数学分析方法论

翟连林　姚正安　著

北京农业大学出版社

（京）新登字164号

内 容 提 要

本书探讨了数学分析中的各种证明和计算方法，重点研究了分析中整体与部分、内部与边界等问题，详细叙述了分段、迭代、构作辅助函数、放大与缩小、插项与恒等变形等分析中的方法与技巧，同时也考察了离散与连续、无限与有限间的联系和互化．书中选配了典型练习题，并给出了提示或解答．全书内容丰富，问题新颖，技巧性强，其中不仅有作者多年来的教学心得和科研体会，而且涉猎了分析中各种典型例题和方法，指出了各问题的实质所在，并做了加深和拓广．

本书供理工科大学高年级学生阅读，对于报考研究生的学生有指导作用，本书亦可供高等学校数学教师参考．

数学分析方法论

翟连林　姚正安　著

*

北京农业大学出版社出版

（北京圆明园西路2号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

河北省新城县劳动服务公司印刷厂印刷

*

787×1096毫米　32开本　14.4375印张　320千字

1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷

印数1-1700册　　定价：6.75元

ISBN 7-81002-169-9/O·170

前　言

我们在长期从事分析学的基础理论研究和分析学的教学中，深深地体会到数学分析中的整体与局部的相互转化、分段中的化整为零、递归与迭代、内部与边界的相互关系、构造辅助函数、插项与恒等变形、不等式的放大与缩小等数学思想是分析学的精髓，它不仅是从事分析学基础理论研究必备的基本功，而且对于教学中阐明分析学的精神实质和培养学生的能力起着突出的作用。

我们曾在数学分析教学中有意识、有计划、明确地将前述数学思想组织在相应的教学内容中，并获得了良好的教学效果，学生的证题能力有显著的提高.在用于指导学生参加省级大学生数学竞赛中，总体参赛学生名列前茅，在指导研究生的入学考试中收到了很好的效果。由于效果显著，广大师生和关心我们的同志都希望把上述教学体会和科研成果写一本书，以便于更多的人阅读和学习。

在写作本书的过程中，为了使内容深入浅出便于阅读，我们采取了题型式的专题写法。这些专题既相互独立又融为一体。由于本书的内容涉及到数学分析的主要（当然不是全部）的方法与技巧，我们特取名为《数学分析方法论》。由于时间仓促，错误之处在所难免，望广大读者批评指正。

在本书的写作过程中得到了谭鼐教授的指导和热情帮助。谭鼐教授并为此书作了校订工作，在此表示衷心感谢。

翟连林　姚正安　1992年5月于北京

目　　录

第一讲　整体与部分

数学分析的概念常常是由局部到整体然后再从整体回到局部（如区间上函数的连续、可微性等），所以在数学分析的证明和计算中常常是将整体问题分成几个部分问题来分别进行证明和计算，本讲着重探讨这方面的证明方法。

§1.1　子序列问题

在数列的收敛与发散中常常用子序列的敛散性来进行讨论，也就是用部分序列的性质来探讨整体序列的性质。

问题1.1.1　数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$收敛到同一极限。

【分析】此问题实际上是探讨整体序列$\{x_n\}$与两个部分序列$\{x_{2n}\}$、$\{x_{2n+1}\}$之间的收敛关系。

【证明】必要性　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，则对任给$\varepsilon>0$，找得到正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-x|<\varepsilon$。此时对$2N$，当$2n>2N$时亦有$|x_{2n}-x|<\varepsilon$，亦即$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=x$。同理可证$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=x$。

充分性　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=x$，则对任给$\varepsilon>0$，找得到正整数$N_1$，当$n>N_1$时，有

$$|x_{2n}-x|<\varepsilon \qquad ①$$

同时可找到正整数N_2，当$n>N_2$时，有

$$|x_{2n+1}-x|<\varepsilon \qquad ②$$

从而取$N=\max\{2N_1,\ 2N_2+1\}$，当$n>N$时，n为偶数，则满足①，n为奇数，则满足②，即当$n\geq N$时，有$|x_n-x|<\varepsilon$，亦即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。

问题1.1.2　设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$且$u_n$满足：

（1）$u_1\geq u_2\geq u_3\geq u_4\geq\cdots\geq u_k\geq u_{k+1}\geq\cdots$；

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$。

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

【分析】此即著名的莱布尼兹（Leibniz）交错级数判别法。我们用单调有界数列必有极限，再用问题1.1.1来证明它。

【证明】先证$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$存在。由$u_{2n+1}-u_{2n+2}\geq 0$，得

$$x_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$
$$\leq(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})+(u_{2n+1}-u_{2n+2})=x_{2n+2},$$

即x_{2n}是单调上升数列。

又　$x_{2n}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots+(u_{2n-2}-u_{2n-1})+u_{2n}]$,

由$\{u_k\}$单调下降和$\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$，知$\{u_k\}$是非负序列（不然从某项开始$u_k<0$，当$k>k_0$时，$u_k<u_{k_0}$，则$\lim\limits_{k\to\infty} u_k\leq u_{k_0}<0$）。

再由$\{u_k\}$单调下降，$u_2-u_3\geq 0$，$u_4-u_5\geq 0$，…，$u_{2n-2}-u_{2n-1}\geq 0$及$u_{2n}\geq 0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$存在。

下证$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$存在。由$x_{2n+1}=x_{2n}+u_{2n+1}$，从而由数列极限的运算法则，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}$。而

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，由问题1.1.1知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=0$，从而

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$. 再由问题1.1.1知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

注意：一般的教科书上都注明$u_n\geqslant 0$.其实从$\{u_n\}$单调下降和$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，可推得出$\{u_n\}$是非负数列。此外我们假定$\{u_n\}$单调上升，且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，问题1.1.2依然正确，这些留给读者思考。

问题1.1.3 设 $x_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n}\right]$ $(n=1,2\cdots)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其值。

【证明】

$$x_{2n}=\left(-\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n}\right)+\cdots+\left(-\frac{2n-1}{2n}+\frac{2n}{2n}\right)$$

$$=\frac{2(1+\cdots n)}{2n}-\frac{1+3+\cdots+2n-1}{2n}$$

$$=\frac{n(n+1)-n^2}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

$$x_{2n+1}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{2n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}\right)+\frac{2n+1}{2n+1}$$

$$=\frac{1+\cdots+2n-1}{2n+1}-\frac{2(1+2+\cdots+n)}{2n+1}+\frac{2n+1}{2n+1}$$

$$=\frac{n^2-n(n+1)+2n+1}{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty).$$

由问题1.1.1和以上推导知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

问题1.1.4 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在。

【证明1】（反证） 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+2)=\lim_{n\to\infty}\sin n,$$

由此 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=0,$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1)=0$，而$\sin 1\neq 0$

所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0.$

另一方面由问题1.1.1，知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n,$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=2\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0,$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$，这与$\sin^2 n+\cos^2 n=1$矛盾。

【证明2】（反证） 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=A$，则由问题1.1.1,得

$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=\lim_{n\to\infty}\sin(2n+1)=A,$$

但因 $\sin(2n+1)=\cos 1\sin 2n+\sin 1\cos 2n,$

$\sin(2n+2)=\cos 1\sin(2n+1)+\sin 1\cos(2n+1),$

则由$\sin 1\neq 0$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)=\dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}A,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}A.$

另外 $\cos(2n+1)-\cos(2n-1)=-2\sin 1\sin 2n.$

取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=0$，从而得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0=A$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\dfrac{1-\cos 1}{\sin 1}\cdot 0=0$，同样由$\cos^2 n+\sin^2 n=1$矛盾。

下面我们来探讨比问题1.1.1更一般的整体与部分数列问题。

问题1.1.5 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\{x_n\}$的任意真子

序列$\{x_{n_k}\}$收敛。

【分析】 这里讨论的部分数列是任给的真子列$\{x_{n_k}\}$，这样的真子列有无穷多个。

【证明】 必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一真子列，则$\{n_k\}$是自然数集中严格单调上升的一个数列，且$\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$，对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n>N$时，有

$$|x_n-x|<\varepsilon \tag{1}$$

由$\{n_k\}$单调趋于无穷，则存在k_0使得$n_{k_0}>N$，从而当$k>k_0$时，$n_k>N$。满足①，即

$$|x_{n_k}-x|<\varepsilon,$$

由此$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x$。

充分性 所谓真子列是指下标集$N-\{n_k\}$是无穷集，则称$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的真子列，假定对所有的真子列$\{x_{n_k}\}$收敛，下证$\{x_n\}$收敛。

显然，$\{x_{2n}\}$、$\{x_{2n+1}\}$皆为$\{x_n\}$的真子列，则此二真子列皆收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=B$。下证$A=B$。

$\{x_{4n}\}$是$\{x_{2n}\}$的真子列，$\{x_{4n+1}\}$是$\{x_{2n+1}\}$的真子列。由必要性之证有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+1}=B$。取$\{x_{n_k}\}\subseteq\{x_n\}$，

且 $n_k=4\left[\dfrac{k+1}{2}\right]+\dfrac{1+(-1)^k}{2}$，$k=1,2,\cdots$（$[x]$ 记x的整数部分），则$\{n_k\}=\{4n\}\cup\{4n+1\}$，$N-\{n_k\}$ 为无穷集。由此$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的一个真子列，于是有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$存在有限。又

（1）$\{n_{2k}\}=\{4k\}$，得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_{2k}}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n}=A$；

（2）$\{n_{2k+1}\}=\{4k+1\}$，得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_{2k+1}}=$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+1}=$ [illegible]

综合（1）、（2）有$A=B$。由问题1.1.1知$\{x_n\}$收敛。

注意：这里充分性的证明是构造性的，而且这里须注意的是整体序列$\{x_n\}$变动的是下标n，而部分序列变动的是$\{x_{n_k}\}$中$\{n_k\}$的k，应该说是下标的下标，前者表示x_n在$\{x_n\}$中排在第n位，后者表示$\{x_{n_k}\}$中x_{n_k}排在第k位，而x_{n_k}在原序列中排在第n_k位。

问题1.1.6 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$。

【分析】如果用定义来证则很显然，我们化成两个部分数列分项证明。

【证明1】如果$x_n\geqslant 0$，按下标的大小归于子序列$\{x_{n'_k}\}$，如果$x_n<0$，按下标的大小归于子序列$\{x_{n_r}\}$，则若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，从而$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k}=0$，$\lim\limits_{r\to\infty} x_{n_r}=0$。当然$\lim\limits_{r\to\infty}(-x_{n_r})=0$，即

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k}=\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n'_k}|=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}(-x_{n_r})=\lim\limits_{r\to\infty}|x_{n_r}|=0$，

用问题1.1.1的证明方法可得$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$。反之，若

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k}=\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n'_k}|=0$，$\lim\limits_{r\to\infty} x_{n_r}=$

$-\lim\limits_{r\to\infty}(-x_{n_r})=-\lim\limits_{r\to\infty}|x_{n_r}|=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

【证明2】若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，

当$n>N$时，$|x_n-0|=||x_n|-0|<\varepsilon$，

亦即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$。

反之，若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-0|=||x_n|-0|<\varepsilon$，亦即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

问题1.1.7 若数l是数列$\{x_n\}$的一个聚点，则有$\{x_n\}$的

子序列$\{x_{n_k}\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=l$，反之亦真。

【分析】 要证明本问题先得弄清聚点的概念，然后来"抽取"子序列。

【证明】 由l是$\{x_n\}$的一个聚点，从而对任给的$\varepsilon>0$，区间$(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$中有$\{x_n\}$的无穷多项（$x_n$可重复地取某一个数）。下面是子序列的"抽取"法。

对$\varepsilon=1$，在$(l-1,\ l+1)$中任取一个$\{x_n\}$的项作为x_{n_1}，对$\varepsilon=\frac{1}{2}$，在$\left(l-\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)$中有$\{x_n\}-\{x_1,$

$x_2,\cdots x_{n_1}\}$的无穷多项，任取一个作为$x_{n_2},\cdots$，对$\varepsilon=\frac{1}{k}$，在

$\left(l-\frac{1}{k},\ l+\frac{1}{k}\right)$中有$\{x_n\}-\{x_1,\ x_2,\ \cdots x_{n_{k-1}}\}$的无穷多项，任取其中一个作为$x_{n_k}$，这样由归纳法我们可取$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，由取法可知$\{n_k\}$是严格单调的自然数列。

以下证明$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=l$，对任给的$\varepsilon>0$，总有$k_0$，

使得$\frac{1}{k_0}<\varepsilon$，从而当$k>k_0$时

$$|x_{n_k}-l|<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\varepsilon,$$

亦即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=l$。反之显然。

问题1.1.8　设L是数列$\{x_n\}$的上极限，则可选取$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=L$，同样可抽取子序列$\{x_{n_r}\}\subset\{x_n\}$，使$\lim\limits_{r\to\infty} x_{n_r}=l$，$l$是$\{x_n\}$的下极限（这里$L$、$l$可取无穷值）。

【分析】 注意到$L=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$即可。

【证明】 先设L有限，我们仅须证L是$\{x_n\}$的一个聚点。

(一)

对任给的$\varepsilon>0$，由$L=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$，从而找得到$k_0$，使得当$k>k_0$时，

$$\left|\sup_{n\geqslant k}\{x_n\}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

由此有$n_1\geqslant k_0$，使

$$\left|x_{n_1}-\sup_{n\geqslant k_0}\{x_n\}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

于是 $|x_{n_1}-L|\leqslant|x_{n_1}-\sup\limits_{n\geqslant k_0}\{x_n\}|+|\sup\limits_{n\geqslant k_0}\{x_n\}-L|<\varepsilon$.

同样由 $\left|\sup\limits_{n\geqslant n_1+1}\{x_n\}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，可找到$n_2>n_1$，使得

$|x_{n_2}-L|<\varepsilon$.用归纳法可找到$\{x_{n_k}\}$，对所有的k，使$|x_{n_k}-L|<\varepsilon$，而$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的无穷多项全落在$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$之间，于是$L$是$\{x_n\}$的一个聚点。

下设$L=+\infty$，则对一切的k皆有$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}=+\infty$（否则由$\sup\limits_{n\geqslant k_0}\{x_n\}<+\infty$，则当$k>k_0$时，$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}=\sup\{x_k, x_{k+1},\cdots\}\leqslant\sup\{x_{k_0},\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots\}<+\infty$，从而$L<+\infty$），由$\sup\limits_{n\geqslant 1}\{x_n\}=+\infty$，从而有$n_1$，使得$x_{n_1}\geqslant 1$.由$\sup\limits_{n\geqslant n_1+1}\{x_n\}=+\infty$，从而有$n_2>n_1$，使得$x_{n_2}\geqslant 2\cdots$，由归纳法可从

$\sup\limits_{n\geqslant n_{k-1}+1}\{x_n\}=+\infty$，找得到$x_{n_k}>k(n_k>n_{k-1})$.这样$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$.另外对下极限$l$，有$-l=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant k}(-x_n)$，所以$-l$是$\{-x_n\}$的聚点，从而下极限$l$是$\{x_n\}$的聚点。

问题1.1.9 数列$\{x_n\}$的上极限是$\{x_n\}$的最大聚点，下极限则是最小聚点。$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在的充要条件是$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\liminf\limits_{n\to\infty\,k\geqslant n}\{x_k\}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$且为有限值。

【分析】有了问题1.1.8及其证明，问题1.1.9可以很快地解决，我们采用反证法。

【证明】先证上极限是最大聚点（反证）．若不然，另有$x_0>$上极限L，x_0是$\{x_n\}$的聚点。则有$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，从而对 $\varepsilon=\dfrac{x_0-L}{2}$，当$k\geqslant k_0$时，有

$$|x_{n_k}-x_0|<\varepsilon=\frac{x_0-L}{2}, \quad -\varepsilon=\frac{L-x_0}{2}<x_{n_k}-x_0<\varepsilon,$$

即 $\dfrac{L+x_0}{2}<x_{n_k}$。注意 $\sup\limits_{n\geqslant n_k}\{x_n\}\geqslant x_{n_k}>\dfrac{L+x_0}{2}$，

所以对一切的r总有$n_k\geqslant r$，于是

$$\sup_{n\geqslant r}\{x_n\}\geqslant\sup_{n\geqslant n_k}\{x_n\}\geqslant x_{n_k}>\frac{L+x_0}{2},$$

对r取极限，得 $L\geqslant\dfrac{L+x_0}{2}>L$，矛盾。

同理可证下极限l是最小聚点。

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则$\{x_n\}$的任何子列都收敛同一极限（收敛到同一极限的证法留给读者），由问题1.1.8，有$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$和$\{x_{n_r}\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=L$(上极限)，$\lim\limits_{r\to\infty}x_{n_r}=l$（下极限），从而$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{r\to\infty}x_{n_r}$，即$L=l$。

反之，若$L=l$，则对任给$\varepsilon>0$，存在N_1，当$n>N_1$时，有

$$\left|\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}-L\right|<\varepsilon \qquad ①$$

同时存在N_2，当$n>N_2$时，有

$$\left|\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}-L\right|<\varepsilon \qquad ②$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，由①、②，得

$$L-\varepsilon<\inf_{k\geqslant n}\{x_k\}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}<L+\varepsilon \qquad ③$$

注意 $\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}\leqslant x_n\leqslant\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$，代入③式，得 当$n>N$时，有

$$L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon,\text{亦即}\lim_{n\to\infty}x_n=L.$$

在涉及到上、下极限的证明中必须注意的是 $\{y_n\}=\{\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}\}$是单调下降的 数列，$\{z_n\}=\{\inf\limits_{k\geqslant n}\{x_n\}\}$是单调上升的数列。

问题1.1.10 设$\{x_n\}$满足条 件$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n+a$（$a$为常数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$存在。

【分析】 利用问题1.1.9的结论，仅须证上、下极 限 有限并且相等。

【问题】 由于$0\leqslant x_n\leqslant nx_1+(n-1)a$，则

$$0\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant x_1+\frac{n-1}{n}a<x_1+|a|,$$

数列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$有界，从而如果设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}=L$，则$0\leqslant L\leqslant x_1+|a|$，

即上极限有限．先对任给的整数m，自 然 数n，可 表 为$n=km+r(0\leqslant r<m)$。则

$$x_n\leqslant x_{km}+x_r+a\leqslant kx_m+x_r+ka,$$

于是
$$0\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{kx_m}{km+r}+\frac{x_r}{km+r}+\frac{ka}{km+r}$$

$$=\frac{km}{km+r}\cdot\frac{x_m}{m}+\frac{x_r}{km+r}+\frac{ka}{km+r}.$$

两边对n取极限，左边取上极限，注意 $n\to\infty$时，$k\to\infty$，因此

$$0\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{x_m}{m}+\frac{a}{m}.$$

再对上式取极限，令$m\to\infty$，右边取下极限，得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\frac{x_m}{m}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}.$$

在问题1.1.10的证明中用到了两个事实：若$x_n\leqslant y_n$则（i）$\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n$；（ii）$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}y_n$，这里留给读者证明．另外我们有$\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n$，所以我们若要证明$\varliminf_{n\to\infty}x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n$，仅须证明$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n$即可．

问题1.1.11 任何有界数列必有收敛的子数列（致密性定理）．

【分析】 用问题1.1.8仅须证数列的上极限存在并有限．

【证明】 设$\{x_n\}$是一个有界数列，且设$y_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$，则由此可知

$$\begin{aligned}y_n=\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}&=\sup\{x_n,\ x_{n+1},\ \cdots x_{n+i},\ \cdots\}\\&\geqslant\sup\{x_{n+1},\ x_{n+2},\cdots,x_{n+i},\cdots\}\\&=\sup_{k\geqslant n+1}\{x_k\}=y_{n+1}.\end{aligned}$$

即$\{y_n\}$是一个单调下降的数列，由$\{x_n\}$有界，则存在正数M，$|x_n|\leqslant M$，从而$|y_n|\leqslant M$．由单调有界收敛原理知$L=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在．

下面我们介绍在分析理论中很重要的对角线法则．

问题1.1.12 设$\{f_n(x)\}$是定义在自然数集N上的有界函数列，则可在$\{f_n(x)\}$中选取子函数列$\{f_{n_k}(x)\}$在自然数集N上收敛，即对任给的$r\in N$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(r)$存在．

【分析】 利用问题1.1.11想办法抽取子序列．

【证明】 由问题所设，存在正数M，对一切的$x\in N$，有$|f_n(x)|\leqslant M$．从而

(1) $|f_n(1)|\leqslant M \quad n=1,2,\cdots$.

所以可选取子序列$\{f_{n_k}(1)\}\subseteq\{f_n(1)\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(1)$存在。为方便起见，记$\{f_{n_k}(x)\}$为$\{f_n^{(1)}(x)\}$，我们有$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(1)}(1)$存在，且显然有$f_1^{(1)}(x)$可为$f_1(x)$或后面的函数。

(2) 由$|f_n^{(1)}(2)|\leqslant M$，所以我们可选取$\{f_n^{(1)}(x)\}$的子序列$\{f_n^{(2)}(x)\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(2)}(2)$存在。且显然$f_2^{(2)}(x)$在原函数列中排在$f_1^{(1)}(x)$之后。

…………………………………………………………

(k) 由$|f_n^{(k-1)}(k)|\leqslant M$，我们可选取$\{f_n^{(k-1)}(x)\}$的子序列$\{f_n^{(k)}(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(k)$存在，且显然在原函数列中$f_k^{(k)}(x)$排在$f_{k-1}^{(k-1)}(x)$之后。

我们如此排下来：

$$
\begin{array}{l}
f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ f_3^{(1)}(x),\cdots f_n^{(1)}(x)\cdots \\
f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ f_3^{(2)}(x),\ \cdots f_n^{(2)}(x)\cdots \\
f_1^{(3)}(x),\ f_2^{(3)}(x),\ f_3^{(3)}(x),\ \cdots f_n^{(3)}(x)\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_1^{(n)}(x),\ f_2^{(n)}(x),\ f_3^{(n)}(x)\cdots f_n^{(n)}(x)\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

取对角线，则$\{f_n^{(n)}(x)\}$即为所求的子序列。下证对任给的$k\in N$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(n)}(k)$存在。这由在所取子序列中除有限项$f_1^{(1)}(x),\cdots,f_{k-1}^{(k-1)}(x)$可能不在$\{f_n^{(k)}(x)\}$中，$\{f_n^{(n)}(x)\}_{n\geqslant k}\subseteq\{f_n^{(k)}(x)\}$，而$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(k)$存在，从而$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(n)}(k)$存在。

问题1.1.13 如果数列$\{x_n\}$中的任何子列$\{x_{n_k}\}$满足条