



电磁理论中的 辅助函数

杨儒贵

电磁理论中的辅助函数

杨 儒 贵

高等教育出版社

内 容 简 介

本书从高等学校电磁理论教学中的难点及科研工作的实际需要出发,对各种电磁理论著作中普遍应用的多种辅助函数进行分析、归纳和比较。全书以 Sturm-Liouville 理论作为主线和各种本征展开与积分变换的理论基础。把求解 Helmholtz 方程作为主要研究对象,建立起一套新的结构体系。立题新颖,论述严谨简明,重点突出,条理清楚,文字通顺,颇具特色。全书共九章:1. 基本电磁理论, 2. 位函数, 3. 分离变量法, 4. Sturm-Liouville 理论, 5. 标量波函数, 6. 矢量波函数, 7. Green 函数, 8. 并矢 Green 函数, 9. 波函数及波的变换。书末有 6 个附录。

本书主要供高等学校有关专业的本科生、研究生、教师及科技人员阅读。

(京)112 号

电磁理论中的辅助函数

杨 儒 贵

*

高等教育出版社出

高等教育出版社照排中心照排

新华书店总店北京科技发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 190 000

1992 年 8 月第 1 版 1992 年 8 月第 1 次印刷

印数 0001—1 768

ISBN 7-04-003030-6/TM · 157

定价 4.85 元

前 言

自从全面阐述电磁理论的 Stratton^[1]名著 1941 年问世以来,陆续出版了很多电磁理论著作。在这些著作中,作者定义了多种辅助函数作为数学工具,以简化电磁问题的求解。这些辅助函数是标量位、矢量位、Hertz 位、Debye 位、标量波函数、矢量波函数、 δ 函数、Green 函数以及并矢 Green 函数。应该承认这些辅助函数在求解电磁问题中都发挥了奇妙而有力的作用。但是,由于作者的爱好不尽相同,他们各自选用了不同的辅助函数。例如,Stratton 选用了标量与矢量波函数, Harrington^[7] 选用了标量波函数与 Debye 位,而 Collin^[11]、Tai^[12]、Kong^[23] 及 Van Bladal^[23] 等人大量应用了 Green 函数。在 Chen^[20] 的著作中甚至仅局限于 Green 函数,而且充分发挥其优点,以摆脱坐标系的束缚。一般读者对于作者的偏爱往往并不理解,也不注意分析与比较这些求解方法的特点和利弊。作者认为,求解某类电磁问题,并不需要应用全部的辅助函数,但也不应局限于某种辅助函数,应该针对不同的具体电磁问题,恰当地选择辅助函数。作者通过多年的教学实践与科学研究,认为对于各类辅助函数进行比较与分析是有益的。本书的目的就在于通过对各类辅助函数进行分析、比较,且尽可能寻求它们之间的内在联系,以提高读者分析与求解电磁问题的能力。

全书共分九章。第一章全面综述了最基本的电磁理论,明确指出,电磁理论的主要问题之一是求解波动方程或 Helmholtz 方程。第二章介绍几种位函数,即标量位、矢量位、Hertz 位及 Debye 位。第三章阐述求解齐次标量 Helmholtz 方程的分离变量法,论证变量可分的充要条件。第四章介绍常微分方程的重要理论——Sturm - Liouville 理论,以便为后述的各种本征展开与积

分变换奠定理论基础。第五章介绍齐次标量 Helmholtz 方程的解——标量波函数,以及几种本征展开与积分变换。第六章介绍直接求解齐次矢量 Helmholtz 方程的工具——矢量波函数及其应用。第七章介绍 Dirac- δ 函数与 Green 函数及其应用。第八章介绍并矢 Green 函数及其应用。最后一章介绍各种波函数及波的变换,这些变换关系对于求解电磁边值问题是非常有用的。每章之后的小结既概括了本章的内容,同时也阐述了作者的一些浅见。书末的后记再次阐述了作者撰写本书的指导思想以及一些有益的结论。全书的主要内容围绕 Helmholtz 方程的求解,以 Sturm-Liouville 理论统一了各种本征展开与积分变换。虽然本书仅限于三种常用正交坐标系,但精通这些方法以后,也可推广到其它坐标系。

为了便于读者阅读,书末提供了附录及参考文献。这些附录包括矢量分析、并矢分析、Bessel 函数、修正 Bessel 函数、球 Bessel 函数、Legendre 函数及连带 Legendre 函数。

本书各章之间的有机联系详见下页系统框图,让我们读完此书以后,再来理解这种框图的内涵。

本书采用 SI 单位制,时谐场的时间因子为 $e^{j\omega t}$ 。

本书在撰写过程中,得到了西南交通大学任朗教授、电子科技大学谢处方教授、西安交通大学汪文秉教授及冯慈璋教授等热情指导与鼓励。全书完稿后,又经西安电子科技大学梁昌洪教授仔细审阅,并提出很多宝贵建议,作者在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中错误在所难免,渴望广大读者指正。

作者于西安交通大学

1989 年 1 月

目 录

第一章 基本电磁理论	(1)
1-1 Maxwell 方程	(1)
1-2 媒质的电磁特性	(4)
1-3 边界条件	(6)
1-4 磁荷及磁流	(8)
1-5 Maxwell 方程的求解	(10)
1-6 小结	(13)
第二章 位函数	(14)
2-1 标量电位与矢量磁位	(14)
2-2 标量磁位与矢量电位	(16)
2-3 Lorentz 规范与Coulomb 规范	(18)
2-4 Hertz 位	(20)
2-5 Debye 位	(23)
2-6 小结	(27)
第三章 分离变量法	(30)
3-1 正交曲面坐标系	(30)
3-2 度量系数	(32)
3-3 变量分离的充要条件	(35)
3-4 线性二阶常微分方程的解	(39)
3-5 直角坐标系中的分离变量法	(42)
3-6 圆柱坐标系中的分离变量法	(44)
3-7 圆球坐标系中的分离变量法	(47)
3-8 小结	(53)
第四章 Sturm - Liouville 理论	(55)
4-1 自伴微分方程	(55)
4-2 Hermitian 自伴微分方程	(58)

4-3	自伴微分方程的本征值	(61)
4-4	本征函数的正交性	(62)
4-5	本征函数的完备性	(65)
4-6	小结	(68)
第五章	标量波函数	(70)
5-1	直角坐标系中的标量波函数	(70)
5-2	Fourier 级数与 Fourier 变换	(72)
5-3	圆柱坐标系中的标量波函数	(76)
5-4	Fourier - Bessel 级数和 Fourier - Bessel 变换	(79)
5-5	圆球坐标系中的标量波函数	(83)
5-6	Fourier - Legendre 级数	(86)
5-7	球谐函数	(89)
5-8	Fourier - 球 Bessel 级数和 Fourier - 球 Bessel 变换	(95)
5-9	齐次标量 Helmholtz 方程的本征函数	(97)
5-10	小结	(99)
第六章	矢量波函数	(102)
6-1	矢量波函数的定义	(102)
6-2	直角坐标系中的矢量波函数	(106)
6-3	圆柱坐标系中的矢量波函数	(107)
6-4	圆球坐标系中的矢量波函数	(111)
6-5	矩形金属波导中的电磁波	(114)
6-6	圆柱谐振腔中的电磁波	(118)
6-7	圆球谐振腔中的电磁波	(120)
6-8	小结	(121)
第七章	Green 函数	(122)
7-1	Dirac - delta 函数	(122)
7-2	δ 函数的本征展开和积分表示	(126)
7-3	Green 函数的定义、特性及分类	(131)
7-4	三维全空间 Green 函数	(134)
7-5	二维全空间 Green 函数	(139)
7-6	一维全空间 Green 函数	(143)
7-7	非齐次标量 Helmholtz 方程的积分解	(147)

7-8	半空间Green函数	(150)
7-9	Green函数的本征展开	(153)
7-10	理想导电圆柱对平面波的散射	(154)
7-11	小结	(157)
第八章	并矢 Green 函数	(160)
8-1	并矢定义及运算	(160)
8-2	并矢Green函数的定义、特性及分类	(163)
8-3	全空间并矢Green函数	(165)
8-4	非齐次矢量Helmholtz方程的积分解	(169)
8-5	半空间并矢Green函数	(175)
8-6	并矢 Green 函数的本征展开	(179)
8-7	电并矢和磁并矢Green函数	(184)
8-8	小结	(186)
第九章	波函数及波的变换	(189)
9-1	平面波的圆柱波函数的展开	(189)
9-2	平面波的圆球波函数的展开	(192)
9-3	柱面波的圆球波函数的展开	(195)
9-4	Bessel函数的叠加定理	(197)
9-5	球Bessel函数的叠加定理	(199)
9-6	三维全空间Green函数的积分表示	(202)
9-7	二维全空间Green函数的积分表示	(207)
9-8	一维全空间Green函数的积分表示	(209)
9-9	小结	(211)
后记		(212)
附录一	矢量分析	(214)
附录二	并矢分析	(216)
附录三	Bessel函数	(219)
附录四	修正 Bessel函数	(222)
附录五	球 Bessel函数	(223)
附录六	Legendre函数	(225)
附录七	连带 Legendre函数	(227)
参考文献		(229)

第一章 基本电磁理论

1-1 Maxwell 方程

英国物理学家 J. C. Maxwell (1831 — 1879) 根据已发现的电磁感应现象, 和他本人提出的位移电流的假设, 总结出了下列四个电磁方程式:

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1-1)$$

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1-2)$$

$$\oint_s \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-1-3)$$

$$\oint_s \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1-1-4)$$

式中 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 为磁场强度, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 为电场强度, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 为磁感应强度, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 为电位移, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 为电流密度, $\rho(\mathbf{r}, t)$ 为电荷密度, 这些物理量都是时间及空间函数。通常, 式 (1-1-1) 称为广义安培定律, 式 (1-1-2) 称为电磁感应定律, 式 (1-1-3) 称为磁场高斯定律, 式 (1-1-4) 称为电场高斯定律, 该四式总称为 Maxwell 方程式的积分形式。利用矢量分析中的

Gauss 定理及 Stokes 定理，由此积分形式可分别导出 Maxwell 方程的微分形式如下：

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1-1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1-1-8)$$

值得指出，上述方程式中的电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 通常应包括三种电流，即 $\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v$ ，这里 $\mathbf{J}'$ 为产生电磁场的源， $\mathbf{J}_c$ 为媒质中的传导电流， $\mathbf{J}_v$ 为媒质中存在的运流电流或称为徙动电流。

Maxwell 方程的积分形式应理解为实验结果，它们在场量不连续区域仍然成立，但微分形式只能适用于场量连续的区域。

实验结果还表明，时变电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 与时变电荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 之间满足下列方程

$$\oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1-1-9)$$

该等式称为电荷守恒定律。利用 Gauss 定理，可由上式导出电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-1-10)$$

值得讨论的是，由式 (1-1-5) 至式 (1-1-8) 及式 (1-1-10) 组成的五个方程，它们并不是完全独立的。显然，对式 (1-1-5) 两边取散度，利用式 (1-1-10) 可求得式 (1-1-8)。此外，由式 (1-1-6) 亦可导出式 (1-1-7)。为此，对式 (1-1-6) 两边取散度，得

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0$$

此式表明，磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 的散度与时间无关，即 $\nabla \cdot \mathbf{B} =$ 常数，但此常数一定为零，否则，这就意味着有磁荷存在，这是不符合事实的。自然界中至今尚未发现真实的磁荷存在。这样，即导出式 (1-1-7)。由此可见，这五个方程中只有三个是独立的。我们可以选择式 (1-1-5)、式 (1-1-6) 及式 (1-1-10) 作为基本方程，亦可取式 (1-1-7)、式 (1-1-8) 及式 (1-1-10) 作为基本方程。

此外，已知空间一个矢量可用三个标量表示，可见上述五个方程中共包含 16 个未知标量，由于只有其中三个方程是独立的，而该三个基本方程中只代表 7 个标量方程，因此，这三个基本矢量方程是非限定的，它们不足以求解全部 16 个未知标量。为了求解全部电磁场分量，必须补充下列三个方程：

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1-1-11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1-1-12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}' + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1-1-13)$$

这里外源 $\mathbf{J}'$ 通常是已知的，运流电流被略去。上述方程中， ε 为介电常数， μ 为磁导率， σ 为电导率。这三个矢量方程代表九个标量方程，再加上前述三个基本方程代表的七个标量方程，共计可建立十六个标量方程，从而足以求解全部电磁场分量。式 (1-1-11)，式 (1-1-12) 及式 (1-1-13) 通常又称为媒质特性方程或结构方程。

对于随着时间按正弦函数变化的正弦电磁场 (又称时谐电磁场)，由于场源与各场量的频率相同，可以采用复量表示这种正弦场，即忽略时间因子 $e^{j\omega t}$ ，而仅需计及场源和场量的振幅及相位，本书以 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 及 $\rho(\mathbf{r})$ 分别表示各自复量的有效值。这样，上述 Maxwell 方程、电荷守恒定律及媒质特性方程的复数形式分别为

$$\nabla \times H(r) = J(r) + j\omega D(r) \quad (1-1-14)$$

$$\nabla \times E(r) = -j\omega B(r) \quad (1-1-15)$$

$$\nabla \cdot B(r) = 0 \quad (1-1-16)$$

$$\nabla \cdot D(r) = \rho(r) \quad (1-1-17)$$

$$\nabla \cdot J(r) = -j\omega \rho(r) \quad (1-1-18)$$

$$D(r) = \varepsilon E(r) \quad (1-1-19)$$

$$B(r) = \mu H(r) \quad (1-1-20)$$

$$J(r) = J' + \sigma E(r) \quad (1-1-21)$$

式中 ω 为角频率。

1-2 媒质的电磁特性

由媒质的特性方程式(1-1-11), 式(1-1-12)及式(1-1-13)得知, 媒质的电磁参数 ε 、 μ 、 σ 分别反映了媒质中的电位移 D 与电场强度 E 、磁感应强度 B 与磁场强度 H , 传导电流密度 J_c 与电场强度 E 之间的关系。因此, 媒质的电磁参数 ε 、 μ 、 σ 的特性值得详细讨论。

若媒质电磁参数 ε 、 μ 、 σ 与时间无关, 则这种媒质称为静止媒质, 反之, 称为运动媒质。若参数 ε 、 μ 、 σ 与空间坐标无关, 即它们在空间各点具有同一数值, 则这种媒质称为均匀媒质, 否则, 称为非均匀媒质。若这些参数与场强的大小无关, 那么, D 与 E , B 与 H , J_c 与 E 之间构成正比关系, 则这种媒质称为线性媒质, 否则, 称为非线性媒质。

值得详细讨论的是, 有些媒质的介电常数 ε 及磁导率 μ 与外加场强的方向有关。当外加场强的方向改变时, ε 及 μ 也发生变化, 这种媒质称为各向异性媒质。为了描述这种特性, 引入张量介电常数 $\vec{\varepsilon}$ 及张量磁导率 $\vec{\mu}$, 则

$$D = \vec{\varepsilon} \cdot E \quad (1-1-22)$$

$$B = \vec{\mu} \cdot H \quad (1-1-23)$$

式中 $\vec{\epsilon}$ 及 $\vec{\mu}$ 均为 3×3 矩阵结构，即具有九个分量，可表示如下：

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1-1-24)$$

及

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (1-1-25)$$

具有张量介电常数 $\vec{\epsilon}$ 的媒质称为电各向异性媒质；具有张量磁导率 $\vec{\mu}$ 的媒质称为磁各向异性媒质。例如，处于恒定磁场中的等离子层具有电各向异性特性；处于恒定磁场中的铁氧体具有磁各向异性。晶体也是一种典型的电各向异性媒质。这样，具有标量介电常数及标量磁导率的媒质通常称为各向同性媒质。

还有一些媒质，其电磁特性方程可表示为

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1-1-26)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\zeta} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{\mu} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1-1-27)$$

式中 $\vec{\xi}$ 及 $\vec{\zeta}$ 称为电磁张量。这种关系表明，媒质的极化特性与磁化特性相互之间存在一定的耦合关系，具有这种特性的媒质称为双各向异性媒质。若 $\vec{\epsilon}$ 、 $\vec{\mu}$ 、 $\vec{\xi}$ 及 $\vec{\zeta}$ 皆为实标量时，这种媒质称为双各向同性媒质。一切运动媒质都会显示出双各向同性或双各向异性现象。

由于本书主要是论述电磁理论中常用的辅助函数特性及其应用，因此仅涉及各向同性的线性的静止媒质。几种常见的各向同性线性媒质值得简述一下。电导率 $\sigma=0$ 的介质称为理想介质，电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ 的导体称为理想导体，介于两者之间的，电导率 $\sigma \neq 0$ 的媒质称为导电媒质。磁导率 $\mu \rightarrow \infty$ 的媒质称为理想导磁体。还应指出，媒质的电磁参数具有显著的频率特性。此外，当频率足够高时，由于存在极化损耗与磁化损耗，媒质的介电常数 ϵ 及磁导率 μ 均变为复数，即 $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ ， $\mu = \mu' - j\mu''$ 。

1-3 边界条件

当电磁场所在的区域中含有几种媒质时,在两种媒质形成的边界上,媒质的电磁参数发生突变,导致场量发生变化。为了使 Maxwell 方程的解在边界上保持连续性,以使全区域中的合成解处处成立且唯一,我们必须知道场量通过边界时的变化规律,这种变化规律通常称为边界条件。

众所周知,对于这种场量不连续的边界区域,利用 Maxwell 方程的积分形式,可以导出场量应该服从的边界条件。通常将边界上的场量分解为平行于边界的切向分量(或称为 t 分量)和垂直于边界的法向分量(或称为 n 分量),分别进行讨论。如图 1-3-1 所示,在边界上作一个矩形闭合曲线,利用式 (1-1-1)

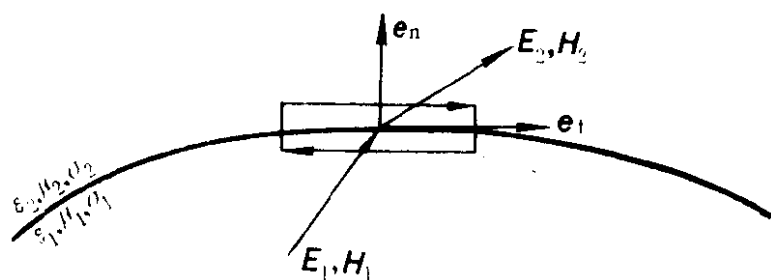


图 1-3-1 切向分量边界条件

及式 (1-1-2), 可以求得边界上电场切向分量 E_t 和磁场切向分量 H_t 应该满足的条件为

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (1-3-1)$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (1-3-2)$$

式中 J_s 为表面电流密度,切向分量的方向如图 1-3-1 所示。若以 e_n 表示由媒质 1 指向媒质 2,且垂直于边界的法向单位矢量,则上述边界条件又可写成矢量形式为

$$e_n \times (H_2 - H_1) = J_s \quad (1-3-3)$$

$$e_n \times (E_2 - E_1) = 0 \quad (1-3-4)$$

注意，表面电流 J_s 必须与矩形回路方向构成右旋关系。由于表面电流实际上仅可存在于理想导体表面，因此，可以认为在一般非理想导体表面上，磁场强度及电场强度的切向分量总是连续的。

若在边界上作一个封闭的圆柱表面，如图 1-3-2 所示，利用式 (1-1-3) 及式 (1-1-4) 可以导出边界上磁感应强度及

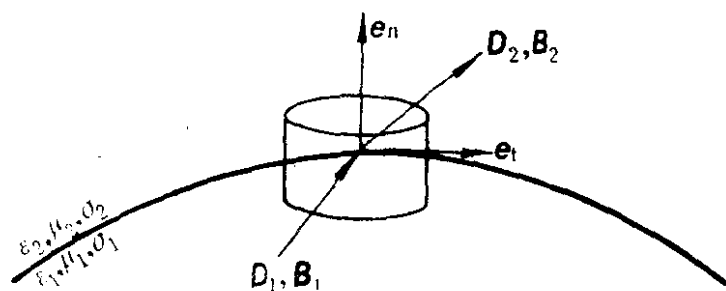


图 1-3-2 法向分量边界条件

电位移的法向分量应该满足的边界条件为

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (1-3-5)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (1-3-6)$$

式中 ρ_s 为表面电荷密度，法向分量的方向如图 1-3-2 所示。同样，式 (1-3-5) 和式 (1-3-6) 也可写成矢量形式

$$e_n \cdot (B_2 - B_1) = 0 \quad (1-3-7)$$

$$e_n \cdot (D_2 - D_1) = \rho_s \quad (1-3-8)$$

式中 e_n 为由媒质 1 指向媒质 2，且垂直于边界的法向单位矢量。由于表面电荷实际上仅存在于导体表面，因此，可以认为在一般非导电边界上，磁感应强度及电位移的法向分量总是连续的。

已知理想导体内部不可能存在时变电磁场，因此，理想导体表面具有的边界条件为

$$e_n \times H = J_s \quad (1-3-9)$$

$$e_n \times E = 0 \quad (1-3-10)$$

$$e_n \cdot B = 0 \quad (1-3-11)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} = \rho_s \quad (1-3-12)$$

式中各矢量的方向如图 1-3-3 所示。由此可见，在理想导电

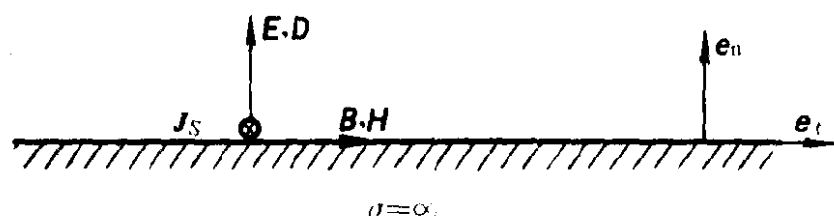


图 1-3-3 理想导电边界条件

体表面上，仅可存在切向磁场分量和法向电场分量。

1-4 磁荷及磁流

众所周知，电荷及电流是产生电磁场的唯一的源，自然界中至今尚未发现真实的磁荷及磁流存在。但是，对于某些电磁问题的分析，引入磁荷及磁流的假想概念是有益的。引入磁荷及磁流以后，认为磁荷直接产生磁场，磁流直接产生电场，那么，由电荷及电流、磁荷及磁流共同产生的正弦电磁场所满足的方程式为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1-4-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) - j\omega\mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1-4-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r}) \quad (1-4-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1-4-4)$$

式中 ρ_m 为磁荷密度， $\mathbf{J}^m$ 为磁流密度，它们满足的磁荷守恒定律为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^m(\mathbf{r}) = -j\omega\rho_m(\mathbf{r}) \quad (1-4-5)$$

若将电场及磁场分为两个部分，一部分为电荷及电流产生的，以 $\mathbf{E}^e$ 及 $\mathbf{H}^e$ 表示；另一部分为磁荷及磁流产生的，以 $\mathbf{E}^m$ 及 $\mathbf{H}^m$ 表示，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m \quad (1-4-6)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m \quad (1-4-7)$$

将此两式代入式 (1-4-1) 至式 (1-4-4) 中, 由于 Maxwell 方程是线性的, 求得电荷及电流产生的电磁场方程和磁荷及磁流产生的电磁场方程分别为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) & (1-4-8) \\ \nabla \times \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) & (1-4-9) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^e(\mathbf{r}) = 0 & (1-4-10) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}^e(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) & (1-4-11) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon \mathbf{E}^m(\mathbf{r}) & (1-4-12) \\ \nabla \times \mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) - j\omega\mu \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) & (1-4-13) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^m(\mathbf{r}) = \rho^m(\mathbf{r}) & (1-4-14) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}^m(\mathbf{r}) = 0 & (1-4-15) \end{cases}$$

比较上述两组方程可见, 它们之间存在下列对应关系:

$$\begin{cases} \mathbf{H}^e \sim -\mathbf{E}^m \\ \mathbf{E}^e \sim \mathbf{H}^m \end{cases} \begin{cases} \epsilon \sim \mu \\ \mu \sim \epsilon \end{cases} \begin{cases} \mathbf{J} \sim \mathbf{J}^m \\ \rho \sim \rho^m \end{cases} \quad (1-4-16)$$

这种对应关系通常称为对偶原理或二重性原理。利用这种对应关系, 可以直接由电荷及电流产生的电磁场结果导出分布特性相同的磁荷及磁流产生的电磁场, 仅需置换各个对应参数, 不用重新计算。

值得指出的是, 引入磁荷及磁流后, 前述边界条件应予以适当的修正。因为式 (1-4-2) 及式 (1-4-3) 不同于式 (1-1-15) 及式 (1-1-16), 因而相应的积分形式也不同, 所以由此导出的边界条件不同。但该两式仅涉及电场强度的切向分量和磁感应强度的法向分量, 类似前述方法可证

$$E_{2t} - E_{1t} = -J_s^m \quad (1-4-17)$$

或写成矢量形式为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_s^m \quad (1-4-18)$$

式中 $\mathbf{J}_s^m$ 为表面磁流密度。