

# 音乐厅声学

〔日〕安藤四一 著

戴根华 译

马大猷 校



科学出版社

1989

# 音乐厅声学

〔日〕安藤四一 著

戴根华 译

马大猷 校

科学出版社

1989

# 目 录

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>1. 引论</b> .....       | 1  |
| <b>2. 声传输系统</b> .....    | 5  |
| 2.1 源信号的自相关函数表示 .....    | 5  |
| 2.2 有限表面的声反射 .....       | 9  |
| 2.3 周期性墙壁构造的反射 .....     | 14 |
| 2.3.1 分析 .....           | 14 |
| 2.3.2 数值计算 .....         | 24 |
| 2.4 扩散墙的散射 .....         | 27 |
| 2.5 听觉系统 .....           | 31 |
| 2.5.1 头、耳廓和外耳道 .....     | 31 |
| 2.5.2 鼓膜和听骨链 .....       | 34 |
| 2.5.3 耳蜗 .....           | 36 |
| 2.6 神经系统 .....           | 39 |
| <b>3. 声场模拟</b> .....     | 45 |
| 3.1 两耳上的信号 .....         | 45 |
| 3.2 声定位的模拟 .....         | 53 |
| 3.3 音乐厅中声场的模拟 .....      | 57 |
| <b>4. 主观优选评价</b> .....   | 62 |
| 4.1 优选的线性标度值 .....       | 62 |
| 4.2 含有单个和多个早期反射的声场 ..... | 64 |
| 4.2.1 单个反射的优选时延 .....    | 64 |
| 4.2.2 单个反射的优选方向 .....    | 67 |
| 4.2.3 单个反射的优选幅度 .....    | 68 |
| 4.2.4 第二个反射的优选时延 .....   | 70 |

|       |                                    |     |
|-------|------------------------------------|-----|
| 4.2.5 | 单个反射的优选谱 .....                     | 71  |
| 4.2.6 | 多个早期反射中最强反射的优选时延 .....             | 76  |
| 4.3   | 含有早期反射和后期混响的声场 .....               | 76  |
| 4.3.1 | 标度值与早期反射的时延和后期混响时间 .....           | 77  |
| 4.3.2 | 标度值与声级和 IACC.....                  | 85  |
| 4.3.3 | 标度值与后期混响时间和 IACC.....              | 90  |
| 4.3.4 | 与其它优选评价的符合程度 .....                 | 91  |
| 5.    | 音乐厅中主观优选的预测 .....                  | 92  |
| 5.1   | 听觉传导路径的模型 .....                    | 92  |
| 5.2   | 最佳设计的客观量 .....                     | 97  |
| 5.2.1 | 声级(时间-单耳评价标准) .....                | 98  |
| 5.2.2 | 直达声后的早期反射(时间-单耳评价标准) ...<br>.....  | 98  |
| 5.2.3 | 早期反射后的后期混响时间(时间-单耳评价标<br>准) .....  | 99  |
| 5.2.4 | 两耳上的信号的不相干(空间-双耳评价标准) ...<br>..... | 101 |
| 5.3   | 主观优选理论 .....                       | 101 |
| 5.4   | 计算音乐厅的主观优选 .....                   | 107 |
| 6.    | 设计研究 .....                         | 116 |
| 6.1   | 墙和天花板 .....                        | 116 |
| 6.2   | 地板和座椅 .....                        | 120 |
| 6.2.1 | 成列座椅上方的声传播 .....                   | 120 |
| 6.2.2 | 座椅构造和地板吸收的影响 .....                 | 122 |
| 6.2.3 | 声波入射角的影响 .....                     | 123 |
| 6.2.4 | 地板下狭缝共振器的影响 .....                  | 124 |
| 6.3   | 舞台罩 .....                          | 125 |
| 6.4   | 音乐厅 .....                          | 129 |
| 7.    | 音乐厅的声测试技术 .....                    | 133 |

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 传递函数或脉冲响应的测量 .....                                                                                         | 133 |
| 7.1.1 单脉冲法 .....                                                                                               | 133 |
| 7.1.2 相关法 .....                                                                                                | 134 |
| 7.1.3 膺无规二进制信号快速测试法 .....                                                                                      | 136 |
| 7.2 混响 .....                                                                                                   | 140 |
| 7.3 双耳听觉互相关 .....                                                                                              | 142 |
| 7.4 现成的音乐厅中声场的主观优选评价 .....                                                                                     | 144 |
| 附录 .....                                                                                                       | 149 |
| A. 主观扩散度 .....                                                                                                 | 149 |
| B. 优选评价中的个人差异的例子 .....                                                                                         | 153 |
| C. 染色感觉 .....                                                                                                  | 154 |
| D. 两耳上的信号的相关函数 .....                                                                                           | 156 |
| E. 测量脉冲响应的快速测试法计算程序及打印结果<br>(Computer: Univac 1100/83; ASC11 FORTRAN<br>Compiler, ANSI STANDARD X3.9-1978) ... | 169 |
| 符号表 .....                                                                                                      | 177 |
| 参考文献 .....                                                                                                     | 185 |

## 1. 引 论

随着人类演化，声学这门科学开始与语言通信和音乐有了联系。声学包括有效地传递信息所必需的环境。人们依靠听觉接收语言信号和音乐。然而，与物理声学有关的一些问题至今还有疑问。例如，这个问题的一个复杂的延伸是，什么构成音乐厅的良好声场？容易想象，由于我们听音乐的主观经验如此之强，以致在寻求这个问题的合理解答方面会产生相当大的困难。显然，如果不知道影响音乐厅中声场的所有重要物理参数，是不可能找到答案的。

1966年，Schroeder<sup>[1,1]</sup>写了一篇名为“建筑声学”的文章，文章说：“音乐厅声学设计中长期存在的疑难问题，表明对更多的基本研究的需要”。我愿意引用该文的第一部分作为本书的引论，略述当时亟待解决的是些什么问题。

“几个近代音乐厅，其中有1963年建成的加拿大蒙特利尔的 La Grande Salle，1965年初揭幕的美国洛杉矶的 Music Pavilion，由于其杰出的音质而受到称赞。但其它一些新音乐厅，如伦敦皇家节日大厅（1951），纽约 Philharmonie 大厅（1962）以及柏林新 Philharmonie 音乐厅（1963），则因某些音质缺陷而遭到批评。音乐厅，尤其是近代设计的大型厅堂音质方面如此不一致，证明我们对良好音质所要求的重要因素理解不够，这程度不同地表现在影响音乐厅音质的三个方面：物理的、心理声学的和美学的”。

“问题的物理方面可用一句话表示，就是‘给定了形状和墙壁材料已知的房间，声波在里面是怎么传播的？’混响过程

既是时间的函数(声衰变),又是位置和方向的函数(声扩散),它的重要细节方面存在许多疑点.事实上,甚至某些物理量的测量也有难以克服的障碍.”

“问题的心理声学方面也可用一句话表示,即‘给定了已知的声场,我们听到了什么?’不幸,这方面主要是疑问.许多基本问题,如声扩散的不同在主观感觉上引起的差别,甚至还没有接触过,更不用说解答了.若干更复杂的问题,像对‘混响’(‘活跃度’),‘亲切感’、‘温暖’、‘融合’以及许多其它主观量的物理相关的识别,理解的比通常假设的要差得多.”

“最后,美学或‘优选’(‘给定了已知的声场和要听的内容的全部信息,人们喜欢听什么样的音质?’)提出的问题,只有根据坚实的物理和心理声学的知识,才能进行有意义的研究.”

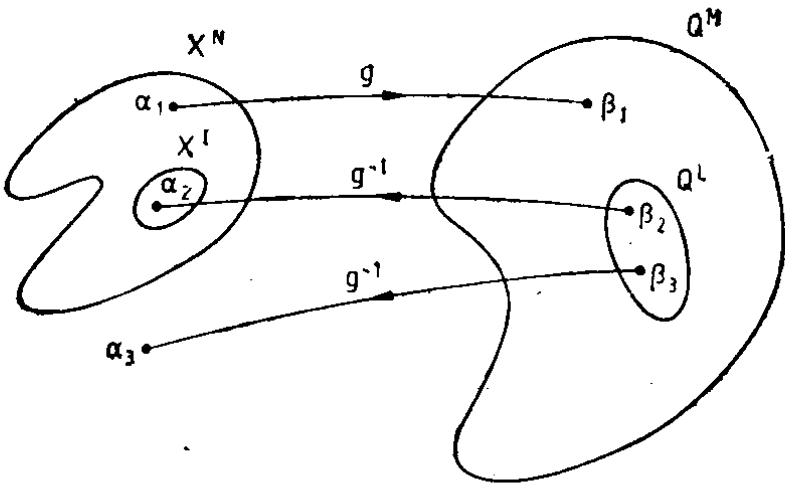


图 1.1 物理上可实现的空间  $X^N$  和主观听觉空间  $Q^M$ .  
 $(X^I)$  是最佳物理上可实现的空间,  $(Q^L)$  是最佳主观听觉空间,  $(g)$  是从物理上可实现空间到主观听觉空间的映射函数, 见式(5.9);  $(g^{-1})$  是从最佳主观空间到包括不可实现的物理空间的逆映射函数. 只有可实现的空间是要设计

问题是如何达到声场的最佳条件. 为简单起见, 设声源在舞台上, 测听者坐在音乐厅的一定位置上. 设  $X^N$  是音乐厅的物理上可实现的空间,  $N$  为房间中声场应满足的一定边

界条件的独立参数，见图 1.1. 又设  $Q^M$  是  $M$  维的主观听觉空间： $N$  小于  $M$ ，因为除音乐厅的内部环境因素外，还有如饥饿、光强、温度以及过去经验引起的联想等外部环境因素也要影响主观听觉过程。

假如已知声场  $\alpha_1 \in X^N$  对应于测听者的主观响应  $\beta_1 \in Q^M$ ，两者之间由映射函数  $g$  连结。映射函数将由听觉功能和大脑功能共同决定。

不同客观(物理)参数组合而成的声场可用数字计算机模拟，因而能找到连结物理上可实现空间和主观听觉空间的函数。如果通过对物理空间中客观参数的主观评价，求得了最佳主观听觉空间  $Q^L (\equiv Q^M)$  那么就能在最佳物理上可实现空间  $X^I (\equiv X^N)$  中设计相应的声场，例如  $\alpha_2$ ，其中  $L \leq M$ ， $I \leq N$ 。

这样，在最佳空间便有

$$\{g(\alpha) | \alpha \in X^I\} = \{\beta | \beta \in Q^L\}. \quad (1.1)$$

由于  $\alpha_3 \in X^N$ ，所以

$$\{g^{-1}(\beta) | \beta \in Q^L\} \supseteq \{\alpha | \alpha \in X^I\} \quad (1.2)$$

其中  $g(\phi) = \phi$ ， $g^{-1}(\phi) = \phi$ ， $\phi$  为空集。

在本书中，这个问题是将注意力集中在主观优选试验而予以处理的。事实上，在研究的开始阶段，人们很难接受，只作优选评价就足以得到有意义的结果。于是，在消声室中，对加进了幅度、时延和到达方向都可调的单个反射的声场进行了测听。结论是这种声场对每个人都能接受。然后，借助计算机来模拟该声场，使到达两耳的信号有完全确定、完全独立的客观参数。为减小其它环境因素的影响，又作了一系列主观优选成对比较试验，以获得完全的声场变化范围。

常用的物理量，如相关函数，傅氏变换及卷积都用来描述声信号。



第二章研究从声源到听者大脑构成的声系统。鉴于设计音乐厅表面构造的重要性，书中有意识地安排了表面构造的声反射和声散射的数学处理方法。建议那些对声场的主观属性，最佳设计的目标及设计研究有兴趣的读者，直接跳到第四章。为进行主观优选评价并寻求较完美的声场，第三章讨论了在音乐厅中模拟具有完全确定的客观参数的声场的方法。第四章研究比较判别法则如何使我们能得到不同声场之间心理学上的优选差距。从对德国人、日本人和朝鲜人所作的优选试验看，未发现重要的差别，各组结果几乎彼此完全相符，可用同一个公式预测。第五章提出了一个表示从舞台上的声源到听者大脑构成的可能的声系统。设想，如果我们充分了解了中枢神经系统是如何处理听觉神经末梢区域发来的神经脉冲的话，厅堂的设计就可根据从对大脑作用过程的认识所得的准则进行。本章试图用在人脑左右半球上产生的听觉电位，来解释为什么时间的和空间的客观因素是独立地影响主观优选空间的。接着提出经时间和空间分析所得的最佳设计客观量。在讨论了最后建筑方案决定前，如何计算任意一个座位上的音质后，又叙述了音乐厅中优选标度值的计算方法。第六章包括墙壁、天花板、地板、座椅安排、舞台罩及音乐厅形体的设计的研究。第七章处理用于考察现成音乐厅中声场的声测量技术和优选试验技术。提出了一套诊断系统的例子，以分析四个客观参数从而评价声场音质。

本书也许能帮助音乐家回答：何种音乐对指定的音乐厅最合适？但这并没有解决全部问题。因此希望各方面提出的一些问题能对进一步的研究提供合适的线索。特别是与听觉和视觉反应之间的相互作用有关的问题，则留为未来研究的课题。

## 2. 声 传 输 系 统

本章讨论从声源到测听者组成的声传输系统。考虑到听觉系统中的时域过程,声源用自相关函数表示,空气和边界组成的媒质用声压传递函数或脉冲响应表示。还对听觉系统包括神经系统作了简要介绍。

### 2.1 源信号的自相关函数表示

由于各种各样的音乐要在音乐厅中演奏,因而有必要对音乐作统计分类。

声学中,常常要将时间函数表示的源信号  $p(t)$  变换为它的傅里叶谱

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.1)$$

这是角频率  $\omega$  的复函数,有幅度和相位。反之,也可从频域重又变换到时域

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

积  $P(\omega)P^*(\omega)$  为实数,等于功率谱密度  $P_d(\omega)$ ,其中  $P^*(\omega)$  是  $P(\omega)$  的复共轭。

但是在本书中,源信号  $p(t)$  经常用它的自相关函数表示,其定义为

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} p(t)p(t+\tau) dt, \quad (2.3)$$

这里  $\tau$  是时延,  $2T$  是积分间隔。实际测量时,积分间隔  $2T$  总

是有限的。根据 Wiener 定理，自相关函数与功率谱密度  $P_d(\omega)$  等价，即

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_d(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \tag{2.4}$$

在自相关函数中相位项消失。由于人耳对绝对相位基本上是不敏感的，所以只要涉及的问题属于线性室内声学范畴，自相关是很有用的。

令式(2.3,4)中的  $\tau$  为零，则分别可得

$$\Phi(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} p^2(t) dt \tag{2.5}$$

和

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_d(\omega) d\omega, \tag{2.6}$$

这两个方程等价， $\Phi(0)$  为信号的平均强度。 $\Phi(0)$  又是  $\Phi(\tau)$  的最大值，自相关函数可归一化为

$$\phi(\tau) = \Phi(\tau)/\Phi(0). \tag{2.7}$$

我们来讨论一下式 (2.3) 的物理意义。若  $p(t)$  和  $p(t+\tau_1)$  的幅度都很大，而且这些信号有相似的重复特征，则被积

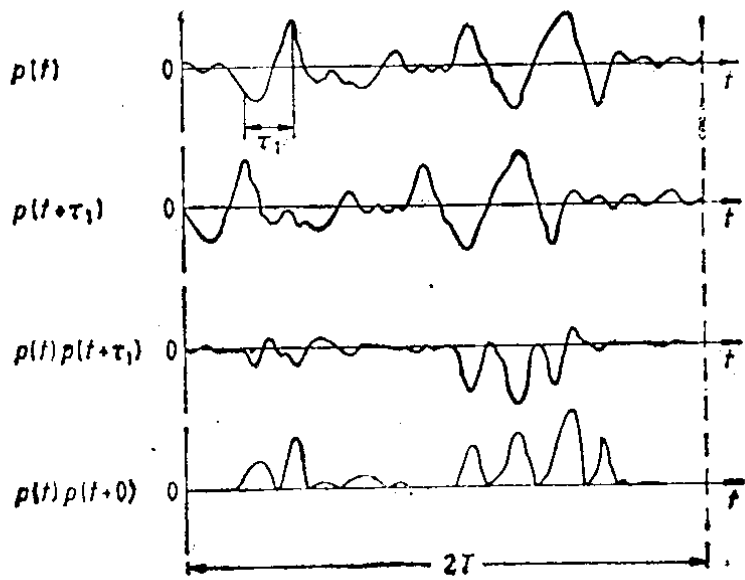


图 2.1 在起始点和时延  $\tau_1$  处源信号的自相关函数的物理意义

函数对自相关函数  $\Phi(\tau_1)$  就有重要贡献。

特别是,如果被积函数  $p(t)p(t + \tau_1)$  主要为负值,那么总的自相关函数  $\Phi(\tau_1)$  也为负(图 2.1)。但  $\tau = 0$  时,自相关函数总达到其正极大值。

纯音的自相关函数是以源信号的周期为周期的余弦函数,相当于无阻尼振荡,因此可认为是一个无限长“混响”系统的例子。这个特征已包含在源信号本身之中。

以有限的积分时间间隔计算自相关函数会引来测量误差。时延  $\tau$  较大时,自相关函数的方差与积分间隔  $2T$  成反比<sup>[2.1]</sup>。

$$\text{Var}\{\Phi(\tau)\} \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(\sigma) d\sigma. \quad (2.8)$$

正如 Jansson 和 Sunberg<sup>[2.2]</sup> 测量了持续时间从 2 秒到 100 秒的音乐的谱后建议的那样,要分析的一段音乐至少应延续 20 秒。较长的间隔  $2T$ ,对音乐厅的声学设计更方便合适。因此以下都采用持续时间为 35 秒的长时间自相关函数,它表示了主观属性的重要因素,详细的讨论见第 4 章。用公式表示就是

$$\Phi_p(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} p'(t)p'(t + \tau_1) dt, 2T = 35 \text{ 秒}, \quad (2.9)$$

其中  $p'(t) = p(t) * s(t)$ ,  $s(t)$  是表示人耳灵敏度特性的 A-计权滤波器的脉冲响应。

声场模拟中测量所用的音乐样本列在表 2.1 中。

音乐 A 是 Philip Jones 铜管乐队演奏的,音乐 B, C, D 和 E 是英国室内交响乐队在建筑研究站的消声室中录制的<sup>[2.3]</sup>。测得的归一化自相关函数示于图 2.2a—d。自相关函数的有效持续时间  $\tau_c$  定义为归一化自相关函数的包络达到并以后维持小于 0.1 时的时延。表 2.1 中也给出了每个音乐的时延<sup>[2.4,5]</sup>。

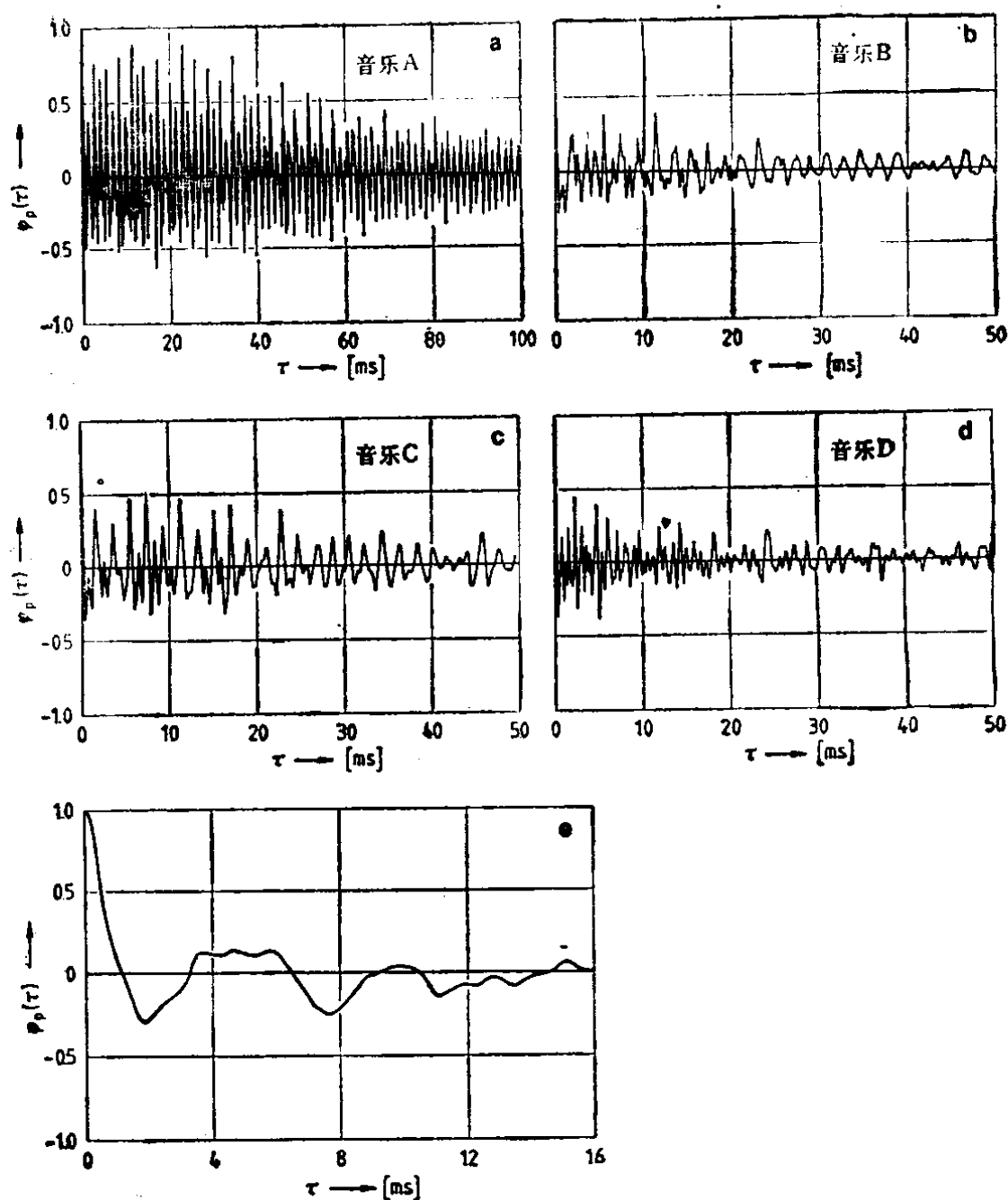


图 2.2 音乐 [2.4] 和语声 [2.5] 的自相关函数的测量结果。自相关函数的有效持续时间  $\tau_e$  定义为归一化自相关函数的包络减小到 0.1 时的时延。a. 音乐 A, Gibbons 所作的皇家孔雀舞曲,  $\tau_e \approx 127\text{ms}$ ; b. 音乐 B, Malcolm Arnold 的小型交响乐, 作品 48, 第 III 乐章,  $\tau_e \approx 35\text{ms}$ ; c. 音乐 C, Haydn 的交响乐 102, 降 B 大调, 第 II 乐章, 柔板,  $\tau_e \approx 65\text{ms}$ ; d. 音乐 D, Wagner 的 Siegfried 牧歌, 第 322 小节,  $\tau_e \approx 40\text{ms}$ ; e. 连续的语声, 女声朗读的诗句,  $\tau_e \approx 12\text{ms}$ 。

表 2.1 测量和模拟用的音乐和语声，及其长时间自相关的有效持续时间

| 声 源  | 乐 曲 名                                  | 作 曲               | $\tau_e$ [ms] <sup>a)</sup> |
|------|----------------------------------------|-------------------|-----------------------------|
| 音乐 A | 皇家孔雀舞曲                                 | Gibbons           | 127(127)                    |
| 音乐 B | 小型交响乐,作品 48 第 III 乐章<br>快板,活泼地         | Malcolm<br>Arnold | 43(35)                      |
| 音乐 C | 交响乐 102,降 B 大调,第 II 乐章<br>柔板           | Haydn             | (65)                        |
| 音乐 D | Siegfried 牧歌第 322 小节                   | Wagner            | (40)                        |
| 音乐 E | C 大调交响乐 K-V551, Jupiter<br>第 IV 乐章;很快地 | Mozart            | 38                          |
| 语声 S | 女声朗读的诗                                 | D.Kunikita        | 10(12) <sup>b)</sup>        |

- a) 自相关函数的有效持续时间  $\tau_e$  定义为归一化自相关函数的包络减小到 0.1 时的时延,它随所用扬声器辐射特性的不同而稍有差别. 因此,括号内的值用于节 4.2 中计算优选标度,其余的则在节 4.3 中使用.
- b) 不同语言的有效持续时间认为是差不多的,因为基频差别不大

两个极端的情况是, Gibbons 的音乐 A 节奏较慢( $\tau_e = 127\text{ms}$ ),而 Arnold 的音乐 B 节奏较快 ( $\tau_e = 35\text{ms}$ ). 在以后的章节中经常采用的就是这两个音乐样本. 另外两个音乐样本 C 和 D 的有效持续时间在 A 和 B 之间.

通常语声信号之间的相干比音乐短,如图 2.2e 所示. 连续语声信号的自相关函数在 3.6 到 6.3ms 间有较宽的峰,它与基频的倒数大致相当. 语声的有效持续时间一般为 10—12 ms.

## 2.2 有限表面的声反射

音乐厅的设计实际是决定它的声学边界条件,如厅堂形状,它的几何尺寸和每个墙的声学特性. 为了把墙壁特性的影响考虑进来,必要而充分的条件是知道墙壁声反射的传递

函数。因此，以下将对几种墙壁的传递函数作理论分析。至于那些对数学处理不熟悉的读者可直接跳到第 2.5 节。

有限大小的刚性反射体经常用在音乐厅中，这里我们根据熟知的 Kirchhoff 衍射理论来讨论单个刚性反射体的声反射。

令声源位于一任意形状的反射体前方  $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$  处。在  $r = (x, y, z)$  处测得的直达声和反射声相加后的速度位可表示为<sup>[2.6]</sup>

$$U(r|r_0, \omega) = \frac{1}{|r - r_0|} \exp(-jk|r - r_0|) + \frac{j}{2\lambda} \iint_A \frac{\exp[-jk(l+m)]}{lm} [\cos(n, m) - \cos(n, l)] ds, \quad (2.10)$$

其中  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $c$  是空气中声速,  $\lambda$  是波长, 角  $(n, m)$  和  $(n, l)$  分别为面  $A$  上的面元  $ds$  的内法线与方向  $m$  和  $l$  的夹角, 而  $m$  和  $l$  各是  $ds$  到点  $r_0$  和  $r$  的距离。

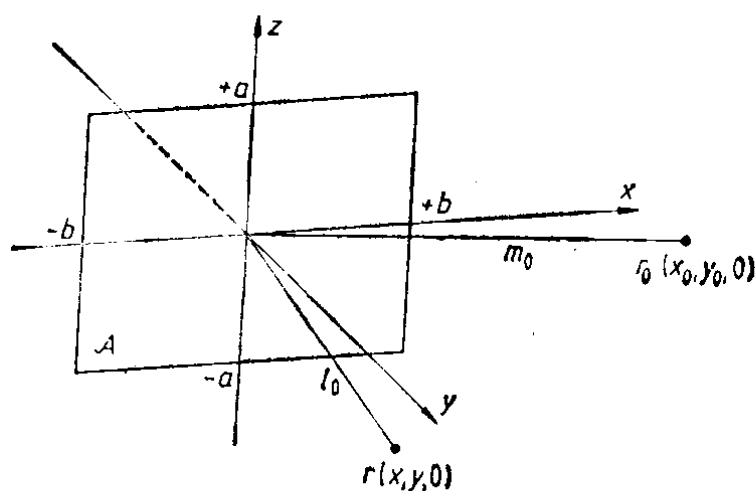


图 2.3 矩形反射面图示

现在分析图 2.3 中刚性矩形板的声反射。设点  $r_0$  和  $r$  在  $x-y$  平面内, 但距离板很远; 又设板上的面元  $ds$  的坐标是  $(\eta, 0, \xi)$ , 则  $[\cos(n, m) - \cos(n, l)] = [\cos(y, m) -$

$\cos(y, l)$  一项可近似地用  $[\cos\theta_i + \cos\theta_r]$  代替, 结果式 (2.10) 中的反射波  $U_r$  简化为

$$U_r(r|r_0, \omega) \approx \frac{j}{2\lambda} \frac{(\cos\theta_i + \cos\theta_r)}{m_0 l_0} \exp[-jk(m_0 + l_0)] \\ \times \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-jkf(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (2.11)$$

这里

$$f(\xi, \eta) = (l + m) - (l_0 + m_0) \\ l = l_0 - \frac{\eta x}{l_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l_0} - \frac{(\eta x)^2}{2l_0^3} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)\eta x}{2l_0^3} \\ - \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{8l_0^3} + \dots \\ m = m_0 - \frac{\eta x_0}{m_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2m_0} - \frac{(\eta x_0)^2}{2m_0^3} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)\eta x_0}{2m_0^3} \\ - \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{8m_0^3} + \dots \quad (2.12)$$

经代数运算后, 式 (2.11) 又可近似表示为

$$U_r(r|r_0, \omega) \approx \frac{j(\cos\theta_i + \cos\theta_r)}{4m_0 l_0} \exp[-jk(m_0 + l_0)] \\ \times \frac{1}{(c_0 c_1)^{1/2}} \exp(jkc_2^2/4c_1) \int_{k_1^-}^{k_1^+} \exp(-j\pi v^2/2) dv \\ \times \int_{k_2^-}^{k_2^+} \exp(-j\pi v^2/2) dv, \quad (2.13)$$

这里

$$k_1^\pm = \pm 2 \left( \frac{c_0}{\lambda} \right)^{1/2} a, \\ k_2^\pm = \pm 2 \left( \frac{c_1}{\lambda} \right)^{1/2} b - \left( \frac{1}{\lambda c_1} \right)^{1/2} c_2, \quad (2.14)$$

和



$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{l_0} \right) \\
c_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2 \theta_i}{m_0} + \frac{\cos^2 \theta_r}{l_0} \right) \\
c_2 &= \sin \theta_i + \sin \theta_r,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

式(2.13)中的积分是熟知的 Fresnel 积分。

反射的传递函数定义为

$$W(r|r_0, \omega) = \frac{U_r(r|r_0, \omega)}{U_i(r|r_0, \omega)}, \tag{2.16}$$

其中等效入射波由

$$U_i(r|r_0, \omega) = \frac{1}{m_0 + l_0} \exp[-jk(m_0 + l_0)] \tag{2.17}$$

给出。注意, 脉冲响应  $w(t)$  可按式(2.2)定义对  $W(\omega)$  作傅里叶反变换得到。

因此有

$$\begin{aligned}
W(r|r_0, \omega) &\approx \frac{j(\cos \theta_i + \cos \theta_r)}{4} \\
&\times \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{l_0} \right) \frac{1}{(c_0 c_1)^{1/2}} \exp(jk c_2^2 / 4 c_1) \\
&\times [C(K_1^+) - jS(K_1^+)] \{ [C(K_2^+) \\
&- jS(K_2^+)] - [C(K_2^-) - jS(K_2^-)] \},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

式中  $C(K) = \int_0^K \cos \frac{\pi v^2}{2} dv$ ,  $S(K) = \int_0^K \sin \frac{\pi v^2}{2} dv$ .

当  $K \rightarrow 0$  时,

$$C(K) \rightarrow O(K), \quad S(K) \rightarrow O(K^3),$$

而当  $K \rightarrow \infty$  时,

$$C(\pm K) = \pm \frac{1}{2}, \quad S(\pm K) = \pm \frac{1}{2}.$$

如  $\theta_i = -\theta_r (= \theta)$ , 则  $c_2 = 0$ , 式(2.18)就成为