错在哪里？

——初等数学错解分析

张鸿顺 著

CUO ZAI NA LI

科学技术文献出版社

序　言

在实际生活中，谁都明白，仅仅会使用电视机或录音机，还不能说已经掌握了它们．但是，当机器出了故障，如果不仅能找出故障的所在，而且还能自己动手予以排除，那么就可以说已经很好地掌握了它们．

对于数学知识来说也一样，如果只能按照课本的例题作一些练习，并不敢说已经掌握了这部分数学知识．但是，不仅能作题，还能判断怎样作是正确的，怎样作是错误的，并能自己动手改正错误的作法，那么就可以说已经很好地掌握了这部分知识

根据这种看法，在教学的过程中，除了给学生以正面的例题之外，提出一些错误的命题，让学生讨论、辨别，不仅可以进一步帮助学生理解所学的知识，而且还能发现学生在知识上存在的漏洞，以便能及时地予以修补．多年的经验还告诉我，这种方法能更有效地激发学生学习的积极性，能更扎实地提高学生的数学水平．为此，编写了《错在哪里？》这本小册子，供师生参考．

这本小册子共选了22个命题（实际将近50个）的错误解法，有的是大家熟知的，有的是近几年高考试卷中反映出来的问题，有的是多年教学中遇到过的一些问题．它们涉及的内容有初中代数、初中几何，高中的立体几何、解析几何、三角、复数、排列、数学归纳法、极限等等．

小册子的写法是对绝大部分命题，先给出错误的解法，然后再对错误进行分析，指明犯错误的原因，并对某些问题，加以引伸．根据编写本书的目的，希望读者先只看错误的解法，

内 容 简 介

本书内容包括初中代数、几何、高中立体几何、解析几何、三角、复数、排列、数学归纳法、极限等方面的近50个命题的错误解法。这些都是在教学和学生做题中经常出现的错误，有的是历届高考中出现的问题。

本书先对每个命题给出错误的解法，再分析错误的原因，指出错误的关键，最后给出正确的答案。

读者对象：中学生，数学教师，数学爱好者，知识青年和广大的青年工人。

错 在 哪 里？

——初等数学错解分析

张 鸿 顺 著

科学技术文献出版社出版

重庆印制第一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　印张：2　字数：44.6千字

1981年8月北京第一版第一次印刷

印数：1—204,720册

科技新书目：9—59

统一书号：13176·126　　定价：0.22元

自己动手予以纠正．如果实在找不出错误的原因，再看下面的分析，这样会收到更好的效果．

对于准备参加高考的学生和知识青年，不妨也试一试，检查一下自己掌握知识的情况，对于进一步巩固已学过的数学知识以及今后的学习是会有所帮助的．

这次是初步尝试，暂选这些命题，可能有不妥之处，欢迎读者提出意见，以便进一步修改．

严士健教授在百忙之中仔细审阅了小册子的初稿；田守拙同志为小册子绘制了插图，这里谨向他们致以诚挚的谢意．

编　者

1980.12.10于北京

目　　录

一、生活中常见的两个错误

问题1 百米赛跑，甲比乙早到5米，甲比丙早到10米，那么乙比丙早到几米？

问题2 今年比去年多10%，那么去年比今年少百分之几？

这是生活中经常遇到的两个问题．对于问题1常有人说成乙比丙早到5米；对于问题2也很容易说成去年比今年少10%．

我们先研究一下问题1．

如果把问题改成甲比乙多5，甲比丙多10，那么乙比丙多5是显然的，也可以由等式推出，即

$$甲=乙+5,$$

$$甲=丙+10,$$

所以

$$乙+5=丙+10,$$

于是 $\quad 乙=丙+5$，即乙比丙多5．

但是问题1并不是问“当甲到达终点时，乙比丙多跑多少米”．如果是这样发问的话，那么根据所给的条件，甲跑100米，乙跑100－5＝95(米)，丙跑100－10＝90(米)，当然乙比丙多跑5米，然而，问题1是问“乙比丙早到几米？”也就是问乙到终点时丙还离终点多少米．根据所给的条件可知丙的速度比乙慢．在乙跑完最后5米所用的时间里，丙肯定跑不了5米，所以在乙到达终点时，丙与终点的距离要大于5米，而不是等于5米．

下面我们具体计算一下．首先要声明：问题1与实际赛跑

不同．在真正的比赛中，由于运动员的体质不同，很可能在最后10米的冲刺中，丙赶上或超过乙，这种情况是无法用数学计算的．因此，问题1的前提是乙与丙都是以原速度前进的．下面我们用比例来解这个问题．

已知乙跑95米时，丙跑90米．设乙跑5米时，丙跑x米．由于在同一时间内，乙和丙所行距离之比等于乙、丙速度之比，所以有

$$\frac{95}{90}=\frac{5}{x}.$$

解之，得

$$x=\frac{90}{19}=4\frac{14}{19}.$$

因此乙比丙早到$10-4\frac{14}{19}=5\frac{5}{19}$米．

下面再研究问题2．

要注意今年比去年多的是一个百分数．对一个百分数来说，首先要看是谁的百分之几，也就是以什么为基数（100%）的百分数．尽管百分数一样，但是由于基数不同，所反映出来的绝对数量是不同的．比如，人口增长1%，对一个100万人口的国家来说，只增加100万人的1%，即增加1万人；而对我国10亿人口来说，就要增加10亿的1%，即1,000万人．同是1%，但却反映了两个相差很大的数量，即1万与1,000万．从这里可以看出，对于同一个百分数来说，基数越大、它的绝对数量就越大．因此，在问题2中，由于今年比去年多10%，显然今年的产量比去年的产量要大，从而以今年产量为基数的10%就要大于以去年产量为基数的10%．所以不能说“今年比去年多10%，去年就比今年少10%”．前者是以去年产量为基数，后者是以今年产量为基数，两者基数不同，所以两者10%的数

值并不相等.

那么，到底去年比今年少百分之几呢？

我们可以这样解决：设去年为a，则今年为$a+a\cdot\frac{10}{100}=\frac{11}{10}a$. 于是所问的问题是$a$相当于$\frac{11}{10}a$的百分之几？按照百分数的求法，应当是

$$a\div\frac{11}{10}a=\frac{10}{11}=\frac{1000}{11}\%=90\frac{10}{11}\%.$$

于是去年比今年少

$$100\%-90\frac{10}{11}\%=9\frac{1}{11}\%\approx 9.1\%$$

二、1＝2？

证明　设 $a>0$，$b>0$，且 $a=b$. 等式两边同乘以a，得

$$a^2=ab.$$

等式两边同减去b^2，得

$$a^2-b^2=ab-b^2.$$

分解因式，得

$$(a+b)(a-b)=b(a-b).$$

等式两边同除以$(a-b)$，得

$$a+b=b.$$

以b代a，得

$$2b=b.$$

等式两边同除以b，得

$$2=1.$$

众所周知 1 与 2 是不相等的，显然，上述的证明过程中肯定是有错误的．如果用同样的方法推证出的结论比较复杂．不能一目了然地判断其错误．岂不是要把错误的结论当做正确的结论了吗！那么、究竟错在什么地方呢？

错误就在等式两边同除以$(a-b)$这一步．既然已知 $a=b$，那么 $a-b=0$，两边同除以 $a-b$ 就是两边用 0 去除．但是，0 不能作除数，因此出现了荒谬的结论．这就提醒我们做除法时，必须检查除数是否为零．

请读者检查下面的问题．

如果 $a>b$，那么 $a=b$．

证明　因为 $a>b$．所以

$$a-b>0. \tag{1}$$

设

$$a=b+c \quad (c\neq 0), \tag{2}$$

(2)式乘$(a-b)$，得

$$a(a-b)=(b+c)(a-b),$$

展开，

$$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc,$$

移项，

$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc,$$

提因式，

$$a(a-b-c)=b(a-b-c),$$

所以

$$a=b.$$

既然 $a>b$，就不可能 $a=b$，因此上述的推证过程肯定有毛病，相信读者一定能找出错误的原因．

三、3＝4？

证明 由 $9-21=-12$，

$16-28=-12$，

可知

$$9-21=16-28.$$

两边同加$\frac{49}{4}$，

$$9-21+\frac{49}{4}=16-28+\frac{49}{4},$$

即

$$3^2-2\cdot3\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=4^2-2\cdot4\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

分解因式，

$$\left(3-\frac{7}{2}\right)^2=\left(4-\frac{7}{2}\right)^2, \tag{1}$$

两边开方，

$$3-\frac{7}{2}=4-\frac{7}{2},$$

两边同加$\frac{7}{2}$，

$$3=4.$$

—

错误就在两边开方这一步．如果找不出错误的原因，说明还没有很好地掌握算术根的概念，也就是对$\sqrt{a^2}$等于什么还不清楚，还需进一步加强学习．我们知道：

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$；

当 $a=0$ 时，$\sqrt{a^2}=0$；

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$.　　　　　　　　　　　　(2)

等式(1)两边开方，左边为

$$\sqrt{\left(3-\frac{7}{2}\right)^2}=3-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}<0.$$

所以，根据(2)式

$$\sqrt{\left(3-\frac{7}{2}\right)^2}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

这样，上述证明过程应改为

$$-\left(3-\frac{7}{2}\right)=4-\frac{7}{2},$$

于是得

$$7=7.$$

这样就推不出 $3=4$ 荒谬的结论来了.

这就提醒我们要特别注意有关算术根的问题，一不留心就会出现错误.

检查下面的问题：

如果 $a<b$，那么 $a=b$.

证明　由 $a<b$ 得

$$b=a+c,\ (c\neq 0)$$

于是

$$c=b-a,\ c^2=(b-a)^2,$$
$$-c=a-b,\ (-c)^2=(a-b)^2.$$

但

$$c^2=(-c)^2,$$

所以

$$(b-a)^2=(a-b)^2,$$

即

$$b-a=a-b,$$

于是

$$2a=2b,$$

$$a=b.$$

四、64＝65？ 169＝168？

把边长为8个单位的正方形 $ABCD$，按图1那样，分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四部分，然后按图2那样拼成长方形 $PQRS$，即使

$\triangle OPT \cong \triangle CDE$,

$\triangle RMN \cong \triangle EFD$.

四边形 $PQMN \cong$ 四边形 $HFAG$,

四边形 $RSOT \cong$ 四边形 $GBEH$.

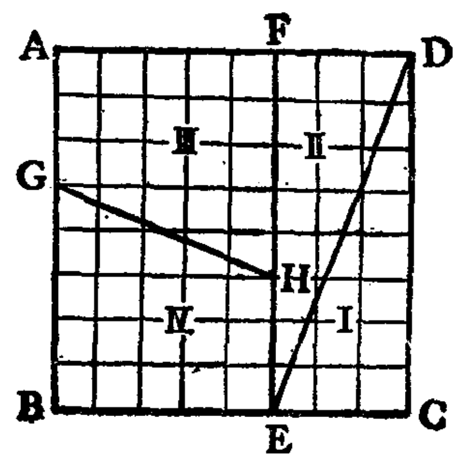

图 1

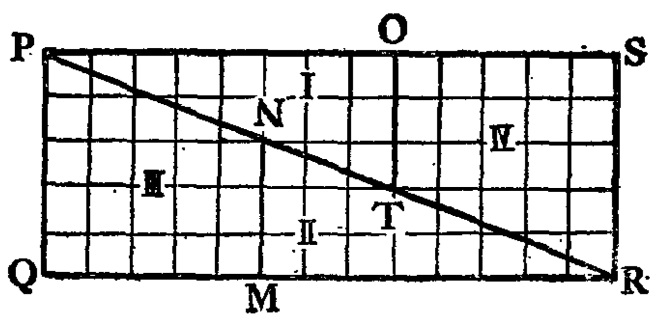

图 2

于是

$$PQ=5,\ QR=8+5=13.$$

所以，长方形 $PQRS$ 的面积为

$$13\times5=65,$$

而正方形 $ABCD$ 的面积为

$$8\times8=64,$$

所以 $$64=65.$$

为什么把正方形 $ABCD$ 拼成长方形 $PQRS$ 时，会多出一个面积单位呢?

我们用同样的方法，把正方形拼成长方形时，还会减少一个面积单位，不信的话，请看下面的问题.

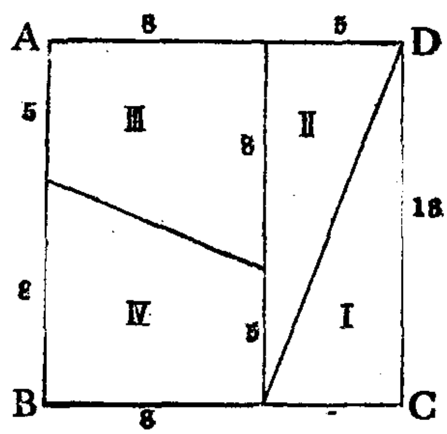

图 3

把边长为13个单位的正方形 $ABCD$ 按图3那样，分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个部分，然后再按图4那样，拼成长方形 $PQRS$. 当然这两个图形的面积应该是相等的. 但是，正方形 $ABCD$ 的面积为 $13\times13=169$（面积单位). 而长方形 $PQRS$ 的面积为

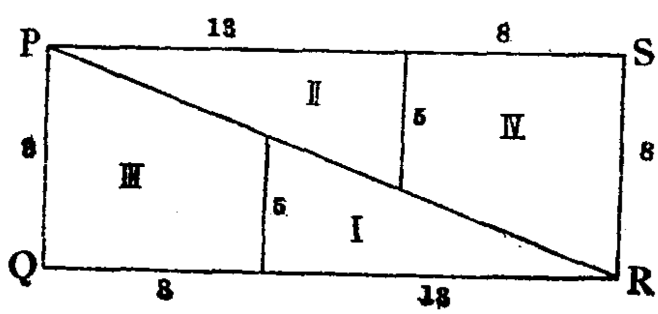

图 4

$$(13+8)\times8=21\times8=168(\text{面积单位})$$

于是得到

$$169=168.$$

所拼成的长方形面积比原来正方形的面积少了一个面积单位.

我们将在七题之后回答这个问题。

五、三角形都等腰?

证明 首先肯定$AB \neq AC$($\because$如果$AB=AC$,就不必证了),设$AB>AC$.如图5,作$\angle A$的平分线与BC的中垂线相交于O点,连BO,CO,过O作AB的垂线OE交AB于E;作AC的垂线OF交AC于F.

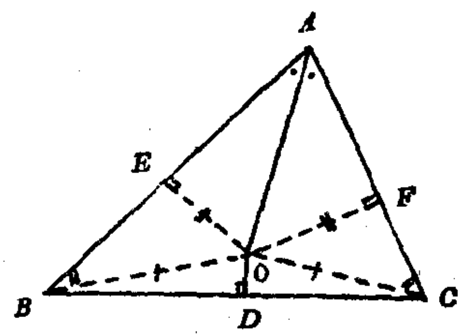

图 5

在$\triangle AOE$与$\triangle AOF$中,因为

$$\angle AEO=\angle AFO(\text{直角}),$$
$$\angle OAE=\angle OAF(\text{已知}),$$
$$AO \text{ 公用}.$$

所以

$$\triangle AOE \cong \triangle AOF,$$

于是

$$OE=OF.$$

在$\triangle EOB$与$\triangle FOC$中

$$\angle BEO=\angle CFO(\text{直角}),$$
$$OE=OF(\text{已证}),$$
$$OB=OC(\text{中垂线性质}),$$

所以

$$\triangle EOB \cong \triangle FOC,$$

于是

$$\angle EBO=\angle FCO.$$

又

$$\angle OBD=\angle OCD(\triangle BOC\text{ 为等腰}),$$

所以

$$\angle EBO+\angle OBD=\angle FCO+\angle OCD(\text{等量相加}),$$

即

$$\angle B=\angle C.$$

因此 $AB=AC$(两底角相等的三角形为等腰).

有的读者可能说怎么能保证$\angle A$的平分线与BC的中垂线相交？我们可以证明，如果不相交就一定重合.

设$\angle A$的平分线AH与BC的中垂线OD不相交，那么$AH\parallel OD$,即AH也垂直于BC(H为垂足)，从而可以证明$\triangle AHB$与$\triangle AHC$全等，于是$BH=CH$，即H与D点重合，也就是AH与OD重合.这时必有$AB=AC$，命题仍旧成立.

有的读者可能说$\angle A$的平分线与BC的中垂线可能相交于$\triangle ABC$的外部.这时我们照样可以证明$AB=AC$.

如图6，由于AO公用，$\angle EAO=\angle FAO$，$\angle AEO$与$\angle AFO$都是直角，可以推得

$$\triangle AOE\cong\triangle AOF,$$

于是

$$OE=OF,$$

又

$$OB=OC,$$

所以

$$\triangle OBE\cong\triangle OCF,$$

于是

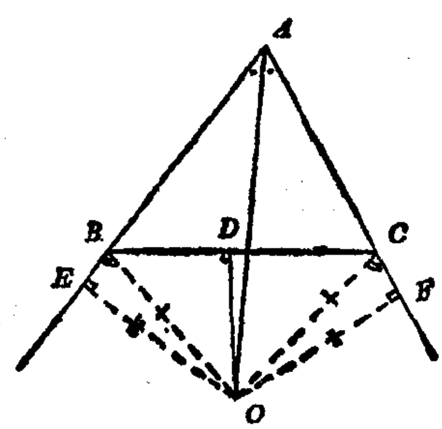

图 6

$$\angle EBO=\angle FCO.$$

而

$$\angle OBC=\angle OCB.$$

所以

$$\angle EBC=\angle FCB\text{(等量相加)},$$

从而

$$\angle ABC=\angle ACB\text{(等角的补角等)}.$$

因此

$$AB=AC.$$

这个问题也留在七题之后回答，

六、一组对边相等的四边形，另一组对边必平行？

证明 如图7，在四边形$ABCD$中，设$AB=CD$，作AD，BC的中垂线相交于O，连OA，OB，OC，OD，则有

$$OA=OD,$$
$$OB=OC,$$

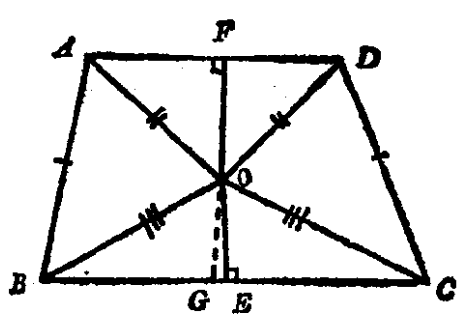

图 7

而

$$AB=CD\text{(已知)},$$

所以

$$\triangle ABO\cong\triangle DCO,$$

于是

$$\angle AOB=\angle DOC,$$

从而