right)ds+\int_0^l\left(\int_0^{\varepsilon_{AC}}Nd\varepsilon\right)ds-P_1\Delta_1-P_2\Delta_2$$

这里ε为轴向应变，ε_{AB}和ε_{AC}各为AB杆和AC杆轴向应变的最终值。

$$\int_0^l\left(\int_0^{\varepsilon_{AB}}Nd\varepsilon\right)ds=l\cdot\int_0^{\varepsilon_{AB}}D\varepsilon^{\frac{1}{3}}\ d\varepsilon=\frac{3D}{4}l(\varepsilon_{AB})^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_0^l\left(\int_0^{\varepsilon_{AC}}Nd\varepsilon\right)ds=\frac{3D}{4}l(\varepsilon_{AC})^{\frac{4}{3}}$$

为了以Δ_1和Δ_2为自变量来表示应变能，须先用变形连续条件来建立Δ_1、Δ_2和ε_{AB}、ε_{AC}的关系。

与Δ_1相应的

$$\Delta l_{AB}=+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_1,\quad \Delta l_{AC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_1。$$

与Δ_2相应的

$$\Delta l_{AB}=+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_2,\quad \Delta l_{AC}=+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_2。$$

总　计

$$\Delta l_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_1+\Delta_2),\quad \varepsilon_{AB}=\frac{\Delta l_{AB}}{l}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_1+\Delta_2)\ \frac{1}{\sqrt{l}};$$

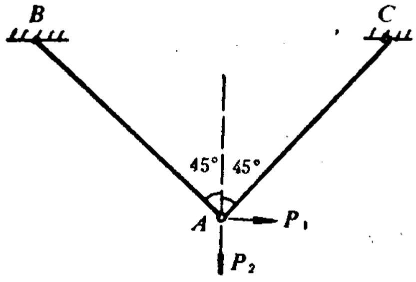


图　1-12

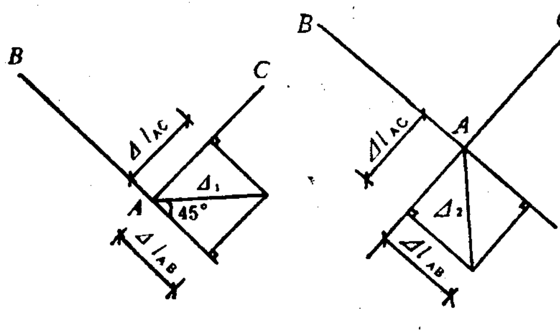


图　1-13

$$\Delta l_{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_2-\Delta_1),\quad \varepsilon_{AC}=\frac{\Delta l_{AC}}{l}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_2-\Delta_1)\frac{1}{l}。$$

代入势能公式，得 $P\cdot E=\frac{3D}{4}l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{l^{\frac{4}{3}}}[(\Delta_2+\Delta_1)^{\frac{4}{3}}$

$$+(\Delta_2-\Delta_1)^{\frac{4}{3}}]-P_1\Delta_1-P_2\Delta_2。$$

令 $$C_1=\frac{3D}{4}\cdot\frac{l}{(\sqrt{2}\,l)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_1}=\frac{4}{3}C_1[(\Delta_2+\Delta_1)^{\frac{1}{3}}-(\Delta_2-\Delta_1)^{\frac{1}{3}}]-P_1=0 \tag{1-26a}$$

$$\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_2}=\frac{4}{3}C_1[(\Delta_2+\Delta_1)^{\frac{1}{3}}+(\Delta_2-\Delta_1)^{\frac{1}{3}}]-P_2=0 \tag{1-26b}$$

令 $C=\frac{4}{3}C_1$，令$(\Delta_1+\Delta_2)^{\frac{1}{3}}=X$，

$(\Delta_2-\Delta_1)^{\frac{1}{3}}=Y$。

先解出 $X=\frac{P_1+P_2}{2C}$，$Y=\frac{-P_1+P_2}{2C}$，

然后得 $\Delta_1=\frac{1}{8C^3}(P_1^3+3P_1P_2^2)$，

$$\Delta_2=\frac{1}{8C^3}(P_2^3+3P_1^2P_2)。$$

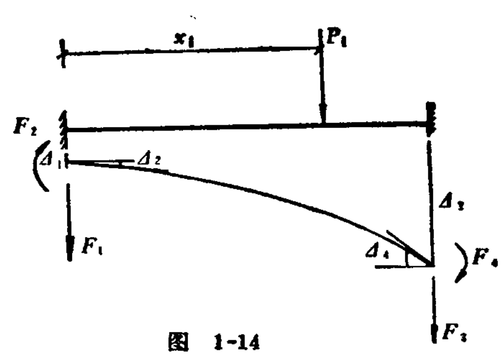


图 1-14

Δ_1和Δ_2不是P_1和P_2的线性函数。

上面的式(1-26)是用势能定理建立的非线性结构的位移法方程组的一个例子。

例1-10 最小势能原理求位移法基本结构中的杆的刚度矩阵和荷载产生的固端反力列阵。

解 挠曲弹性曲线为$y(x)=\Delta_1N_1(x)+\Delta_2N_2(x)+\Delta_3N_3(x)+\Delta_4N_4(x)+y_p(x)$上式的$y_p(x)$是两端固定杆因外荷$P_1$，…，$P_n$产生的挠曲线。应变能为：

$$u=\frac{1}{2}\int_0^l EI(y'')^2dx=\frac{1}{2}EI\int_0^l(\Delta_1N_1''+\Delta_2N_2''+\Delta_3N_3''+\Delta_4N_4''+y_p'')^2dx$$

$$\begin{aligned}=\frac{EI}{2}\Big(&\Delta_1\Delta_1\int_0^l N_1''N_1''dx+\Delta_2\Delta_2\int_0^l N_2''N_2''dx+\Delta_3\Delta_3\int_0^l N_3''N_3''dx\\&+\Delta_4\Delta_4\int_0^l N_4''N_4''dx+2\Delta_1\Delta_2\int_0^l N_1''N_2''dx+2\Delta_1\Delta_3\int_0^l N_1''N_3''dx\\&+2\Delta_1\Delta_4\int_0^l N_1''N_4''dx+2\Delta_2\Delta_3\int_0^l N_2''N_3''dx+2\Delta_2\Delta_4\int_0^l N_2''N_4''dx\\&+2\Delta_3\Delta_4\int_0^l N_3''N_4''dx+\sum_{i=1}^{4}2\Delta_i\int_0^l N_i''y_p''ds+\int_0^l y_p''y_p''dx\Big)\end{aligned} \tag{1-27}$$

$$P\cdot E=u-\sum_{j=1}^{4}F_j\Delta_j-P_iy_i \tag{1-28}$$

y_i 为沿 P_i 作用线发生的位移为：

$$y_i = y_{ip} + y_{i\Delta}$$

y_{ip} 为在两端固定的情况下由于荷载作用沿 P_i 作用线发生的位移；$y_{j\Delta}$ 为由于杆端位移沿 P_i 作用线发生的位移。因此

$$P_i y_i = P_i y_{ip} + P_i y_{i\Delta} = P_i y_{ip} + P_i[\Delta_1 N_1(x_i) + \Delta_2 N_2(x_i) + \Delta_3 N_3(x_i) + \Delta_4 N_4(x_i)] \tag{1-29}$$

在式(1-27)中有 $\int_0^l EI\, y_P'' y_P''\, dx$，显然 $\int_0^l EI y_P'' y_P''\, dx = P_j y_{ip}$ (1-30)

此外，可以证明 $EI\int_0^l N_i'' y_P'' dx = 0$（见虚功原理的例1） (1-31)

将式(1-27)和式(1-29)代入式(1-28)，并考虑到式(1-30)，得：

$$P \cdot E = \frac{EI}{2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\Delta_i\Delta_j \int_0^l N_i'' N_j'' dx - \frac{1}{2}EI\int_0^l y_P'' y_P'' dx - \sum_{j=1}^{4} F_i\Delta_i - P_i[\Delta_1 N_1(x_i) + \Delta_2 N_2(x_i) + \Delta_3 N_3(x_i) + \Delta_4 N_4(x_i)] \tag{1-32}$$

令 $j=1, 2, 3, 4$，依次建立 $\dfrac{\partial P\cdot E}{\partial \Delta_j} = 0$，得4个式子，写成如下形式：

$$EI\int_0^l \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} N_1''N_1'' & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4'' \\ & N_2''N_2'' & N_2''N_3'' & N_2''N_4'' \\ \text{对} & & N_3''N_3'' & N_3''N_4'' \\ \quad\text{称} & & & N_4''N_4'' \end{pmatrix}} dx \begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\\ \Delta_4\end{pmatrix} - \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} P_iN_1(x_i)\\ P_iN_2(x_i)\\ P_iN_3(x_i)\\ P_iN_4(x_i)\end{pmatrix}} - \begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1-33}$$

式(1-33)等号左边的含有16个定积分式的方阵即为杆的刚度矩阵；左边第二个矩阵 4 × 1 的列阵即为荷载支反力矩阵。左边第三个矩阵是总反力列阵。

例1-11 用势能最小定理建立位移法方程。

解 设有含 m 个未知数的位移法问题。其待求的位移为 Δ_1、Δ_2、…、Δ_m。势能的数学表达式仍与式(1-32)相同。即为：

$$P \cdot E = \frac{EI}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\Delta_j \int_0^l N_i'' N_j'' dx - \frac{1}{2}EI\int_0^l y_P'' y_P'' dx - \sum_{j=1}^{m} F_j\Delta_j - P_i \cdot \sum_{j=1}^{m}\Delta_j N_j(x_i) \tag{1-34}$$

上式中 $N''_i\Delta_i$ 和 $N''_j\Delta_j$ 各表达单纯由位移 Δ_i 和位移 Δ_j 在基本结构上产生的变形。定积分的上限为 l，l 表示整个结构的杆件，定积分的范围为整个结构，$\frac{EI}{2}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Delta_i\Delta_j\times\int_0^l N''_i N''_j\,dx$ 表示在基本结构上单纯由于 Δ_1，Δ_2，…，Δm 位移在整个结构中产生的应变能。F_j 表示结点承受的外力或支座反力。

$j=1$，2，…，m，依次建立 $\frac{\partial P\cdot E}{\partial\Delta_j}=0$，即得 m 个方程，写成如下形式：

$$EI\int_0^l \underbrace{\begin{pmatrix} N''_1N''_1 & N''_1N''_2 & \cdots & N''_1N''_m \\ & N''_2N''_2 & \cdots & N''_2N''_m \\ \text{对} & & & \vdots \\ & \text{称} & & N''_mN''_m \end{pmatrix}}_{m\times m} ds \begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\\ \Delta_m\end{pmatrix}$$

$$-P_i\underbrace{\begin{pmatrix}N_1(x_i)\\ N_2(x_i)\\ \vdots\\ N_m(x_i)\end{pmatrix}}_{m\times 1}-\underbrace{\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_m\end{pmatrix}}_{m\times 1}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{m\times 1} \qquad (1\text{-}35)$$

式(1-35)等号左边的含 $m\times m$ 个定积分的方阵是位移法方程的系数矩阵。$P_i[N_1(x_i),N_2(x_i),\cdots,N_m(x_i)]^T$ 是荷载反力列阵。这样，式(1-35)就可用来形成位移法方程组。

第四节 余能理论

一、余能

直杆的轴力 P 与伸长量 δ 之间的关系一般为 $P=P(\delta)$，或为 $\delta=\delta(P)$。$u(\delta)=\int_0^\delta P(\delta)\,d\delta$ 是众所周知的应变能。$v(P)=\int_0^P\delta(P)\,dP$ 称为余能，余能没有直观的狭义的物理意义，但它是客观存在的数量，是进行结构计算的有力工具。

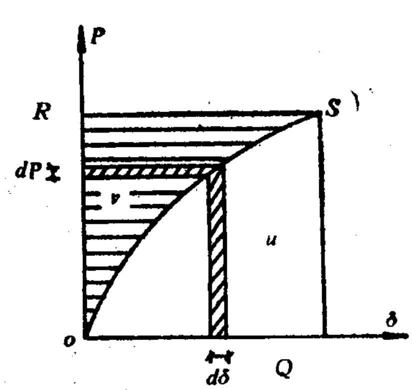


图 1-15

δ 从 O 发展到 OQ 时（也就是 P 从 O 发展到 OR 为止时）结构的应变能 u 用面积 OQS 来表示，与此同时，结构的余能 v 用面积 ORS 来表示。而 $u+v=$ 矩形 $OQSR$ 的面积 $=P\delta$。

在利用余能进行结构分析时，可采用两种表示式：