非线性控制系统导论

高为炳 编著

科学出版社

非线性控制系统导论

高为炳 编著

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书全面地讲述了非线性控制理论的基本概念、理论及方法. 内容包括: 非线性控制系统概论、相平面方法、李亚普诺夫稳定性理论、鲁里叶系统、非线性系统的频域方法、输入输出稳定性、非线性系统的近似方法、多非线性系统、大系统、非线性控制系统的综合、专门问题、微分几何控制理论.

本书注重概念及主要理论的讲述，内容全面系统，有较多的插图及习题，便于读者学习时参考.

本书可作为系统和控制专业的大学高年级学生和研究生的教材，以及有关研究领域的广大科技工作者的参考书.

非线性控制系统导论

高为炳 编著

责任编辑 李淑兰 孙月湘

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1988 年 10 月第一次印刷 印张：40 1/2

印数：0001—1,300 字数：944,000

ISBN 7-03-000649-6/TP·41

定价： 25.00 元

前 言

非线性控制系统一般理解为由非线性微分方程所描述的系统，它和线性系统一样，都是真实系统的一种模型.

有很多情况，系统本身可以用线性模型来描述，或者更进一步说，我们要考虑的系统的某些现象，可以利用系统的线性模型来达到目的. 但是也有相当多的情况，不可能用系统的简单的线性模型作为我们对该情况下真实系统的替身. 在工程技术、自然、社会、经济等众多领域中，这类现象是很多的. 例如，当我们用线性模型对某实际系统进行综合后得到的被控系统，尽管从理论上，仿真结果上都是十分理想的，但研究出的被控系统，即对象加上了控制回路之后，却出现不稳定，并出现不衰减自持续的振荡，即所谓的自振，因而控制系统是不能工作的. 大量的事实说明，在很多情况下，人们必须建立真实系统的非线性模型以代替简单、容易处理的线性模型.

非线性系统中可能发生的现象是十分复杂、十分丰富的. 严格地说，对非线性系统，我们目前虽然已经历了百余年的研究，认识仍是很不充分的. 众所周知，线性系统中只可能存在衰减过程、自由振荡(由初始扰动激发的，幅值大小与初始扰动大小成比例)以及无限发散过程. 顺便强调一下，这里所说的无限发散过程，只是在真实系统的线性模型中可能发生的，并不表示真实系统中确实发生. 事实上在真实系统中它是绝对不可能的，因为无限发散需要无限大的能量功率. 这正好表明用线性模型代替真实系统，在此情况下是不正确的. 我们说明了线性系统(系统的线性模型)中可能发生的现象是十分简单的，只有三种类型. 但在非线性系统(系统的非线性模型)中，还可能出现自振、多平衡状态、混沌、更复杂过渡过程等等. 而且对每一现象，也呈现出丰富的多样性，如自振，系统就可以有不同类型、数目、特点的自振. 如果考虑有外周期扰动下的非线性系统，情况就更加复杂化. 可以毫不夸大地说，我们对非线性系统中已研究过的现象，认识得很不充分，而且还有很多现象还未认识到. 例如，近十余年人们才认识到，混沌现象是非线性系统中发生的一种现象.

从研究方法上看，线性系统的解是可以求出来的，叠加原理成立. 但相反地，非线性系统除去个别的例子外，是不能用函数表示出它的解的，即不能求解. 因此，在相当长的一段历史时期里，不求解非线性系统而直接依据非线性系统来探讨系统的定性性质，成为研究非线性系统的主要内容之一. 用李亚普诺夫方法研究非线性系统的绝对稳定性，就是在这方面取得的光辉成就. 与此同时，只适于低阶系统的相平面方法，描述函数法(谐波平衡法)等近似方法，也得到了完善的发展. 当然还可以指出一些关于非线性控制理论的其他成就，这将在本书中讲述. 但是，这些方法能解决的问题是很有限的.

从非线性控制理论迄今解决的问题而论，很多重大的、根本的问题，有些是空白，有些只有一个开端，如可控性，可观测性等系统的基本性质，系统中可能发生的现象、过程的种类及其寻求方法，控制系统的综合方法等. 这表明与线性系统理论相比较，非线性控制系统的理论体系远未建立起来，也远远不能满足工程技术及各种其他领域中出现的问题的

需要.

非线性系统的发展,几乎与线性系统是同时的. 如果说非线性控制系统的研究,较之线性系统是滞后一步的话,我们也应指出,它的发展是从未间断的,一直受到充分的重视.

近年来,非线性系统理论受到相当大的挑战.机器人是一个十分复杂、高度非线性的系统,宇宙飞行器、直升飞机、大型柔性结构的控制,也都是复杂的非线性系统. 这就给非线性控制理论提出了一个系统理论及实际应用的问题.

综上所述,我们知道,非线性控制系统经过长期的大量研究,尽管有了很多的成果,但是对于建立一套完整的理论体系来说,还是远远不够的. 此外,由于科学技术及各方面的实际要求,非线性控制理论正在受到国际范围内的极大重视,新成果不断出现. 在这种形势下,本书面临的形势是复杂而困难的,这是作者清醒地看到的.但是作者还是鼓足勇气,将五年前的讲义加以整理出版. 作者真诚地希望本书在大家的帮助下,不断完善. 鉴于国内仅有个别关于稳定性的专著,所以作为第一本介绍非线性控制理论的著作,作者认为首先应使本书包含较全面的内容,这样它只可能是一个导论,讲述已有成就的主要内容.

最后,作者对程勉、吴东南、李文林等同志的帮助表示谢忱. 此外也感谢国家自然科学基金委员会的支持.

目　　录

第一章　非线性控制系统

§1.1　非线性控制系统概论

非线性控制系统，是这样的控制系统，它的运动微分方程是由非线性的常微分方程描述的．或者说，含有非线性元件的系统称为非线性系统．

最早出现的控制系统大都被视为线性的，如液面高度调节器、瓦特蒸汽调节器．这就是说，我们采用了系统的一个线性模型来代替真实的系统．真实的系统中，某些非线性被人们用线性关系代替了，另外一些非线性则被忽略掉了，于是建立起了系统的线性模型．

随着科学技术的发展，被控制的对象种类越来越多，控制装置也更加复杂，同时对控制的精确性也提出了各种更高的要求，线性系统模型就显得不适用了．例如，被控系统中常出现不衰减的自持振动，就是一个突出的例子．这种在实际中观测到的自持振动（简称自振），是线性系统模型中所不能存在的．又例如，各种继电系统被大量的采用，用线性理论也不能分析这类控制系统．工程技术的需要促进了非线性控制系统的不断发展，形成了控制理论的一个分支．

到本世纪 40 年代，对非线性控制系统的研究已取得了明显的进展．主要的研究方法有：相平面方法、李亚普诺夫方法以及谐波线性化方法等．这些方法被广泛地用来解决非线性控制系统问题．但是，这些方法各有其不足之处，都不能成为分析非线性系统的一般工具．例如，相平面方法虽然能够获得定常系统的全部特性（稳定性、过渡过程等等），但对于大于二阶的系统就不便或不能应用了．李亚普诺夫方法仅限于分析系统的绝对稳定性，而且要求非线性元件的特性位于某扇形域内．就是说，这一方法只能用于分析一类非线性系统（称为鲁里叶系统）的稳定性．谐波平衡法（描述函数法）是一近似方法，严格的理论基础尚未奠定，但作为工程上应用的方法，它不失为一种可用的（或辅助使用的）实用工具，但它只能解决有限的问题，如求自振及稳定性分析，而且结果是从近似方法中得出的．

以上情况不是偶然的，因为非线性系统的内容十分丰富，运动类型很多，会出现一些线性系统中不可能出现的特性，如自振、跳跃现象等等，要建立一个能解决全部问题的方法，是不可能的．这一点可确信如下：线性定常微分方程必定有解，也有解的公式，但非线性微分方程一般是不可解的．就稳定性而言，对线性系统可以建立充分必要条件，而对非线性系统，除个别问题外，至多只能建立一些充分条件，而且有时这样的充分条件还比较保守．不仅如此，对大量的非线性系统，即便是建立稳定性的充分条件也是十分困难的，往往得不到结果．此外，有些控制系统其非线性的复杂程度是十分惊人的．

在这样的情况下，非线性系统的研究一直进行着，新结果不断出现．除上面提到的相平面方法，李亚普诺夫方法，谐波平衡法外，又出现了一些新的方法，如频域方法（如波波夫判据等），输入输出稳定性，多非线性系统，继电系统理论，大系统方法，等等．总之，非线性系统理论远非完善，很多问题尚待研究．

就所解决的问题而言，稳定性是非线性控制理论现有成就中的中心问题．过渡过程以及综合方法等的研究结果远不如稳定性的结果．

非线性系统的分析设计，不象线性系统有比较系统的理论方法，一般需要根据系统对象的具体特性，使用线性理论与各种非线性方法，再加上模拟与实验，互相补充，以设计出一种可用的非线性控制系统．例如：先以线性系统进行设计，然后再考虑到非线性特性，用非线性理论进行补充研究，以期能够得到一个比较好的控制系统．总之，可以说目前不存在一种实用的综合步骤，利用它可以设计任意的非线性控制系统．近年来提出的一系列新的综合方法，尽管不能认为是成熟的，本书也将作些介绍．

最优控制理论是非线性控制系统的一种综合方法（如时间最优控制）．由于这一理论已属专门的学科，加上它的实现非常困难，本书将不作为主要内容讲述．

§1.2　一般非线性控制系统的数学表述

§1.2.1　一般情况

研究一般的非线性控制系统，设它由三部分组成：被控对象、测量装置与执行机构，如图 1-1(a) 所示．

记 $\boldsymbol{\xi}$ 为对象的状态向量，它是 n_1 维的；$\boldsymbol{\eta}$ 为测量装置的状态向量，它是 n_2 维的；$\boldsymbol{\zeta}$ 为执行机构的状态向量，它是 n_3 维的．$\mathbf{u}$ 是控制(即控制信号)，它是 m 维的．这样，系统的这三部分的动力学可分别表示为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, t), \tag{1-2-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, t), \tag{1-2-2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}, t), \tag{1-2-3}$$

其中，$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ 和 $\mathbf{f}_3$ 分别为 n_1, n_2 与 n_3 维向量函数；如无内反馈，则 $\mathbf{f}_3$ 中不出现 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$.

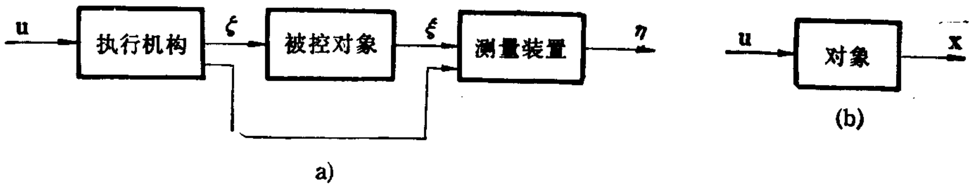


图 1-1

将式(1-2-1)～(1-2-3)合并，并引入 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 维向量 $\mathbf{x}$，得到开路系统的非线性动力学方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{1-2-4}$$

这里，$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{\xi}^T, \boldsymbol{\zeta}^T]^T$；$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \mathbf{f}_3^T]^T$．这时系统的方框图如图 1-1(b) 所示，“对象”是一泛指的术语，其内容由研究者来约定．

应该指出，在研究控制系统时，从所研究的问题的性质及要求出发，我们所关心的有时不是整个状态向量 $\mathbf{x}$，而是它的部分状态或状态的某种向量函数 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$．这些由状态变量构成的向量称为系统的输出向量 $\mathbf{y}$，如果是一 l 维向量，那末系统的方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \tag{1-2-5}$$

系统的框图如图 1-2 所示.

这样系统的动力学方程是比较一般的,它既包含了被控对象的动力学,也包含了测量装置(传感器)和执行机构的动力学.

设系统是定常的, 则 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ 中不出现 t, 这时系统方程(1-2-5)可表示为

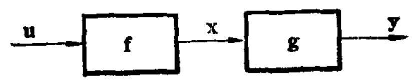


图 1-2

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \qquad (1\text{-}2\text{-}6)$$

若选择状态变量使得当控制 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是系统的平衡状态, 则得到关系式

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

将系统(1-2-6)在其平衡状态 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的近旁展成泰勒级数,记

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ \mathbf{u}=0}},$$

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ \mathbf{u}=0}},$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=0},$$

即

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ \mathbf{u}=0}} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}), \quad b_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ \mathbf{u}=0}} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \cdots, n),\\ (j = 1, 2, \cdots, m),\end{matrix}$$

$$\mathbf{C} = (C_{ij}), \ C_{ij} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=0} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \cdots, n),\\ (j = 1, 2, \cdots, l),\end{matrix}$$

便得到非线性系统的线性化方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

这正是现代控制理论中广泛使用的线性模型(卡尔曼模型).

§1.2.2 几种特殊情况

1. *静态测量装置*

忽略传感器中的动力学,则系统(1-2-1)～(1-2-3)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, t), \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, t), \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}, t). \end{aligned} \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

引入较低维的新状态变量 $x = [\xi^T, \zeta^T]^T$,系统方程(1-2-8)就可以写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \ \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}, t), \qquad (1\text{-}2\text{-}9)$$

其中 $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_3^T]^T$. 设系统的输出 y 为 η 或其部分变元,则

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_0\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}_0\tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \qquad (1\text{-}2\text{-}10)$$

现在系统的运动方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

也具有式(1-2-5)的形式, 只不过 $\mathbf{x}$ 的维数及性质已不同了. 这里 $\mathbf{y}$ 也是某给定维数的

输出向量,$\mathbf{x}$ 的维数 $n = n_1 + n_3$。

2. 非线性控制装置

设被控对象是线性定常的，测量装置也是线性定常的．那么，式(1-2-1)～(1-2-3)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{u}),\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}, \tag{1-2-12}$$

这里,$\boldsymbol{\xi}$ 是被控对象的状态向量；$\boldsymbol{\zeta}$ 是控制作用；$\boldsymbol{\eta}$ 是测量出的向量；$\mathbf{u}$ 是控制信号．一般地,控制信号是表示控制规律的信息,如取线性反馈时,有

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_1\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{u} = \mathbf{K}_2\boldsymbol{\eta}$$

等等．控制信号加到控制机构上产生控制作用 $\boldsymbol{\zeta}$，它是能够使被控对象发生变化的控制力(力矩)、电流等等．

执行机构,如舵机、液压伺服装置、电机、继电器、可控硅等功率放大器,通常是积分元件或惯性元件．考虑了可能的非线性后,如饱和、死区、间隙等,执行机构的动力学方程可表示为

$$\begin{aligned}&\dot{\zeta} = \mathbf{G}\zeta + \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{u}),\\ &\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [f_1(\mathbf{u}), f_2(\mathbf{u}), \cdots, f_{n_3}(\mathbf{u})]^T,\end{aligned} \tag{1-2-13}$$

若不计伺服机中的惯性，$\mathbf{G} = 0$,则得到执行机构的运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{1-2-14}$$

若各执行机构都是独立的，即第 i 个执行机构 ζ_i 只与控制信号 $f_i(u_i)$ 有关,那末 $\mathbf{H} = \mathrm{diag}[h_1, h_2, \cdots, h_{n_3}]$ 是对角阵,式(1-2-14)又可表示为

$$\dot{\zeta}_i = h_i f_i(u_i)\ \ (i = 1, 2, \cdots, n_3). \tag{1-2-15}$$

现在系统的动力学方程(1-2-12)可化为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta},\quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta},\quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{1-2-16}$$

再引入新的状态变量 $\mathbf{x}$ 及输出变量 $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\xi}^T, \zeta^T]^T,\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_0\boldsymbol{\eta},$$

系统(1-2-16)可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{f}(\mathbf{u}),\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}, \tag{1-2-17}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}\end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_0[\mathbf{C},\ \mathbf{D}].$$

现在我们建立起了一类基本的非线性系统的方程(1-2-17)，这也是最简单的一类非线性系统．对这类系统我们假定了：(1)被控对象是线性的,(2)测量是静态的、线性的,(3)控

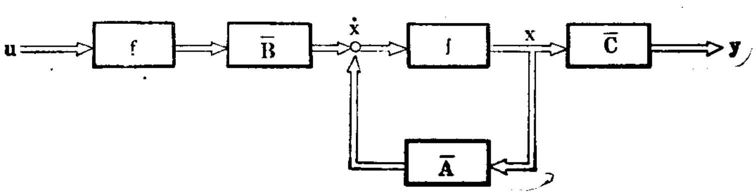


图 1-3

制机构是某些 (n_3 个) 惯性元件但含有非线性，即非线性是执行机构动力学中的可加项．这类系统的方框图如图 1-3 所示．

3. 鲁里叶系统

若系统中只有一个执行机构，则系统的方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(u), \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \tag{1-2-18}$$

这时，$\mathbf{b}$ 是控制分布向量，$f(u)$ 是标量函数，方程(1-2-18)即为鲁里叶系统的直接控制型．

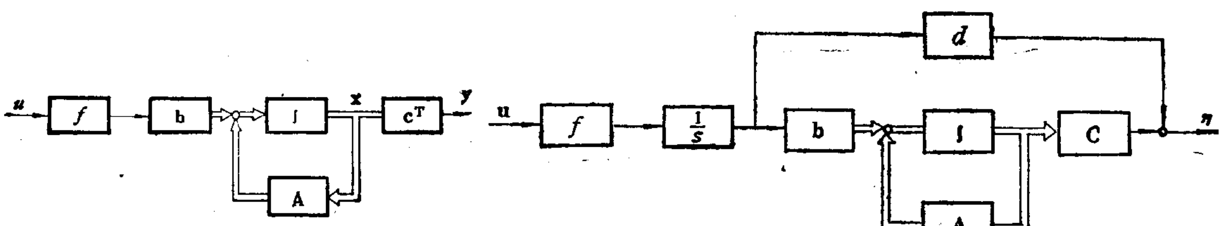
如果这个执行机构是一个无惯性的积分元件，则其非线性方程可写为

$$\dot{\zeta} = f(u), \tag{1-2-19}$$

即式(1-2-14)或(1-2-15)中 ζ 为单变量的特例，那么一般方程(1-2-12)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\zeta, \quad \dot{\zeta} = f(u), \quad \eta = \mathbf{c}\boldsymbol{\xi} + d\zeta, \tag{1-2-20}$$

这就是鲁里叶系统的间接控制型．系统 (1-2-18) 与 (1-2-20) 的框图如图 1-4(a) 与图 1-4(b) 所示．关于这些鲁里叶系统，将在第四章中讨论．



(a)　　(b)

图 1-4

在式(1-2-20)中用 $\mathbf{x}$ 表示被控对象的状态向量 $\boldsymbol{\xi}$，用 y 表示输出向量 $\boldsymbol{\eta}$，可将它改写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\zeta, \quad \dot{\zeta} = f(u), \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}\zeta. \tag{1-2-21}$$

今后我们将以系统(1-2-18)与(1-2-21)为研究的重点，并在研究这些系统的基础上，讨论其他更复杂更一般的系统．因为间接控制系统(1-2-21)可以化为直接控制系统形式，即是说，在式(1-2-21)中引入状态向量

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \zeta]^T$$

后，便可将式(1-2-21)表示为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}f(u), \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{c}}\mathbf{z}, \tag{1-2-22}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}} = [\mathbf{C}, d].$$

所以今后提到单非线性系统时，我们将采用系统模型(1-2-18)，去掉上横线，方程可写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(u), \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}. \tag{1-2-23}$$

4. 小结

上面我们建立了控制系统的运动微分方程，在一般情况下，考虑到对象、测量装置及

控制装置的动力学及非线性时为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \tag{1-2-24}$$

对定常情况有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{1-2-25}$$

若只考虑控制装置中的非线性,则系统的运动方程可化简为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}). \tag{1-2-26}$$

设控制器均为伺服机,但具有可加型非线性特性,这时系统方程可写成

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{1-2-27}$$

忽略伺服机中的惯性项,又得

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{1-2-28}$$

如果几个伺服控制装置间没有耦合,则上式中 $\mathbf{H}$ 是对角阵.式(1-2-27)还可表示为一般形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \tag{1-2-29}$$

只有一个非线性控制的系统,即最常见最基本的非线性控制系统的模型,其动力学方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(u), \quad y = \mathbf{c}\mathbf{x}. \tag{1-2-30}$$

这里 $f(u)$ 是标量非线性函数,它表示控制中的非线性特性.这类只包含一个非线性特性的控制系统,是鲁里叶于 1944 年首先提出的,他对此系统进行了系统的研究,从而奠定了现代非线性控制的基础,所以此系统也常简称为"鲁里叶系统".

本书首先将着重研究鲁里叶系统,用以阐明非线性系统的特征、研究方法.然后考虑多非线性系统(控制中含有多个非线性特性):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}.$$

这里 $\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 阵,$\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 是 m 维的,系统有 m 个非线性控制.最后,研究最一般的非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

系统的对象、控制、输出均可以是非线性的.

5. 调节与跟踪问题

在列写系统的运动微分方程时,很重要的一个基本概念是诸变量 x_i, y_i, u_i 的零点(坐标原点)如何确定.对此有以下两种考虑.

(1)选择平衡位置:平衡状态为零点.设我们建立起系统的方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t).$$

在平衡状态下

$$\mathbf{x}=0,\ \mathbf{y}=0,\ \mathbf{u}=\mathbf{0},$$

因此有关系式

$$\mathbf{f}(\mathbf{0},\mathbf{0},t)\equiv\mathbf{0},\ \mathbf{g}(\mathbf{0},t)\equiv\mathbf{0}.$$

对此系统,调节问题可表述为：求反馈(控制)

$$\mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y})$$

使得闭路系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t),\quad \mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y})$$

的解 $\mathbf{y}(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}.$$

跟踪问题则可表述为：对给定的向量函数 $\mathbf{Y}(t)$，寻求控制 $\mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y})$，使得偏差 $\mathbf{e}(t)=\mathbf{y}(t)-\mathbf{Y}(t)$，满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{e}(t)=\mathbf{0}.$$

(2)选择给定运动状态(工作状态) $\mathbf{Y}(t)$为平衡状态．这时 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t)$分别为状态、输出、控制偏离给定运动状态(工作状态)的量．因此，$\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 就正好表示系统处于工作状态,因为任何物理量都有一个基标问题，它都是相对的,即便称为绝对温度的温度量,也是相对的．这时若系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t),\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},t),\mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y})$$

满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\mathbf{0},$$

即满足了输出跟踪的目的．当 $\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$ 时，也就是输出跟踪的目的得到满足．但形式上,上述问题是一个镇定问题．因为我们要求 $\mathbf{y}(t)$跟踪(趋向) $\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

我们一旦从上面的论述中建立起概念：调节 ($\mathbf{y}(t)\to\mathbf{0}$) 问题是跟踪问题 ($\mathbf{y}(t)\to\mathbf{Y}(t)$)的特殊情况(当 $\mathbf{Y}(t)\equiv\mathbf{0}$),跟踪问题可以化为调节问题(取相对给定运动的偏离为新的变量坐标)，我们就可以根据问题的性质,给出问题的方便的数学表达式.

如果不加说明,对系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t),\ \mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

求 $\mathbf{h}(\mathbf{y})$,使得 $\mathbf{y}(t)\to\mathbf{0}$,既可以是调节问题,也可以是某一跟踪问题,视诸变量的坐标原点为平衡点或给定状态而定.

§1.3 非线性系统的控制问题

§1.3.1 控制方法

研究非线性控制系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{u}),\ \mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}.\tag{1-3-1}$$

设给定的指令函数为 l 维向量函数 $\mathbf{Y}(t)$,我们希望寻求控制 $\mathbf{u}$,使偏差向量

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{y}(t)-\mathbf{Y}(t)$$

满足要求:

(1)当 $t\to\infty$时，$\mathbf{e}(t)\to\mathbf{0}$,即系统具有稳定性;

(2) $\mathbf{e}(t)\to\mathbf{0}$ 时,系统的动态过程具有优良品质.

具体实现控制有两种方案:

(1)开路控制. 这时只要求出 $\mathbf{u}$ 的时间函数

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t),$$

控制问题就算解决了.

(2)闭路控制,即反馈控制. 这是实现自动控制的基础. 这时 $\mathbf{u}$ 是输出的线性函数

$$\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{y},$$

其中 $\mathbf{K}$ 为 $m\times l$ 维反馈阵,或非线性函数

$$\mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

其中 $\mathbf{h}(\mathbf{y})=[h_1(\mathbf{y}),\cdots,h_m(\mathbf{y})]^T$ 是 m 维非线性向量函数.

按控制变量的不同,通常又将反馈(即控制)分为

(1)输出控制(输出反馈). 控制是输出 $\mathbf{y}$ 的函数(线性的或非线性的):

$$\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{y},\ 或\quad \mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

如前所述.

(2)状态控制(状态反馈). 控制是状态 $\mathbf{x}$ 的函数或线性或非线性:

$$\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{x},\ 或\quad \mathbf{u}=\mathbf{h}(\mathbf{x}).$$

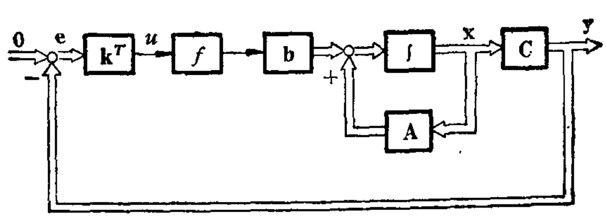
显然,状态反馈是输出反馈的特殊情况,当 $\mathbf{C}=\mathbf{I}$(单位阵)时,输出向量即状态向量 $\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

但是我们不能只研究输出反馈,然后从中得到使用状态反馈时的结论. 这是因为对某些问题,如极点配置等等,用状态反馈可以得出问题的解答,但使用输出反馈,常常根本得不到问题的解答. 所以在研究反馈时,一般总是先考虑状态反馈,然后再考虑输出反馈,看看关于状态反馈的哪些结果可以推广到输出反馈. 但在讲述问题时,为了避免重复,可以只讲输出反馈.

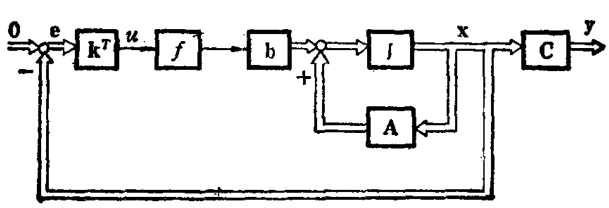
考虑最简单的非线性系统(含单非线性特性)

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}f(u),\ \ \mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x},\\&u=-\mathbf{k}^T\mathbf{y},\end{aligned}\tag{1-3-2}$$

其框图示于图 1-5(a) 中.



(a)



(b)

图 1-5

除了上述输出反馈系统外，若系统的阶次不高，状态是可以测量到的，应用状态反馈

$$u=-\mathbf{k}^T\mathbf{x}$$

作为控制规律，就可以得到下列非线性状态反馈系统（1-3-3），如图1-5(b) 所示，式(1-3-2)中这时 $\mathbf{C}=\mathbf{I}$.

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\mathbf{f}(u),\ u=-\mathbf{k}^T\mathbf{x}. \tag{1-3-3}$$

反馈控制具有无比的优越性，是几乎所有控制系统采用的基本控制原理，也是自然界的普遍控制原理. 反馈控制的独特之处在于：实现自动控制，对各种扰动，输入都具有一定程度的、较宽的自适应性，对系统中的参数波动也有一定程度的自适应性，对系统中出现的非线性偏离也存在一定的允许限制，等等. 上面提到的自适应性一般地理解为：当某些条件(如干扰、输入、系统参数等)有一些变化时，系统的稳定性及其他有关特性得到保持，且系统的品质变化也不大. 这也就是反馈控制原理之所以获得普遍应用的原因.

在控制理论中，所谓控制指的就是反馈控制.

控制问题，按指令函数 $\mathbf{Y}(t)$可分为

(1)调节问题，这时 $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{0}$;

(2)跟踪问题，这时 $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t)$是给定函数(标量或向量函数).

跟踪问题是一个比较困难的问题，目前只有低阶的线性系统的跟踪问题研究得比较多，应用也相当广泛，形成了一个独立的学科——拖动理论.

在一般控制理论，特别是非线性控制理论中，我们首先研究调节问题，这时主要出现两类问题：

(1)分析：研究已知的非线性系统的一些重要特性，如稳定性、稳定度(衰减度)、鲁棒性等等.

(2)综合：反馈控制规律的确定，如对系统(1-3-2)求向量 $\mathbf{k}$.

这两个问题分述如下.

§1.3.2 控制系统的分析

控制系统的分析问题，主要包括：

(1)稳定性

即判定某系统是否稳定. 这对控制系统来说，是首要的问题. 因为如果系统不稳定，这就表示控制的目标是不能实现的，自然其他问题就谈不到了.

在线性系统中已建立起很多种稳定性判据，以下类型是最常用的.

1)代数判据：古尔维兹判据、路斯检验法等.

2)频域作图判据：奈奎斯特判据、米哈依洛夫判据，对数频率判据等.

3)特征根判据：根轨迹方法，盖氏（Gersgorin）定理等.

4)参数空间稳定区：D 域法.

5)解析方法：李亚普诺夫方法，泛函方法等.

这些方法及途径，也是非线性方法的启发性的基础.

(2)过渡过程

在线性控制系统理论中，存在一些过渡过程的品质指标. 对非线性系统，系统的过渡过程的品质指标主要的是“衰减度”或称“稳定度”.