变分不等方程及其应用

D.金德勒雷
G.斯当帕柯亚 著

科学出版社

现代数学译丛

变分不等方程及其应用

D. 金德勒雷
G. 斯当帕柯亚 著

郭友中　刘君兰 译

王耀东 校

科学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍变分不等方程的主要概念、方法和结果，包括作者自己的大量工作．全书共分八章．第一章论述 $\mathbf{R}^N$ 中的变分不等方程，包括必要的预备知识；第二章讨论 Hilbert 空间中的变分不等方程，包括 Sobolev 空间理论；第三章介绍更一般的单调算子的变分不等方程，包括强制和非强制的情况；第四章处理解的正则性问题，最典型的例子是障碍问题；第五章专门讨论一般的自由边界问题与解的重合集；第六章是椭圆型方程与方程组决定的自由边界问题；第七、八章阐明变分不等方程的应用，后一章主要是单相 Stefan 问题．每章最后都有专门的评述和文献注记以及可供练习和启发读者思考的习题(除第八章外)．书末附有详细的文献目录和索引．本书内容丰富，深入浅出，自给自足．阅读本书只需具有泛函分析或偏微分方程的预备知识．

本书可用作数学、物理、力学专业的大学生和研究生教材，也可供高等院校有关专业师生、工程技术和社会经济等方面的科学工作者参考．

David Kinderlehrer, Guido Stampacchia

AN INTRODUCTION TO VARIATIONAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

Academic Press, 1980

现代数学译丛

变分不等方程及其应用

D. 金德勒雷
G. 斯当帕柯亚 著

郭友中 刘君兰 译

王耀东 校

责任编辑 吕 虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1991 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1991 年 3 月第一次印刷 印张：10 1/4

印数：0001—2 000 字数：267 000

ISBN 7-03-002057-X/O · 388

定价：11.50 元

序　　言

变分不等方程理论的飞速发展及其应用的急剧增长，使得对这一领域做一介绍的要求就变得十分明显了。本书就是我们对这种要求作出的响应。我们希望它是实用的和富有启发性的。1976年7月我们编写了本书的提纲，确信能在1979年8月或9月完成，我们对这一工作的估计是乐观了些，不过，成书也是按原计划完工的。

书中很多章取自我们在高等师范学院、明尼苏达大学、巴黎大学、法兰西学院、密太格-莱夫勒研究所和西北大学用过的教材。关于本书用作教材的一些建议将在引言中讨论。

对已故的作者 Guido Stampacchia 的生平和工作，Jacques Louis Lions 和 Enrico Magenes 在《意大利数学会会刊》(*Bollettino della Unione Matematica Italiana*, **15** (1978), 715—756) 上作了评介。

我要对这些年来如此慷慨地帮助过我们的朋友们和同事们表示衷心的感谢。最重要的是，倘若没有 Sara Stampacchia 夫人的关心与鼓励，要制订这一计划并付诸实现都是不可能的。

此外，要特别感谢 Haim Brezis 在本书写作过程中的许多有益的建议和经常的关注。Silvia Mazzone, Michael Crandall 和 David Schaeffer 在写作的各个阶段都提供了有益的帮助，在此一并致谢。最后，要感谢 Matania Ben Artzi 和 Bevan Thompson 仔细地阅读了部分书稿。

1976—1979年于

龙溪和明尼阿波利斯

符号汇编

常用符号

$\mathbf{R}^N$　N维 Euclid 空间，N个实数直线 $\mathbf{R}$ 的积

$\mathbf{C}^N$　N维复空间，N个复数平面 $\mathbf{C}$ 的积

$x=(x_1,\cdots,x_N)$，$y=(y_1,\cdots,y_N)$等，　$\mathbf{R}^N$ 中的坐标

$xy=x_1y_1+\cdots+x_Ny_N=x\cdot y=(x,y)$　$\mathbf{R}^N$ 中的数量积

$|x|=\left(\sum_1^N x_i^2\right)^{1/2}$　$x\in\mathbf{R}^N$ 的长度

$B_r(x)$　半径为 r 且中心在 $x\in\mathbf{R}^N$ 的开球

Ω　$\mathbf{R}^N$ 的开子集(通常是有界且连通的)

$\partial\Omega$　Ω 的边界

$\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$　Ω 的闭包

$\mathrm{int}U=\mathring{U}$　U 的内部

supp u　函数 u 的支集，它是使在其外 $u=0$ 的最小闭集

$\partial u/\partial x_j$　u 对 x_j 的偏微商，亦记作 u_{x_j}，$\partial_j u$ 或 u_j

$u_x=\mathrm{grad}\ u=(u_{x_1},\cdots,u_{x_N})$

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$，整数 $\alpha_i\geqslant 0$，长度 $|\alpha|=\sum_1^N\alpha_i$ 的多重指标

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}u$$

$\left(\text{第六章中 } D^\alpha u=(-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}u \text{ 是个例外}\right)$

$dx=dx_1\cdots dx_N$　$\mathbf{R}^N$ 中的 Lebesgue 测度

$\Delta=\sum_1^N\partial^2/\partial x_j^2$　Laplace 算子

$\langle\cdot,\cdot\rangle$：(实) Banach 空间 V 及其对偶空间 V' 的配对（对偶

积)；$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$V'\times V\to\mathbb{R}$

$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}$，$D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$　(仅用于第六章)

$a_ib_i=\sum_{i=1}^{N}a_ib_i$　求和约定：重复指标表示须在它们的变域上求和，一般是 $1\leqslant i,\ j\leqslant N$

$a_{ij}\xi_i\eta_j=\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\xi_i\eta_j$

$\exists$ 存在

$\forall$ 所有

函数空间

$C(\Omega)$ (或 $C(\bar{\Omega})$)　Ω(或 $\bar{\Omega}$)中的连续函数类

$C^m(\Omega)(C^{m,\lambda}(\Omega))$　Ω中m次连续可微的函数类(它们的m阶微商满足指数为λ的 Hölder 条件)，参见第二章第4节

$C^m(\bar{\Omega})(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))$　$C^m(\Omega)$中的函数类，它们都是在$\bar{\Omega}$的某一邻域中m次可微的(它们的m阶微商满足指数为λ的 Hölder 条件)

$L^s(\Omega)$　Ω中的 Lebesgue 可测函数类，它的元素u赋范$\|u\|_{L^s(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u|^s dx\right)^{1/s}<\infty\ (1\leqslant s<\infty)$

$L^\infty(\Omega)$　Ω中的 Lebesgue 可测函数类，它的元素u是本性有界的，赋范 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\inf\{M:|u|\leqslant M$ 几乎处处于 $\Omega\}$

$H^{m,s}(\Omega)$, $H_0^{m,s}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$　Sobolev 空间，参见第二章第4节

$H^1_{loc}(\Omega)$　对每一有界域$\Omega'\subset\Omega$，它的闭包$\bar{\Omega}'\subset\Omega$，都属于$H^1(\Omega')$的函数类

$\mathscr{D}'(\Omega)$　定义在Ω上的分布

$L^2(0,T:H^1(0,R))$　参见第八章第1节

目　录

序言 v
符号汇编 vi
引言 1
第一章　R^N 中的变分不等方程 7
1.不动点 7
2.凸集上投影的特征 8
3.变分不等方程的一个重要定理 10
4.变分不等方程 12
5.导致变分不等方程的一些问题 15
评注 17
习题 18
第二章　Hilbert 空间中的变分不等方程 22
1.双线性型 22
2.解的存在性 23
3.截断 26
4. Sobolev 空间与边值问题 27
5.弱最大值原理 34
6.障碍问题：基本性质 40
7.一维障碍问题 47
附录 A. Sobolev 空间 49
附录 B. 具有界可测系数的方程的解 63
附录 C. 解的局部估计 66
附录 D. 解的 Hölder 连续性 73
评注 77
习题 78
第三章　单调算子的变分不等方程 84
1.抽象存在定理 84

2.非强制算子 …… 88
3.半线性方程 …… 94
4.拟线性算子 …… 95
评注 …… 102
习题 …… 102
第四章 正则性问题 …… 107
1.罚法 …… 107
2. Dirichlet 积分 …… 107
3.强制矢量场 …… 115
4.局部强制矢量场 …… 118
5.其它罚法 …… 122
6.二阶导数的估计 …… 125
7. Au 的有界变差 …… 132
8. Lipschitz 障碍 …… 136
9.具混合边界条件的变分不等方程 …… 141
附录 A. 定理 3.3 的证明 …… 145
评注 …… 148
习题 …… 149
第五章 自由边界问题与解的重合集 …… 151
1.引言 …… 151
2.速端曲线与 Legendre 变换 …… 154
3.二维情形的自由边界 …… 157
4.关于奇性的一个注记 …… 168
5.极小曲面的障碍问题 …… 170
6.障碍为凹时重合集的拓扑性质 …… 176
7.高维重合集的一个注记 …… 182
评注 …… 185
习题 …… 186
第六章 椭圆型方程与方程组决定的自由边界问题 …… 189
1.引言 …… 189
2.速端曲线与 Legendre 变换：单个方程的理论 …… 190
3.椭圆型方程组 …… 195
4.反射问题 …… 207

5.共用 Cauchy 数据的椭圆型方程组 …… 210
6.双膜问题 …… 218
评注 …… 224
习题 …… 225
第七章　变分不等方程的应用 …… 229
1.引言 …… 229
2.润滑理论中的一个问题 …… 229
3.液体通过多孔介质的渗流问题 …… 234
4.用变分不等方程解渗流问题 …… 242
5.液体通过变截面多孔介质的渗流 …… 248
6.三维渗流问题的解 …… 256
7.沿已知侧面的绕流：在物理平面中的问题 …… 263
8.沿已知侧面的绕流：用变分不等方程求解 …… 267
9.简支梁的弯曲 …… 277
评注 …… 280
习题 …… 282
第八章　单相 Stefan 问题 …… 286
1.引言 …… 286
2.解的存在与唯一性 …… 288
3.解的光滑性 …… 297
4. Legendre 变换 …… 305
评注 …… 307
参考文献 …… 308
索引 …… 315

引 言

本书介绍变分不等方程以及自由边值问题的基本原理，并给出其应用的种种诱人的例子。这是一本教科书，而且为了吸引广大的读者，每章的开头几节都是以使任何一个有见识的读者，其中包括经济学家、工程师和科学界的其他同行能接受的方式编写的。

书中介绍的是近几年发展起来的变分不等方程问题与方法的概况。理解本书的内容将会使读者在这一课题的许多方面达到能做研究工作的水平。我们认为本书会引起熟悉偏微分方程的读者的强烈兴趣。实际上，我们的目的之一也就是要推动这一课题的研究。关于这本书所需的预备知识和用作教材的一些建议将在引言的结尾谈到。

现在粗浅地介绍变分不等方程的性质及由此产生的自由边值问题，并且略述本书的内容。我们不想给出任何精确的定义，只想讨论几个例子。

例 1. 设 f 是闭区间 $I=[a, b]$ 上的光滑实值函数。 求点 $x_0\in I$ 使

$$f(x_0)=\min_{x\in I}f(x).$$

可能发生三种情况：

(i) 若 $a<x_0<b$，则 $f'(x_0)=0$；

(ii) 若 $x_0=a$，则 $f'(x_0)\geqslant 0$；

(iii) 若 $x_0=b$，则 $f'(x_0)\leqslant 0$。

综上所述，可以写成

$$f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0,\quad \forall x\in I.$$

这样的不等式将称为**变分不等方程**。

例 2. 设 f 为定义在 N 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N$ 中的闭凸集 K 上

的光滑实值函数，我们将刻画点 $x_0\in \mathbf{K}$ 的特征，x_0 使

$$f(x_0)=\min_{x\in \mathbf{K}} f(x).$$

设 x_0 是达到最小值的点，$x\in \mathbf{K}$。因为 $\mathbf{K}$ 是凸的，所以线段 $(1-t)x_0+tx=x_0+t(x-x_0)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，含于 $\mathbf{K}$。函数

$$\Phi(t)=f(x_0+t(x-x_0)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

在 $t=0$ 处达到最小值；所以，如同例 1，

$$\Phi'(0)=\operatorname{grad} f(x_0)(x-x_0)\geqslant 0,\ \forall x\in \mathbf{K}.$$

因此，点 x_0 满足变分不等方程

$$x_0\in \mathbf{K}:\ \operatorname{grad} f(x_0)(x-x_0)\geqslant 0,\ \forall x\in \mathbf{K}.$$

如果 $\mathbf{K}$ 是有界的，则立即推得至少存在一个这样的点 x_0。

例 3. 设 $\Omega\subset \mathbf{R}^N$ 是有边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，ϕ 是 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 上给定的函数，满足关系

$$\max_{\Omega}\phi\geqslant 0\quad 且\quad \phi\leqslant 0\quad 于\ \partial\Omega\ 上.$$

定义

$$\mathrm{K}=\{v\in C^1(\bar{\Omega}):\ V\geqslant\phi\ 于\ \Omega\ 中且\ v=0\ 于\ \partial\Omega\ 上\}$$

为一非空函数凸集。求一函数 $u\in \mathrm{K}$，使

$$\int_\Omega|\operatorname{grad} u|^2dx=\min_{v\in \mathbf{K}}\int_\Omega|\operatorname{grad} v|^2dx.$$

假定这样的 u 存在，还是靠 $\mathbf{K}$ 的凸性，论述与前例相似。对于任一 $v\in \mathrm{K}$，函数 $u+t(v-u)\in \mathrm{K}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，因而函数

$$\Phi(t)=\int_\Omega|\operatorname{grad}(u+t(v-u))|^2dx,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

在 $t=0$ 处达到极小值。这蕴涵 $\Phi'(0)\geqslant 0$，导致变分不等方程

$$u\in \mathrm{K}:\int_\Omega \operatorname{grad} u\ \operatorname{grad}(v-u)dx\geqslant 0,\ \forall v\in \mathrm{K}.$$

这里涉及到点集

$$I=\{x\in\Omega:\ u(x)=\phi(x)\},$$

称之为重合集。重合集的出现使得 u 与边值问题的解有了区别。

我们把 u 看作绷在物体 $\{(x,x_{N+1}):\ x_{N+1}\leqslant\phi(x),\ x\in\Omega\}$ 之上的薄膜的平衡位置的高度函数，在 $\partial\Omega$ 上高度为 0。

例 4. Ω 和前面一样是一有界开集，设 φ^1，φ^2，λ_1，λ_2，f_1 及 f_2

是 $\bar{\Omega}$ 中适当光滑函数，且 $\varphi^1\leqslant\varphi^2$。定义函数对的凸集

$$\mathrm{K}=\{v=(v^1,\ v^2):\ v^1\leqslant v^2\ \text{于}\ \Omega\ \text{中},\ v^i=\varphi^i\ \text{于}\ \partial\Omega\ \text{上},\ v^i\in C^1(\bar{\Omega}),\ i=1,2\}.$$

求

$$\sum_i\int_\Omega\{\operatorname{grad} u^i\operatorname{grad}(v^i-u^i)+\lambda_i u^i(v^i-u^i)\}dx \geqslant\sum_i\int_\Omega f_i(v^i-u^i)dx,\quad\forall v\in\mathrm{K}$$

的解 $u\in\mathrm{K}$。在这种情况下，u 是 K 的一点，在这一点上泛函

$$F(v)=\frac{1}{2}\sum_i\int_\Omega\{|\operatorname{grad} v^i|^2+\lambda_i(v^i)^2\}dx -\sum_i\int_\Omega f_i v^i dx$$

取极小值。

解对 $u=(u^1,u^2)$ 表示在外力作用下的两个膜的平衡位置，但这种外力是受到约束的，即不能使这两个膜互相穿透。此时重合集是

$$I=\{x\in\Omega:\ u^1(x)=u^2(x)\}.$$

例 5. Ω 与 K 同例 3，求有最小面积的元素 $u\in\mathrm{K}$，即

$$\int_\Omega\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}\,dx=\min_{v\in\mathrm{K}}\int_\Omega\sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\,dx.$$

相应的变分不等方程是

$$u\in\mathrm{K}:\ \int_\Omega\frac{\operatorname{grad}u\ \operatorname{grad}(v-u)}{\sqrt{1+|\operatorname{grad}u|^2}}\,dx\geqslant 0,\quad\forall v\in\mathrm{K}.$$

这些例题中，前两个依赖于有限个变量，可以用分析方法求解，其它三个可供选择的函数属于无限维空间，所以类似于变分法的问题。

象通常研究变分法一样，在容许函数的自然类中形成的问题，在这一自然类中未必有解。众所周知，这一困难可以通过把容许函数类扩充到 Sobolev 空间或更一般的分布空间的某一适当的子集来解决。本书中，例 3 与例 4 的解的存在性本质上很容易用

Hilbert 空间中的闭凸集上的投影算子的性质来证明. 一看就知道例5更为复杂些,因为要在非自反的 Banach 空间中加以考虑. 另一种方法就是建立合适的先验估计.

解的存在性的一般问题在前三章中讨论. 第一章论述 $\mathbf{R}^N$ 中的变分不等方程以及与映射不动点有关的课题. 第二章讨论有关 Hilbert 空间中的变分不等方程,包括类似于例 3 和例 4 那样的问题. 第二章附录中的材料包括 Sobolev 空间的基本性质和具有界可测系数的二阶方程解的正则性的自足证明. 更一般的存在性定理在第三章中讨论.

减弱了解的概念,我们就被引到正则性问题上来了. 正则性问题是对解的光滑性的探索. 值得强调的是:这一问题对变分不等方程来说与边值问题理论的类似问题不同. 在后者,数据的光滑性越高,解的光滑性通常也越高. 可是在变分不等方程中,定义凸集的约束会阻碍解的正则性,不论数据的光滑性如何,只能容许解有一定的而且不能逾越的光滑性.

这一情况的典型例题是"障碍问题",见例 3. 此时,不论 ψ 的光滑性如何,我们只能断定 u 的一阶微商连续,二阶微商有界但不连续. 甚至在一维情况下,这一限制也是显然的,这些性质的研究是第四章的主题.

因此障碍的出现反映为解的正则性的限制以及我们在例 3 中指出的重合集 I 的出现. 这里的 I 是由例 3 的变分条件确定的,因此不是任意的.事实上,我们将会看到,u 是 Cauchy 数据给在 I 的边界 ∂I 上的 Laplace 方程的解. 这告诉我们 ∂I 本身应该具有某些附加的性质,∂I 称为"自由边界". 特别是与两个自变量有关的这方面的论题,将在第五章中讨论. 例如,在该章中证明了,若 Ω 是凸的,ψ 是解析的且严格凹的,则 ∂I 是一条解析 Jordan 曲线.

任意维的更一般的自由边界问题在第六章中分析. 其中我们介绍了速端曲线变换,或部分速端曲线变换,它能直化自由边界,代价是要研究更强的非线性的方程. 但是,对于某些问题这一理

论仍是不够用的．实际上，求解例 4 时，我们要研究的椭圆型方程组，其未知量就是定义在自由边界的两侧的．我们描述这一情况的同时介绍具有强制边界条件的椭圆型方程及方程组的理论．可在这一框架下研究的许多课题中有等离子体箍缩和共用 Cauchy 数据在已知超曲面上的椭圆型方程．

本书的其余部分(第七和第八章)用来介绍变分不等方程在工程和物理问题中的应用，包括轴承的润滑，液体在多孔介质中的渗流以及液体通过已知侧面的绕流．渗流也是以三维形式加以研究的，这样就为高维自由边界的分析提供了基础． 第八章讨论 Stefan 问题．

我们经常要参考偏微分方程以及分析的其它领域的结果．我们认为宜于包含在本书正文中的这方面的内容已列入目录之中了．它们由第二章的第 4 节及附录，第四章的附录，第六章的第 3 节以及其它章节组成．另一方面，我们相信某些事实对即使不是专门研究微分方程的读者也是容易接受的．凡此种种我们仅仅作为已知结果引用或是不加证明地进行叙述．它们包括经典的最大值原理． Hopf 边界点引理以及 Calderon-Zygmund 不等式等等，参考文献中适合这类材料的有 Courant 与 Hilbert[1]（《数学物理方法》卷 II)以及 Bers 等[1](《偏微分方程》)．更进一步的论述可以在参考文献中所列的 Morrey[1] 以及 Lions 与 Magenes [1] 的书中找到．特别是当我们需要椭圆型正则性理论的结果时，这种专著与文献是有益的．遗憾的是，我们未能给出这方面材料的一个完备的说明．

我们不要求读者具有变分不等方程的任何预备知识．这里提一下近几年发表的一些论文和书，读者由此可以得到一些有关的或历史的情况： Baiocchi [2,3,4]，Baiocchi 与 Capelo[1]，Brezis[1,3]，Kinderlehrer[5]，Lions[1]，Lions 与 Duvaut[1]，Magenes[1] 以及 Stampacchia[3,4,5]．在参考文献中尚有许多其它著作．

我们的经验是，一学期的课程可以第一、二章，第三章的第一

部分以及第四章的第一部分为基础. 我们认为加入第二章的第一个附录是有益的. 作为具有界可测系数的椭圆型方程的初步课程时应包括第二章的附录 B, C 与 D. 如果兴趣是在自由边界问题上，则补充材料可取自第五与六章；若主要强调的是应用，则可取自第七章.

第一章　$\mathbf{R}^N$ 中的变分不等方程

1. 不动点

许多非线性分析的问题可以通过不动点定理来解决. 设 F 是集合 A 到自身的一个映射:

$$F:\ A\to A.$$

若

$$F(x)=x,$$

则点 $x\in A$ 称为 F 的不动点. 换言之, F 的不动点就是方程 $F(x)=x$ 的解. 不动点的一个重要定理称为压缩映射定理, 它是 Picard 逐次逼近法的抽象形式.

设 S 是具有度量或距离函数 d 的度量空间.

定义 1.1. 映射 $F:\ S\to S$ 是压缩映射, 若

$$d(F(x),F(y))\leqslant \alpha d(x,y),\quad x,y\in S, \tag{1.1}$$

对满足 $0\leqslant\alpha<1$ 的某个 α 成立. 当 $\alpha=1$ 时, 映射 F 称为**非扩张的**.

我们再叙述压缩映射定理.

定理 1.2. 设 S 是完备度量空间, 又设 $F:S\to S$ 是压缩映射, 则 F 存在唯一的不动点.

注意, 若 F 是非扩张的, 则这个定理一般是不正确的. 例如线性空间到自身的一个平移就没有不动点.

另一重要定理是 Brouwer 定理, 此定理有很多与数学的诸分支相关的证明, 但定理的叙述却很简单. 我们用 $\mathbf{R}^N$ 记维数 $N\geqslant 1$ 的(实) Euclid 空间.

定理 1.3 (Brouwer). 设 $\Sigma\subset\mathbf{R}^N$ 是一个闭球, 设 $F:\ \Sigma\to\Sigma$ 是连续映射, 则 F 至少有一个不动点.

这两个定理的证明可以在许多书中找到 (参看 Massey[1]).

我们指出，在 Brouwer 定理中，球 Σ 可用 $\mathbf{R}^N$ 的紧凸子集来代替。下节的内容之一就是作这种扩张。

2. 凸集上投影的特征

在这一节中我们考虑实 Hilbert 空间 H 在凸集上的投影，今后它将对我们是很有用的。在 H 是有限维时的证明与 $\mathbf{R}^N$ 的情况相同。读者不妨将 H 看成 $\mathbf{R}^N$。

引理 2.1. 设 K 是 Hilbert 空间 H 的闭凸集，则对每一 $x \in H$，存在唯一的 $y \in \mathbf{K}$ 使得

$$\|x-y\| = \inf_{\eta \in \mathbf{K}} \|x-\eta\|. \tag{2.1}$$

注记 2.2. 满足(2.1)的点 y 称为 x 在 K 上的投影，并记之为

$$y = \mathrm{Pr}_{\mathbf{K}} x.$$

注意，对一切 $x \in \mathbf{K}$，$\mathrm{Pr}_{\mathbf{K}} x = x$ 成立。

引理的证明. 设 $\eta_k \in \mathbf{K}$ 是极小化序列，即

$$\lim_{k\to\infty} \|\eta_k - x\| = d = \inf_{\eta\in\mathbf{K}} \|\eta - x\|. \tag{2.2}$$

由作为 H 上内积存在性的推论的平行四边形法则，

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in H,$$

我们算得

$$\begin{aligned}\|\eta_k - \eta_h\|^2 = 2\|x-\eta_k\|^2 + 2\|x-\eta_h\|^2 \\ - 4\left\|x - \frac{1}{2}(\eta_k+\eta_h)\right\|^2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

现在 K 是凸的，因此 $\frac{1}{2}(\eta_k+\eta_h) \in \mathbf{K}$ 且

$$d^2 \leqslant \left\|x - \frac{1}{2}(\eta_k+\eta_h)\right\|^2.$$

于是

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 \leqslant 2\|x-\eta_k\|^2 + 2\|x-\eta_h\|^2 - 4d^2,$$

从(2.2)我们断定

$$\lim_{h,k\to\infty} \|\eta_k - \eta_h\| = 0.$$