高等专科学校规划教材

中国计算机学会大专教育学会推荐出版

概率与数理统计

金炳陶　主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http: // www. phei. co. cn

高等专科学校规划教材

概率与数理统计

金炳陶　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书由中国计算机学会、全国大专计算机教材编审委员会审定并推荐出版。本书旨在培养学生运用概率统计独特的思维方式分析和解决问题的能力，后继课程学习和未来工作实践提供必备的随机性数学基础。书中概率部分以随机变量及其分布为主体，数理统计的重点是引入数据处理、参数估计、假设检验等基本内容。全书取材紧扣工科教学实际，注意理论与实践的结合，力求循序渐进、分散难点、突出重点。例题选配强调应用背景和解题思路的分析。每章章末除备有基本练习题外，还有概括该章重点、难点以及学习指导等方面的内容提要和少量复习思考题。

本书可作为高等专科学校计算机专业基础课教材，对工科其他专业以及非数学类理科、管理、财经等专业也都适用。

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计/金炳陶主编．-北京：电子工业出版社，1999.7

高等专科学校规划教材

ISBN 7-5053-3851-X

Ⅰ．概… Ⅱ．金… Ⅲ．①概率论-高等学校：专业学校-教材 ②数理统计-高等学校：专业学校-教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27876 号

丛 书 名：高等专科学校规划教材

书　　名：**概率与数理统计**

著　　者：金炳陶　主编

责任编辑：张凤鹏

特约编辑：袁　英

印 刷 者：北京市大中印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036　发行部电话 (010) 68214070

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1092mm 1/16 印张：16.5　字数：428.80 千字

版　　次：1999 年 7 月第 2 版　　1999 年 7 月第 1 次印刷

印　　数：3000　册

书　　号：ISBN 7-5053-3851-X / G·291

定　　价：18.00 元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定，在电子工业部教材办的组织与指导下，按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”的精神，大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委员会大专教育学会密切合作，于1986～1995年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作，共出版教材48种，从而较好地解决了全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要以及在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排，在速度上适应市场经济发展形势的需要，在电子工业部教材办的指导下，大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作，从1994年7月起经过两年的努力制定了1996～2000年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践，从师生反映较好的讲义中经学校选报，编委会评选择优推荐或认真遴选主编人，进行约编的。广大编审者，编委和出版社编辑为确保教材质量和如期出版，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，编审与出版工作中的缺点和不足在所难免，望使用学校和广大师生提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会
电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营 734 厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
南京理工大学
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
电子工业部第 47 研究所职工大学
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍钢职工工学院
天津商学院
国营 738 厂职工大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营 761 厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营 774 厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家口大学
河南新乡纺织职工大学
河南新乡市平原大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学

湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
湖南怀化师范专科学校
湘穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南湘潭机电专科学校
湖南株洲大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学
湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳金筑大学
广东佛山大学
广东韶关大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学计算机系
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

编者的话

本书是中国计算机学会大专计算机专业“九五”出版规划教材之一，并由全国大专计算机教材编审委员会负责征稿、审定、推荐出版。

本书由南京建筑工程学院金炳陶主编，苏州市职工大学钱椿林教授主审。

面对自然科学、社会科学、工程技术等领域中遇到的诸多理论和应用方面的问题，广泛地涉及到随机性数学模型，概率论、数理统计正是学习与应用这一近代数学分支的入门课程。依据国家教委组织制订的、供高等工程专科使用的《概率与数理统计课程教学基本要求》，并结合作者长期从事本课程教学、科研体会而编写的本书，旨在培养学生运用概率统计独特的思维方式分析和解决实际问题的能力，为后继课程学习和未来工作实践提供必备的随机性数学基础。

由于编写所依据的《基本要求》有较宽的适用面，因而本书作为基础课教材，对于工科其他专业以及非数学类理科专业、管理专业、财经专业等也都适用。

教材中的概率部分以随机变量及其分布为主体。为了便于阅读，在编排上将随机变量及其概率分布、随机变量函数的分布、数字特征等内容，打破一维、多维分别成章的常规模式而予以相对集中。对于繁琐的概率计算，精选并保留了与工程技术及其他应用领域联系较为紧密的部分，对于概率分布充分顾及到引入统计方法的需要。鉴于工科教学的特点，有关性质的讨论，侧重应用而不过于追求理论上的完备，对于某些必不可少的结论不予证明而加以直接引用。数理统计部分重点是引入数据处理、参数估计、假设检验等基本内容。至于具体的统计方法只选择了科技领域中有广泛应用的一元回归分析和单因素方差分析。对于方法的数学原理以及有关推导，只是为了说明方法的来龙去脉，如果因为教学时间等原因，绕过某些推导而直接学习方法，一般不会影响教学过程的连贯性和方法的应用价值。

本书取材紧扣工科教学实际，注意理论与实践的结合。在叙述方面力求循序渐进、分散难点、突出重点。教材中由“*”号标出的部分可供读者选学。例题选配强调应用背景和解题思路的分析，求解过程简明规范，并致力于强化对初学者统计计算能力的启迪。为便于读者抓住要点及时把握各章概貌，每章章末除备有数量充足、难易适中的基本练习题外，还有概括该章重点、难点、学习指导等方面的内容提要和少量复习思考题。书末给出了全部习题和复习思考题的答案或提示，供读者参考。

本书参编人员及分工情况是：南京734厂职工大学赵晓彬负责编写第三、五、九、十章；上海第二工业大学张祖骥负责编写第七、八章以及各章习题、复习思考题的演算；金炳陶编写了本书的其他部分并负责全书的统稿总纂。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，敬请读者不吝赐教。

金炳陶　赵晓彬　张祖骥

1996年5月

第一章　随机事件与概率计算

基于随机试验产生的随机事件与它的概率是本课程中两个最基本的概念。所有与此有关的内容是以后各章立论的出发点，从而为全书奠定基础。

本章首先强调了随机现象的普遍存在，据此简要地描述概率统计的研究对象；然后借助集合论方法，从事件的关系与运算入手，给出概率的若干定义；最后在讨论概率性质的同时，引入概率运算的各种法则。

第一节　随机试验与随机事件

1. 随机现象及其统计规律性

（1）随机现象与随机试验

纵观现实世界中遇到的种种现象，大体上可划分为两大类。一类是在给定条件下其结果发生与否是可以预言的。例如：纯净水在标准大气压下加热到 100℃就会沸腾；同性电荷的相互排斥；函数在间断点处当然不存在导数等。所有这些统称为必然现象，它们表达了条件与结果间的确定性联系，其数量关系均可由函数来刻画。对此，可借助微积分、线性代数等传统的数学工具进行研究。另一类是在给定条件下其结果发生与否是不可预言的。例如：上抛物体坠落的地点及时间常常不为人们所控制；一批新产品投放市场是畅销还是滞销，经营者事先往往难以估计；在驻点处函数未必有极值等。所有这些广泛存在于现实生活和科技领域中的现象统称为随机现象，它们揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述。而概率统计便是以非确定性联系的随机现象为其研究对象。

为了探索随机现象的规律性，常常需要通过一系列试验进行考察。这里所讲的试验当然包括对随机现象的种种观测。例如：观察某化学常规测试中预定结果到来的时刻；测量某山峰的高度；记录每天早上八点某地的气温等，都是在给定条件下的试验。综合上述试验其共同特点是：

1）　试验在相同条件下可以重复地进行；

2）　每次试验的可能结果不止一个，但所有可能结果是明确的；

3）　每次试验在其最终结果揭晓之前，不能确定正在进行中的试验究竟会出现哪一个结果。

人们把这类具有特定含义的试验称为随机试验。本书今后凡提到试验都是指随机试验。

（2）随机现象的统计规律性

实践表明，随机现象在个别试验中表现出结果的不确定性，这便是随机现象的第一个特征。然而，在大量重复试验中是有其规律性的。例如，某射手的一次射击，可以命中也可以

不命中，其结果事先无法肯定。但当射击次数增加时，命中率将逐渐趋于稳定。当射击次数越来越多时，稳定趋势呈现出明显的规律性。又如，构成气体的每个分子在运动过程中是杂乱无章的，而大量分子运动总体的压强、体积、温度之间是有规律的，这个规律由波义耳-马略特（Boyle-Mariotte）定律所描述。通常把大量试验中体现出来这种规律性称为随机现象的统计规律性。随机现象有统计规律性是它的第二个特征。

概率统计的任务就在于发现和研究这种规律性，是近代数学的重要分支。它有自己独特的概念和方法，又与其他学科有紧密联系。至今，概率统计的理论和方法在工业、农业和国民经济各个领域都有广泛应用，在理论联系实际方面所起的作用是其他学科所不能替代的。

2. 随机事件与样本空间

（1）随机事件

在概率统计课程中，总是通过随机试验来研究随机现象的。人们把试验的每一种可能结果称为随机事件，通常用大写字母 A，B，C，…或 A_1，A_2，…来表示。

例 1 今有八件同类产品，顺次编号为 1，2，…，7，8。从中任取一件，考察由被取产品的编号所构成的随机事件。

解：试验所产生的可能结果可以是：

A_1 ={被取产品的编号为 1 号}

A_2 ={被取产品的编号为 2 号}

……

A_8 ={被取产品的编号为 8 号}

或 C ={被取产品的编号为奇数}

D ={被取产品的编号为偶数}

E ={被取产品的编号为 3 或 5}

F ={被取产品的编号为 2,4,6 或 8}

……

上面所列举的种种结果，其共同特点是在试验中可能发生也可能不发生，都是随机事件。

下面借助上述例子讨论随机事件的分类。

随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 都是试验的直接结果，这样的每个事件称为给定试验下的基本事件。

而随机事件 $C,D,E,\cdots$ 却不是试验的直接结果，它们都可以看成若干基本事件的组合。例如，随机事件 D 是且必是与基本事件 A_2,A_4,A_6,A_8 之一同时发生，记为 $D=\{A_2,\ A_4,\ A_6,\ A_8\}$。类似地有 $C=\{A_1,\ A_3,\ A_5,\ A_7\}$。像 $C,D\cdots$ 这样的随机事件称为给定试验下的复合事件。

特别把给定试验下，包括所有基本事件的复合事件称为必然事件，并用大写希腊字母 Ω 表示。由于必然事件包括所有基本事件，因而在试验中一定发生。

此外，把不包括任何基本事件的随机事件称为不可能事件，并用小写希腊字母 ϕ 表示。由于不可能事件不包括任何基本事件，因而在试验中一定不会发生。

综上可知，随机事件属性的区分与给定试验的条件有关。但不管试验条件如何，作为必然事件、不可能事件实际上同属确定性范畴，都不是随机事件。为了方便通常把它们作为随机事件的极端情形予以统一处理，同时把随机事件简称为事件。

(2) 样本空间

给定试验下基本事件的全体所构成的集合称为样本空间。如果把样本空间作为事件来考察的话，它在给定试验下是一定要发生的，因而可视为等同于由全体基本事件复合而成的必然事件，所以样本空间也用 Ω 表示。

样本空间的存在直接联系着某个试验，它的构成可以比较简单，也可以相当复杂。样本空间按所含基本事件的数目，划分为有限样本空间和无限样本空间。无限场合又可分为无限可列和无限不可列两种。

有限样本空间和无限可列样本空间统称为离散样本空间。

无限不可列样本空间也称为连续样本空间。

例如，在例 1 的试验下，产生的样本空间中只含有 8 个基本事件，所以它是一个有限样本空间。

又如，记某市电话交换台在单位时间内接到呼叫的次数，本应是一个有限的非负整数，但由于在具体的时间段内很难指定某一个正整数作为它的上界，故通常把呼叫次数作为无限可列来处理的。若记试验下的基本事件为：

$$A_i=\{\text{单位时间内接到 } i \text{ 次呼叫}\} \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

则与之相应的无限可列样本空间为：

$$\Omega=\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots\}$$

再如，实测某炼钢炉炉膛内在固定时刻的温度 t℃，其基本事件可记为：

$$A_t=\{t\,|\,0\leqslant t<\infty\}$$

其中温度 t 是一个非负实数。于是相应的样本空间为：

$$\Omega=\{A_t\,|\,0\leqslant t<\infty\}$$

这里的 Ω 所包括的基本事件也是无限多个，但由于实数 t 不可能像呼叫次数 i 那样与自然数列对应而成为不可列。所以这是一个无限不可列样本空间。

基本事件也称为样本点。由此，任一事件可以看成是样本点的集合——样本空间的子集。于是基本事件本身便是样本点的单点集。必然事件即样本空间，它包括所有基本事件，因而包括给定试验下产生的一切事件，相当于集合论中的全集。不可能事件不包括任何基本事件，因而也就不包括给定试验下产生的任一事件。建立如此的对应是为了借助集合论的方法来讨论事件间的关系和运算。

第二节　事件间的关系与运算

在同一试验下，往往可以有多个事件发生。有些比较简单，如基本事件，而有些则较复杂。讨论复杂事件一般总是把它分拆成若干与之相关联的简单事件，从而通过对简单事件的考察去把握复杂事件。这样，不仅有助于了解事件的构成特征，同时也有利于简化事件的概率计算。

事件间关系和运算的讨论可以借助维恩（Venn）图予以直观示意。图示方法通常是用平面上的矩形区域表示样本空间 Ω，而作为样本空间子集的事件则可用划有阴影斜线的子区域标出。

1. 事件的包含

若事件 A 发生必将导致事件 B 发生，则称 B 包含 A，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

B 包含 A 意味着属于 A 的基本事件一定也属于 B，反之则不一定。其直观形象如图 1-1 所示。

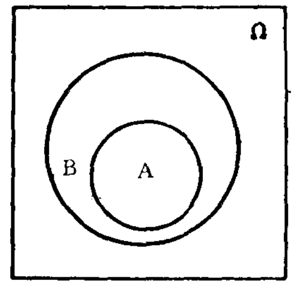

图 1-1

上节例 1 中的事件 C 与 E 有关系 $C\supset E$。对于任一事件 A 恒有关系 $\phi\subset A\subset\Omega$，其中 $\phi\subset A$ 是作为规定而引入的。

2. 事件的相等

若事件 A 发生必将导致 B 发生，反之亦然，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$。

事件 A 与 B 相等意味着它们是由相同的基本事件构成的，在试验中必定同时发生。即当 $A\subset B$ 且又 $A\supset B$ 时，便有 $A=B$ 成立。

上节例 1 中的事件 D 与 F 就是相等的两事件，即 $D=F$。

3. 事件的和（或并）

由事件 A 与 B 至少有一发生所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的和（或并）事件，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

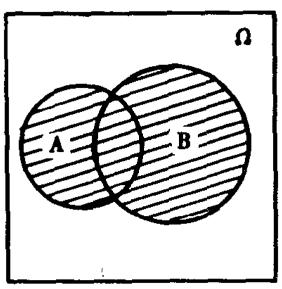

图 1-2

和事件 $A+B$ 的发生意味着 A 发生或 B 发生，即：

$$A+B=\{A、B\text{ 至少发生一个}\}=\{A\text{ 或 }B\}$$

这就是说，和事件 $A+B$ 由 A、B 中所有基本事件构成。其直观形象是图 1-2 中有阴影的部分。

上节例 1 中事件 E 与 F 的和事件是：

$$E+F=\{\text{被取产品的编号为 }2,3,4,5,6\text{ 或 }8\}$$

对于任一事件 A，恒有 $A+A=A$ 成立。

和事件的概念可推广到有限个事件或可列多个事件的情形。即有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}A_i&=A_1+A_2+\cdots+A_n\\&=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 至少发生一个}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}A_i&=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots\\&=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{至少发生一个}\}\end{aligned}$$

4. 事件的积(或交)

由事件 A 与 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的积(或交)事件，记作 AB 或 $A\cap B$。

积事件 AB 的发生意味着事件 A 发生的同时事件 B 也发生，即：

$$AB=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 也发生}\}=\{A\text{ 且 }B\}$$

这就是说，积事件 AB 由 A，B 中公有的基本事件构成。其直观形象是图 1-3 中有阴影的部分。

上节例 1 中事件 C 与 E 的积事件是：

$$CE=\{\text{被取产品的编号为 3 或 5}\}$$

对于任一事件 A，恒有 $AA=A$ 成立。

积事件的概念可推广到有限个事件或可列多个事件的情形。即有：

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n = \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 同时发生}\}$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{同时发生}\}$$

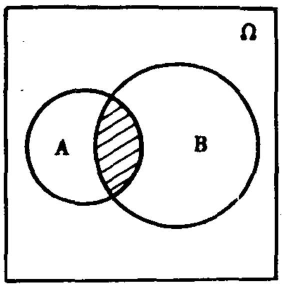

图 1-3

对于事件的求和、求积运算，易证它们满足交换律、结合律以及求积对求和、求和对求积的分配律，即有：

$$A+B=B+A \qquad AB=BA$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \qquad A(BC)=(AB)C$$

$$A(B+C)=AB+AC \qquad A+BC=(A+B)(A+C)$$

事件的和（并）、积（交）运算还满足：

$$AB\subset A\subset A+B \qquad AB\subset B\subset A+B$$

上述法则可形象地说成：事件求交，越交越“小”；事件求并，越并越“大”。

如果 $A\supset B$，则有：

$$AB=B \qquad A+B=A$$

上述法则可形象地说成：有包含关系的两事件，求交取“小”的；求并取“大”的。特别，对任一事件 A，有：

$$A\Omega=A \qquad A+\Omega=\Omega$$

$$A\phi=\phi \qquad A+\phi=A$$

熟悉这些性质以及由此派生出来的法则，并能灵活运用，对于完成某些运算是有益的。

5. 事件的互斥

若事件 A 与 B 的积是不可能事件，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是互斥事件。互斥事件亦称为互不相容事件，两事件不互斥称为相容。

事件 A 与 B 互斥意味着它们没有公共的基本事件，因而在一次试验中不可能同时发生。其直观形象如图 1-4 所示。

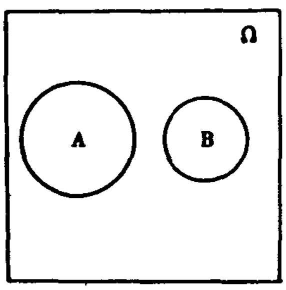

图 1-4

上节例 1 中的事件 C 与 D 是互斥事件，即 $CD=\phi$。类似地，由于 $DE=\phi$，所以 D、E 也是互斥事件。而事件 C，E 则是相容事件。

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。若其中任意两事件不能同时发生，即：

$$A_iA_j=\phi \qquad i\neq j \qquad i、j=1,2,\cdots,n$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥。

对于可列多个事件，也可仿此建立两两互斥的概念。

6. 事件的对立

若事件 A 与 B 同时满足 $AB=\phi$ 和 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称为互逆事件。

事件 A 与 B 互为对立事件意味着它们既无公共的基本事件，而所有基本事件又恰好充满样本空间 Ω。这就是说，它们在每次试验中既不能同时发生，但又必定有一发生。若以 $\bar{A}$ 表示事件 A 不发生，于是，与 A 对立的 B 实际上就是 $\bar{A}$（如图 1-5 所示）。这样，便有：

$$A\bar{A}=\phi \qquad A+\bar{A}=\Omega$$

两事件对立一定互斥，反之则不一定。上节例 1 中，C、D 是对立事件，但 D、E 互斥而不对立。

7. 事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$。

由于差事件不满足交换律，所以在运算中常常把它转化为积事件处理，即 $A-B=A\bar{B}$。由此可知，差事件 $A-B$ 由属于 A 而不属于 B 的那些基本事件构成。其直观形象是图 1-6 中有阴影的部分。

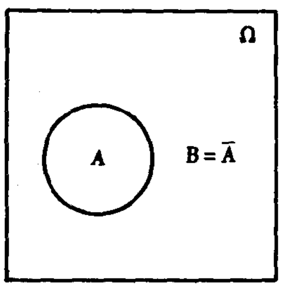

图 1-5

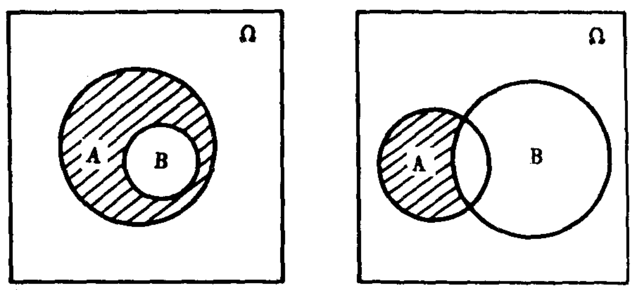

图 1-6

8. 互斥完备事件组

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，而其和恰好充满样本空间 Ω。即：

$$A_iA_j=\phi \qquad i\neq j \qquad i、j=1,2,\cdots,n$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$$

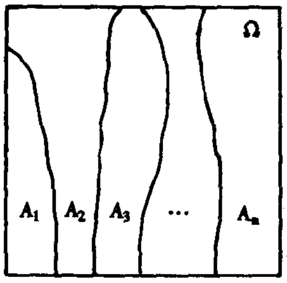

图 1-7

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成互斥完备事件组。

这就是说，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在每次试验中既没有其中任意两事件同时发生，但又必定有一发生。其直观形象如图 1-7 所示。

在今后应用中，常常需要把一个已知事件“分解”成若干两两互斥事件的和。下面举例说明互斥分解的过程。

例 1 运用事件关系和运算法则，证明下列等式：

1）$A=AB+A\bar{B}$

2） $A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$

证：1） $A=A\Omega=A(B+\bar{B})=AB+A\bar{B}$

又 $(AB)(A\bar{B})=A(B\bar{B})=A\phi=\phi$

可见，AB 与 $A\bar{B}$恰好构成了事件 A 的互斥和，这样就完成了对事件 A 的互斥分解。

2） $A+B=A\Omega+B\Omega$

$$=A(B+\bar{B})+B(A+\bar{A})$$

$$=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$$

又 $(A\bar{B})(\bar{A}B)=(A\bar{B})(AB)=(\bar{A}B)(AB)=\phi$

这样，便把事件 $A+B$“分解”成了两两互斥的三事件的和。“分解”的直观形象如图 1-8 所示。

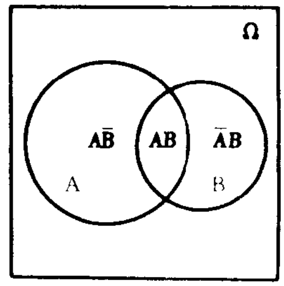

图 1-8

易证，$A+B=A+\bar{A}B$ 或 $A+B=A\bar{B}+B$。可见，同一事件的互斥分解式并不唯一。

例 2 设事件 A_i 表示在产品质量抽检中第 $i(i=1,2,3)$次抽到合格品，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：三次都抽到合格品(B)；三次中至少有一次抽到合格品(C)；三次中恰有两次抽到合格品(D)；三次中至多有一次抽到合格品(E)；三次均未抽到合格品(F)；三次中至少有一次未抽到合格品(G)。

解：由题设条件及事件关系和运算法则可得：

$$B=A_1A_2A_3$$

$$C=A_1+A_2+A_3$$

$$D=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$$

$$E=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

$$F=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

$$G=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3$$

需要指出的是上述事件中的某些事件，若从不同的角度出发，则它们的表示方法可以不唯一。例如，对于事件 E 也可说成是“三次中至少有两次未抽到合格品”。于是，另一种表示式是：

$$E=\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3$$

容易验证事件 E 的两种表示式是等价的。

类似地，事件 C 另一种表示式是：

$$C=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3$$
$$+\bar{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$$

此外，上述诸事件间也存在着一定的联系。例如，事件 F 实际上是事件 C 的逆事件，即：

$$F=\bar{C}=\overline{A_1+A_2+A_3}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

再如，事件 G 与事件 B 也是互逆事件，即：

$$G=\bar{B}=\overline{A_1A_2A_3}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3$$

由此揭示的规律，对于任意两个事件或更多个事件也同样适用。这一规律便是集合论中的狄·摩根(De Morgan)法则，也称为交并对偶原理。它在事件运算和概率计算中有着重要作用。其一般的表达式是：

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}=\prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i \qquad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}=\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

例 3 已知某电路系统由 A,B,C,D 四个开关及甲、乙两指示灯组成，连接方式如图 1-9 所示。字母 A,B,C,D 分别表示相应开关闭合的事件。试用事件 A,B,C,D 表示指示灯甲亮、指示灯乙亮、整个系统有灯亮等事件及其逆事件。

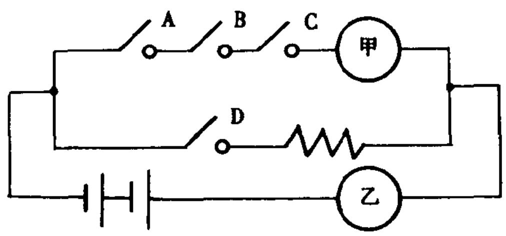

图 1-9

解：设$E=\{$指示灯甲亮$\}$，

$F=\{$指示灯乙亮$\}$。

就整个系统而言，指示灯甲亮与不亮不是孤立事件，必须同时考虑系统中另一指示灯的情形。故由互斥分解的方法可得：

$$\begin{aligned} E &= EF+E\bar{F} \\ &= ABCD+ABC\bar{D} \\ &= ABC(D+\bar{D}) \\ &= ABC \end{aligned}$$

于是，由狄·摩根法则可知，指示灯甲不亮应是：

$$\bar{E}=\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

仿前，指示灯乙亮的事件是：

$$\begin{aligned} F &= FE+F\bar{E} \\ &= ABCD+(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})D \\ &= ABCD+\overline{ABC}D \\ &= (ABC+\overline{ABC})D \\ &= D \end{aligned}$$

于是 $\bar{F}=\bar{D}$

整个系统有灯亮，即事件 E 与 F 至少有一发生，故：

$$\begin{aligned} E+F &= EF+E\bar{F}+\bar{E}F \\ &= ABCD+ABC\bar{D}+(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})D \\ &= ABC+ABCD+\overline{ABC}D \\ &= ABC+D \end{aligned}$$

于是 $\overline{E+F}=\overline{ABC+D}=(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})\bar{D}$

对于 $E+F$，若从互斥分解式 $E+F=E+\bar{E}F=F+E\bar{F}$出发，运用事件的运算规律可以获得相同的结果，读者不妨作为练习自行验证。

第三节 事件的概率

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，当试验尚未获得结果前是无法预料的。但是在大量重复试验中，发生的可能性大小却是客观存在的，是事件本身的固有属性。再说，不同事件发生的可能性大小也是有差别的。这就启发人们试图用一个数来度量和区分。于是便把度量与区分事件发生可能性大小的数叫做它的概率，并用记号 $P(A)$表示事件 A 的概率。这样，较大的概率预示着相应事件发生的可能性也较大。反之，则发生的可能性就较小。

对于给定的事件A,客观上都有它的概率$P(A)$,但如何获得$P(A)$的数值,往往与试验条件有关。人们从不同的角度出发给出了概率的若干定义及其计算方法,下面将逐一介绍。

1. 概率的统计定义

为了判定事件发生的可能性大小,一个常用的方法是从大量重复试验出发进行讨论。为此,首先引入频率的概念。

(1) 频率及其统计概型

定义 1 在N次重复试验中,事件A发生的次数M与试验次数N的比,称为事件A的频率,记为$\omega(A)$,于是:

$$\omega(A)=\frac{M}{N}$$

式中 M称为事件A在N次试验中出现的频数。

易知,如果A发生的可能性较大,那么相应的频率也较大。反之,则频率就较小。在这一点上与概率极为相似。因而频率在一定程度上也刻画了事件发生的可能性大小,这将成为建立统计定义的出发点。

实践表明,当试验次数N逐渐增大时,事件A的频率$\omega(A)$虽不尽相同,但却趋于稳定。对此,曾有人做过这样的试验,现将试验结果列表给出。表 1-1 记录了一枚匀称硬币投掷试验的结果。N表示投掷次数,M表示正面朝上的次数,ω表示正面朝上的频率。

表 1-1 匀称硬币在历次投掷中的频率

试验序号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	M	ω	M	ω	M	ω
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	2	0.4	21	0.42	246	0.492
6	4	0.8	18	0.36	244	0.488

由此可见,当投掷次数较少时正面朝上的频率是波动的,但当投掷次数增加时频率的波动性逐渐消失而呈现出稳定趋势。表 1-1 的最后一列表明正面朝上的频率大致在 0.5 附近作微小摆动。这一事实被称为频率的稳定性。

正是频率的稳定性事实,构成了概率概念的实践基础。这便是概率的统计模型,简称统计概型。下面给出概率的统计定义。

(2) 概率的统计定义及其基本性质

定义 2 假设一个试验在相同条件下可以无限次地重复进行,当试验次数N充分大时,事件A的频率$\omega(A)$始终围绕某一常数p作稳定的微小摆动,则称事件A有概率。常数p就是事件A的概率,即$P(A)=p$。

由统计定义给出的概率简称为统计概率。

人们常常运用统计定义测定事件发生的概率。由统计定义求概率通常分两步完成：

1）做试验取得频率 $\omega(A)=M/N$；

2）以频率作为概率的近似，即 $P(A)\approx\omega(A)$。

定义中要求试验次数充分大，这在实际上是办不到的，通常只是根据需要与可能，用一定数量试验下的频率作为概率的近拟。

例如，对于投掷硬币的试验，设 $A=\{$正面朝上$\}$。由表 1-1 知道，当试验次数不断增加时，频率 $\omega(A)$ 始终在常数 0.5 附近微小摆动，因而 $P(A)=0.5$。

又如，美国麻省理工学院电脑专家卡文(Carwen)对 1933 年至 1988 年的 56 年间，世界各地的 53274 场重大足球比赛中罚点球情况统计表明，在判罚的 15382 个点球中有 11172 个被射中，如设 $A=\{$点球射中$\}$，则因 $\omega(A)=11172/15382=0.73$ 而认定罚点球命中的概率 $P(A)\approx0.73$。

显然，频率 $\omega(A)$ 有如下基本性质：

1）对于任一事件 A，在 N 次试验中的频数 M 恒满足 $0\leqslant M\leqslant N$，故有 $0\leqslant\omega(A)\leqslant1$；

2）对于必然事件 Ω，因 $M=N$，故有 $\omega(\Omega)=1$；

3）对于不可能事件 ϕ，因 $M=0$，故有 $\omega(\phi)=0$。

在统计定义下，概率作为频率的稳定值，因而频率所具备的基本性质概率也应当具备。由此可知，概率的基本性质是：

1）对于任一事件 A，其概率 $P(A)$ 恒满足 $0\leqslant P(A)\leqslant1$；

2）对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

3）对于不可能事件 ϕ，有 $P(\phi)=0$。

由此可见，概率是一个非负的真分数，它刻画了事件在大量试验中发生的可能性大小。必然事件在试验中一定发生，因而取得概率的最大值 1，而不可能事件在试验中一定不发生，故取得概率的最小值 0。

2. 概率的古典定义

概率的统计定义是以频率作为概率的近似，是以大量重复试验为前提，因而作为定义有诸多不足。为此引入概率的古典定义。

(1) 古典概型及其特点的认定

首先给出一类特殊而常见的随机试验，其共同的特点是：

1）试验的所有基本事件只有有限个(有限性)；

2）试验中每个基本事件发生的可能性是相等的(等可能性)。

具有上述特征的随机试验模型由于较早地用于概率计算，故被称为古典概型。为了叙述的方便，特别把满足了古典概型条件的一组事件称为等概基本事件组。

如何判断一个试验是不是古典概型，关键是要检查是否符合上述条件。有限性的识别是显而易见的，至于等可能性主要依据某种"均匀性"、"对称性"或"任意性"来认定。试以投掷一枚匀称的硬币为例，人们关心的是在一次试验中出现"正面朝上"或"反面朝上"的两个基本事件。考虑到硬币本身的匀称特征，客观上没有理由说"正面朝上"的可能性要比"反面朝上"的可能性更大些或更小些，自然就认为它们出现的可能性是一样的，从而便可认定匀称硬币在一次投掷中"正面朝上"与"反面朝上"这两个基本事件是具有等可能性的。又如，在十个编了号的同类