《自动化基础知识丛书》

自动控制中的基础数学

——微分方程与差分方程

王 翼 编著

科 学 出 版 社

自动化基础知识丛书

自动控制中的基础数学

——微分方程与差分方程

王　翼 编著

科 学 出 版 社

1987

内 容 简 介

自动控制理论的深入发展离不开数学工具．作为数学分支的微分方程与差分方程，在建立自动控制中的连续系统和离散系统的数学模型、分析和设计控制系统、研究控制系统的稳定性、讨论线性系统的能控性与能观测性等方面具有举足轻重的作用．

本书简要地介绍了自动控制中常用的微分方程与差分方程的基本理论和解法．该书说理清楚、结构严谨、实例丰富，每节均附有适当练习（书后有答案）．

本书的姐妹篇《线性代数与矩阵理论》和《概率论与数理统计》亦同时出版．

本书可供从事自动化工作的同志参考，也可供对自动化技术感兴趣的电大、业大、中专、中技及自学人员与工人技术人员参考．

自动化基础知识丛书

自动控制中的基础数学

——微分方程与差分方程

王 翼 编著

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1987年2月第一次印刷 印张：8 1/4

印数：0001—5,150 字数：158,000

统一书号：15031·784

本社书号：5207·15—8

定价：1.95元

前　　言

本书是中国自动化学会和科学出版社计划编辑出版的《自动化基础知识丛书》之一。

这套丛书编辑出版的目的，是希望在自动化的实际应用和理论研究之间搭起“桥梁”，向广大读者提供自动化科学技术基础知识和新的信息，有三方面的意图：

1. 向从事自动化实际应用工作的读者，提供必要的理论方法和数学基础，如：控制理论、系统仿真、系统辨识及微分方程、线性代数……等。

2. 向从事自动化理论研究工作的读者，提供有关实际仪表、装置和系统的工程知识，如：检测仪表、调节器、随动系统、自寻最优控制器……等。

3. 向广大对自动化有兴趣的读者，提供自动化科学技术的基本知识和发展动向的信息，如：微电脑、机器人、大系统理论、智能控制系统……等。

近四十年来，自动化科学技术日新月异，在广度和深度上都有重大进展，一方面，从单机自动化、机组自动化向车间、工厂、公司的综合自动化发展；从工程技术领域向社会经济、环境生态领域发展；从小系统的过程控制的局部最优化，向大系统的管理决策的全局最优化发展……另一方面，从常规的自动检测、调节与控制，向人工智能、模式识别、机器人、智能控

制系统发展……等。

自动化是实现工业、农业、国防和科学技术现代化的先进手段，是实现优质、高产、低消耗、保安全的有效方法，也是现代化社会中科学技术发达、人民生活水平提高的显著标志，自动化在国民经济各部门、社会生活各方面的广泛应用，将把人们从繁重的体力和脑力劳动中，从危险的、有害的工作环境中解放出来，大大扩展人类认识自然、改造自然的能力，为迅速发展社会生产力，改善人民生活条件作出巨大贡献。因此，自动化是现代化的“催化剂”，也是现代化的“显影液”。没有自动化，就没有现代化。

我们期望，《自动化基础知识丛书》的编辑出版，能为广大读者提供一个有用的自动化科学技术知识库，为我国的现代化建设服务。

《自动化基础知识丛书》编委会

序

早在公元前自动控制装置就已出现，但利用数学工具对控制系统进行分析研究，在1930年以前则很少见. 1895年劳斯（Routh）应用高等数学分析控制系统的稳定性的实例是很少的几个成功的范例之一.

1930年以后，应用各种数学工具于自动控制系统的研究日渐增多. 微分方程、拉普拉斯（Laplace）变换、复变函数等数学分支用到了定常线性系统的研究中，促进了自动控制技术的发展. 到二十世纪五十年代形成了较成熟的理论，即我们通常说的经典控制理论.

二十世纪六十年代，生产、经济、军事和空间科学等方面得到迅速的发展，对自动控制提出了新的要求，吸引了一批数学家研究自动控制理论. 于是除了微分方程外，线性代数、概率论、拓扑学、变分法、泛函分析和一些其它的数学分支愈来愈广泛地应用于自动控制系统的研究. 与此同时，一些从事自动控制系统设计的专家也开始较多地应用数学工具. 这些都促进了自动控制技术的深入发展，逐步形成了一套新的理论，即我们所说的现代控制理论.

纵观自动控制理论的发展历史可知，数学的应用对于自动控制理论的深入发展所起的作用是举足轻重的.

微分方程与差分方程是数学的分支，它们的产生和以后

的发展无不与各种生产技术的发展密切相关. 而自动控制理论和技术的研究与微分方程和差分方程更是有着不可分割的依赖关系. 微分方程和差分方程与自动控制的紧密关系至少可归纳为以下几个方面.

1. 当研究工作深入到定量阶段时,需要建立被控系统的数学模型. 连续系统的数学模型常常用微分方程来描述,离散系统的数学模型则常常用差分方程表示.

2. 控制系统的分析与设计常常需要知道微分方程或差分方程的某些性质,或者需要求微分方程或差分方程的解. 例如,分析一个控制系统在外界特殊干扰下的响应的问题,就是一个求解微分方程或差分方程的问题.

3. 稳定性是设计控制系统的基本要求. 稳定性分析也是微分方程和差分方程理论的重要内容. 研究系统稳定性的李雅普诺夫第二方法也可用于系统设计.

4. 线性系统的能控性与能观测性的讨论也依赖于微分方程和差分方程的解的形式.

5. 微分方程的初值问题的解的存在唯一性定理是自动控制理论的基础.

基于以上五点,我们可以说,微分方程与差分方程是自动控制理论的最重要的数学基础之一.

本书的目的是向读者介绍自动控制中常用的微分方程与差分方程的基本理论和解法. 为从事自动控制的工程技术人员深入研究自动控制理论和解决技术问题,扫除一些在微分方程和差分方程方面可能遇到的障碍.

本书在内容的选取上照顾到了本丛书各分册对微分方程和差分方程的要求．工科大学毕业的读者可不读前三章．中专文化程度的读者可略去带＊号的节，不阅读这一部分不会影响其它部分的阅读．

书中给了少量习题，题目较简单，目的是帮助读者理解所讲的概念和解法． 书后并附有答案，供初学者自己检查学习情况．

在本书编写过程中涂序彦同志和高龙同志提出了不少宝贵意见，特在此表示衷心的感谢．

书中难免存在缺点和错误，希望广大读者提出宝贵意见．

作者

1985 年 3 月

数学符号说明

A^{-1}　　矩阵 A 的逆矩阵

A^T　　矩阵 A 的转置

$|A|$, $\det A$　　方阵 A 的行列式

$\mathrm{sgn}\sigma$　　符号函数，$\mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & 当\ \sigma > 0\ 时 \\ -1, & 当\ \sigma < 0\ 时 \\ 0, & 当\ \sigma = 0\ 时 \end{cases}$

$\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}$　　梯度向量，$\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

D　　微分算符，$Dx = \dfrac{dx}{dt}$

$L[f(t)]$　函数 $f(t)$ 的拉氏变换

$L^{-1}[F(s)]$　$F(s)$ 的拉氏反变换

$\mathrm{tr}A$　　矩阵 A 的迹，设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，则

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

$\mathrm{rank}A$　　矩阵 A 的秩

$\|\boldsymbol{x}\|$　　向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，如无特别申明均指 $\|\boldsymbol{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，$x_i$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量。

$\|A\|$　　矩阵 A 的范数，本书定义为：

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|$$

max　　最大

$\equiv$　　恒等于

$\triangleq$　　定义为

目　　录

第一章 引 言

§1. 基 本 概 念

1. 什么是微分方程

微分方程是包含未知函数和它的导数的方程式. 在自然科学和社会科学中，很多问题的一般规律可给出一个函数及其变化率与自变量间的关系. 在数学上函数 $x(t)$ 的变化率是用它的导数 $\frac{dx}{dt}$ 表示的. 因此，上述规律用数学描述就是一个微分方程. 有些规律给出的是未知函数和它的高阶导数之间的关系，其数学描述就是包含一个未知函数及其高阶导数的方程式，称为高阶微分方程.

对一个自动控制系统进行分析与设计，不论用“频域法”还是用“时域法”都需要建立它的数学模型. 很多系统的数学模型是微分方程，这些系统的分析与设计将涉及到微分方程的求解及解的性质的研究. 这些就是本书要讲的主要内容.

例 1 化学反应方程.

设 $x(t)$ 是某物质在时刻 t 的质量，如果在某化学反应中，它的衰减率是常数 k，那么函数 $x(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dx}{dt}=-kx. \tag{1.1.1}$$

例 2 质量为m的升降机，受提升力$u(t)$和重力作用。设在时刻t时升降机与地面的距离为$x(t)$，根据牛顿第二定

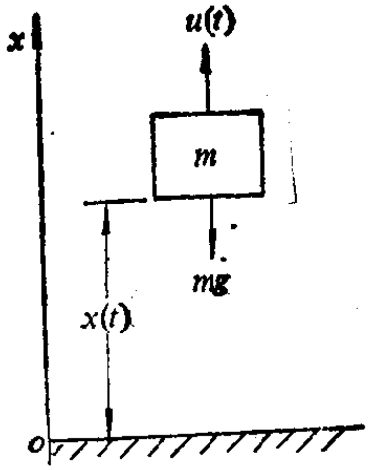

图 1.1 升降机示意图

律，$x(t)$满足微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=u-mg. \tag{1.1.2}$$

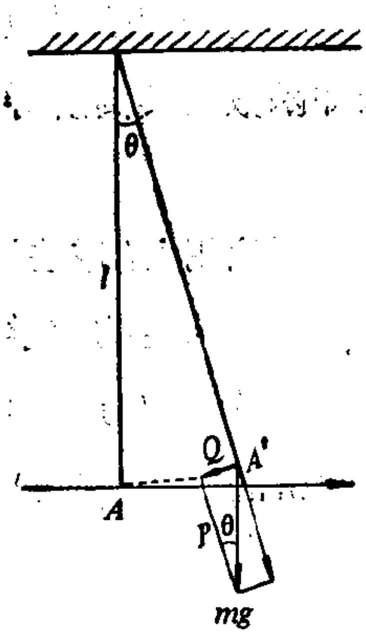

图 1.2 单摆

提升力$u(t)$在升降机系统中是控制变量。

例 3 单摆运动。

一个质量为m的小球系在长为l的线的底端。在外力作用下，小球稳定在某一位置上。撤去外力，摆在重力作用下将在平衡点附近运动，如图 1.2 所示。假设摆的运动保持在一个平面内，当小球到达A'点时，它的运动速度方向是沿圆弧AA'的切线方向，其数值为$l\frac{d\theta}{dt}$。把重力mg分解成Q、P两个分量，对球的运

动起作用的是 Q，它总是指向小球的自然平衡位置 A，其数值等于 $mg\sin\theta$，因此有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta, \tag{1.1.3}$$

它就是 $\theta(t)$ 满足的微分方程。

例 4 R-C-L 电路。

在图 1.3 的 R-C-L 电路中，设 $u(t)$ 是输入电压，$x_1(t)$ 是电容器两端的电压，$x_2(t)$ 是迴路的电流。根据欧姆定律，电阻 R 上的压降为

$$u_R = Rx_2(t)$$

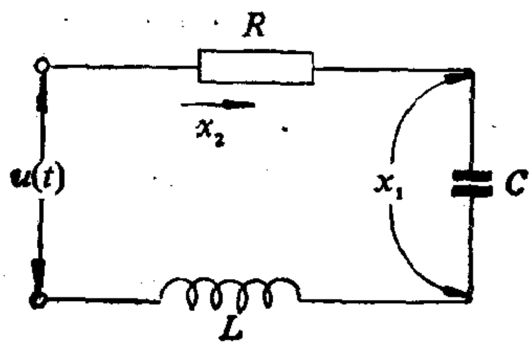

图 1.3 R-C-L 电路

电容 C 上的压降为

$$x_1(t) = \frac{Q}{C},$$

其中 Q 是电容上的电量。

电感 L 上的压降为

$$u_L = L\frac{dx_2}{dt}.$$

于是

$$\begin{cases} x_2(t)R + x_1(t) + L\dfrac{dx_2}{dt} = u(t), \\ \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{C}\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{1}{C}x_2, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{C}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{R}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u(t). \end{cases} \tag{1.1.4}$$

(1.1.4) 式是描述 R-C-L 电路的微分方程组.

2. 微分方程的分类和微分方程的解

前面导出的方程 (1.1.1) 至 (1.1.4) 都包含有未知函数和它的导数，因此都是微分方程. 微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为该微分方程的阶数. 因此，(1.1.1) 是一阶微分方程，(1.1.2)、(1.1.3) 是二阶微分方程，(1.1.4) 是包含两个未知函数的一阶微分方程组.

在方程 (1.1.1) 和 (1.1.2) 中只出现了未知函数及其导数的线性函数，而没有出现它们的非线性函数，这样的方程称为线性微分方程. 方程 (1.1.3) 中出现了 $\dfrac{g}{l}\sin\theta$ 项，它是未知函数 θ 的非线性函数，故此方程称为非线性微分方程. 一般的 n 阶微分方程可写为

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \tag{1.1.5}$$

求解的问题是研究微分方程的一个中心问题. 所谓一个

函数 $x=\phi(t)$ 在区间 (a, b) 上是微分方程 (1.1.5) 的解，是指将函数 $\phi(t)$ 代入微分方程 (1.1.5) 得到一个在区间 (a, b) 上的恒等式，即在区间 (a, b) 上

$$\frac{d^n\phi(t)}{dt^n}\equiv f\left(t,\ \phi(t),\ \frac{d\phi}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}\phi}{dt^{n-1}}\right).$$

例如，以 Ce^{-kt} 代替微分方程(1.1.1)中的 x，得到恒等式

$$\frac{d}{dt}(Ce^{-kt})\equiv -k(Ce^{-kt}).$$

因此 $x=Ce^{-kt}$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上是微分方程 (1.1.1) 的解，这里 C 是一个任意常数。

类似地可以验证，函数

$$x(t)=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$$

是二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0 \tag{1.1.6}$$

的解，这里 C_1，C_2 是任意常数。

在上面的例子中，一阶方程 (1.1.1) 的解 $x=Ce^{-kt}$ 包含一个任意常数 C，二阶方程 (1.1.6) 的解 $x=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$ 包含两个任意常数 C_1、C_2，它们分别称为微分方程 (1.1.1) 和 (1.1.6) 的通解。一般地，n 阶微分方程的包含 n 个任意常数的解称为 n 阶微分方程的通解，而任一个固定的解都称为特解。例如当在通解 $x=Ce^{-kt}$ 中取 $C=1$ 时，$x=e^{-kt}$ 是微分方程 (1.1.1) 的一个特解。当在通解 $x=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$ 中取 $C_1=1$，$C_2=2$ 时，$x=\sin 2t+2\cos 2t$ 是微分方程 (1.1.6) 的一个特解。

习　　题

1. 指出下列微分方程哪些是线性微分方程？哪些是非线性微分方程？

(1) $\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$；

(2) $\dfrac{dx}{dt}=a\sin x$，a 是常数；

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+t^2\dfrac{dx}{dt}+x=b$，$b$ 是常数；

(4) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3x\dfrac{dx}{dt}=5$；

(5) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=1$。

2. 验证下面给出的函数是对应的微分方程的解。

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$，(a)$x=\cos t$，(b)$x=\sin t$，(c) $x=A\cos t+B\sin t$，A、B 是常数；

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，$x=A\sin(\omega t+\varphi)$，$A$、$\omega$、$\varphi$ 是常数。

3. 已知函数 $x=e^{-5t}$ 是微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m\frac{dx}{dt}+2x=0$$

的一个解，试求方程中的参数 m 的值。