现代数学基础丛书

非线性发展方程

李大潜 陈韵梅 著

科学出版社

现代数学基础丛书

非线性发展方程

李大潜 陈韵梅 著

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书系统介绍近几年提出的处理有关非线性发展方程柯西问题的整体经典解存在性的有效方法及相应的重要结果．书末附有较详细的参考文献，便于读者在这一方向上开展研究工作．

本书可供大学数学系、应用数学系、计算数学系及有关专业的大学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考．

现代数学基础丛书
非线性发展方程
李大潜　陈韵梅 著
责任编辑　吕　虹
科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1989 年 12 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32
1989 年 12 月第一次印刷　　印张：7 1/2
印数：0001—1 400　　字数：187 000
ISBN 7-03-001277-1/O · 285
定价：8.60 元

J211/69/24

前　　言

发展方程 (Evolution Equation)，又称演化方程或进化方程，广义地说，是包含时间变数 t 的许多重要的数学物理偏微分方程的统称，在物理、力学或其他自然科学中用来描述随时间而演变的状态或过程. 狭义地说，它是指可以用半群方法化为一个 Banach 空间中的抽象常微分方程的 Cauchy 问题来处理的那些数学物理方程. 波动方程、热传导方程、Schrödinger 方程、流体动力学方程组、KdV 方程、反应扩散方程等等以及由这些方程通过适当的方式耦合起来的种种耦合方程组，都属于发展方程的范畴.

对线性的发展方程，例如对波动方程、热传导方程及 Schrödinger 方程等，我们知道，只要初值适当光滑，其 Cauchy 问题的解也必具有适当的光滑性，而且在整个半空间 $t \geqslant 0$ 上是整体存在的. 作为一个最简单的例子，对下述的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & (1) \\ t = 0: \quad u = \varphi(x), & (2) \end{cases}$$

易知其解为如下的右传播波

$$u = \varphi(x - t). \tag{3}$$

显然，此解在 $t \geqslant 0$ 上（实际上还在整个 (t, x) 平面上）是整体存在的，而且和初值有同样的正规性.

但对于非线性发展方程，情况就根本不同了. 一般说来，非线性发展方程的 Cauchy 问题的整体经典解通常只能在时间 t 的一个局部范围中存在，即使对充分光滑甚至还充分小的初值也是如此；相应地，解在有限时间内会失去正规性，而产生奇性（解本身或其某些导数趋于无穷），这一现象称为解的破裂 (blow up). 为了说明这一点，我们给出下面的几个简单的例子.

例 1 先看非线性常微分方程的情形.考察如下的 Riccati 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}=v^2, & (4)\\ t=0:\quad v=v_0. & (5)\end{cases}$$

易知其解为

$$v=\frac{v_0}{1-v_0t}. \tag{6}$$

于是若

$$v_0>0, \tag{7}$$

则当 $t\nearrow\dfrac{1}{v_0}$ 时,就有 $v\to+\infty$,从而解发生破裂,而不能在 $t\geqslant 0$ 上整体存在. 这时,只能在时间区间 $\left[0,\dfrac{1}{v_0}\right)$ 上得到 Cauchy 问题 (4)-(5) 的局部解.

例 2 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & (8)\\ t=0:u=\varphi(x). & (9)\end{cases}$$

在此 Cauchy 问题的经典解 (C^1 解) $u=u(t,\ x)$ 存在的范围内,可由

$$\frac{dx}{dt}=u(t,x) \tag{10}$$

定义其特征线. 由方程(8),沿任一特征线有

$$\frac{du}{dt}=0, \tag{11}$$

即 u 在每一特征线上保持为常数, 从而由(10)式可知特征线必为直线. 于是,过初始轴上任一点 $(0,\alpha)$ 的特征线方程为

$$x=\varphi(\alpha)t+\alpha, \tag{12}$$

在其上

$$u = \varphi(\alpha). \tag{13}$$

设 $\varphi(x)$ 的 C^1 模有界. 在 t 值较小时,有

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \varphi'(\alpha)t + 1 > 0, \tag{14}$$

故可由(12)式反解出

$$\alpha = \alpha(t, x), \tag{15}$$

再代入(13)式,就可得到 Cauchy 问题(8)-(9)的局部经典解

$$u = \varphi(\alpha(t, x)). \tag{16}$$

这说明: Cauchy 问题(8)-(9)必存在唯一的局部经典解.

但只要 $\varphi(x)$ 不是一个单调不减函数,必存在初始轴上的两点 $(0, \alpha_1)$ 及 $(0, \alpha_2)$,使得

$$\alpha_1 < \alpha_2, \tag{17}$$

而

$$\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2). \tag{18}$$

这样,过此二点的特征线

$$x = \varphi(\alpha_1)t + \alpha_1 \tag{19}$$

及

$$x = \varphi(\alpha_2)t + \alpha_2 \tag{20}$$

必在有限时间内相交,在交点处的解值就不能唯一确定. 这说明: 此时 Cauchy 问题 (8)-(9) 决不可能在 $t \geqslant 0$ 上存在整体经典解,而必在有限时间内出现解的破裂(在力学上对应于激波的形成).

例 3 考察如下非线性热传导方程的混合初-边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^2, & (21) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, & (22) \\ t = 0: u = \varphi(x). & (23) \end{cases}$$

这里,求解区域是柱形区域 $Q = (0, \infty) \times \Omega$,其侧边界为 $\Sigma = (0, \infty) \times \Gamma$,而 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域,Γ 为其边界,且适当光滑.

容易证明，只要初值满足条件

$$\int_{\Omega}\varphi(x)dx>0, \tag{24}$$

混合问题(21)—(23)就决不可能在Q上存在整体经典解.

事实上，令

$$U(t)=\int_{\Omega}u(t,x)dx, \tag{25}$$

将方程(21)的两端对x积分，利用 Green 公式并注意到边界条件(22)，就可得到

$$\frac{dU(t)}{dt}=\int_{\Omega}u^2(t,x)dx, \tag{26}$$

注意到利用 Hölder 不等式，有

$$U(t)\leqslant\left(\int_{\Omega}u^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot|\Omega|^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

其中$|\Omega|$表示区域Ω的体积，就可得到

$$\frac{dU(t)}{dt}\geqslant\frac{1}{|\Omega|}U^2(t), \tag{28}$$

而

$$U(0)=\int_{\Omega}\varphi(x)dx>0. \tag{29}$$

若记$V(t)$为下述 Riccati 方程的 Cauchy 问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{dV(t)}{dt}=\dfrac{1}{|\Omega|}V^2(t), & (30)\\[2ex] V(0)=\displaystyle\int_{\Omega}\varphi(x)dx>0, & (31)\end{cases}$$

显然有

$$U(t)\geqslant V(t). \tag{32}$$

再由例1的结果，知$U(t)$必在有限时间内趋于无穷，从而原混合问题(21)—(23)的解必在有限时间内破裂.

上面这几个简单的例子说明，对非线性发展方程的 Cauchy 问题或混合初-边值问题，即使初值充分光滑（甚至充分小），其经

典解的整体存在性一般是无法保证的．这是非线性发展方程区别于线性发展方程的一个重要的特点．

但另一方面，在一些特殊的条件下，对非线性发展方程仍然可以得到整体经典解．事实上，在例 1 中，若初值

$$v_0 < 0, \tag{33}$$

则解就在 $t \geqslant 0$ 上整体存在，且当 $t \to +\infty$ 时，衰减为零．在例 2 中，~~若 $\varphi(x)$ 是~~ x 的单调不减函数，即有

$$\varphi'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{34}$$

则过初始轴上点所作的特征线族在 t 增加的方向是发散的，永不会在 $t \geqslant 0$ 上相交；此时对任何 $t \geqslant 0$，均可从(12)式反解得(15)，从而可得到在 $t \geqslant 0$ 上的整体经典解 (16)．此外，在空气动力学中，两个疏散单波的干扰问题也提供了一个在 $t \geqslant 0$ 上存在整体经典解的重要的实例．

通过上面的讨论，我们可以看到，对非线性发展方程而言，应该考察下面两方面相辅相成的问题．

(一) 在什么条件下，所考察的非线性发展方程的定解问题(包括 Cauchy 问题，各种混合初-边值问题及自由边界问题…)存在着唯一的整体经典解．并在此基础上研究解的整体性态，特别是当 $t \to +\infty$ 时的渐近性态．

(二) 在什么条件下，所考察的非线性发展方程的定解问题不存在整体经典解，而必在有限时间内发生解的破裂现象．并在此基础上深入考察解在破裂点的性态，例如究竟是解的本身还是解的某一阶偏导数首先发生破裂，解在破裂点的奇性特征以及破裂点集的性质等等．

研究这两方面问题的意义是很明显的．对一些重要的数学物理方程的解的整体性态(例如解的稳定性等)的研究以及有关的数值求解方法的讨论，都要以解的整体存在性为前提．另一方面，如果发现解会在有限时间内破裂，而这种破裂的性态不是相应的物理模型所允许的，就反过来说明所归结的数学模型有问题，而必须加以修改；如果这种破裂现象的出现对所考察的物理模型是允许

的，由于相应的物理过程决不会中止于某一时刻，必定要继续发展，我们就必须在一个更广的函数类中来考察问题的解（例如对空气动力学方程组，就要考虑到出现激波的可能性，而在包含间断性的函数类中求解）。

对非线性发展方程的经典解的整体存在性的研究，已经有了很多的结果，并已发展了不少有效的处理方法，例如紧致性方法、单调性方法、半群方法、补偿紧致方法等等。但由于发展方程包含的范围十分广泛，非线性的具体特点又多种多样，同时如上所述往往只能在一些相当特殊的条件下才能得到经典解的整体存在性，因此，已有的不少结果往往只是针对某一特定的物理模型，对某一类具体方程的定解问题而得到的，总的说来结果还显得比较零碎，远未形成一个相当一般的理论。

自八十年代初开始，对非线性发展方程的经典解的整体存在性的研究提出了一套新的处理方法，就是在通常对解的能量估计的基础上，再利用相应的线性齐次方程的解在 $t\to+\infty$ 时的衰减性质，并将两者有机地结合起来，就可在一定的条件下，在小初值的情形得到经典解的整体存在性，且说明解在 $t\to+\infty$ 时仍具有一定的衰减性。

线性齐次方程的解在 $t\to+\infty$ 时的衰减性在小初值情形会导致相应的非线性方程的解的整体存在性及在 $t\to+\infty$ 时的衰减性，这在常微分方程的情形是一个熟知的事实。事实上，对常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \tag{35}$$

其一次近似，即相应的线性齐次方程组为

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \tag{36}$$

其中

$$A=\nabla f(0). \tag{37}$$

若 A 的一切特征值均具有负的实部，此线性齐次方程组（36）

的解在 $t\to+\infty$ 时就具有指数衰减．此时由常微分方程的渐近稳定性定理，只要初值适当小，原方程组 (35) 的解必在 $t\geqslant 0$ 上整体存在，且在 $t\to+\infty$ 时衰减到零．注意到

$$f(x)=Ax+O(|x|^2), \tag{38}$$

原方程组 (35) 可视为线性齐次方程组加上高阶摄动项后的结果．这说明在常微分方程组的情形，若线性齐次方程组的解具指数衰减，则加上高阶摄动项后的非线性方程组的具小初值的解必在 $t\geqslant 0$ 上整体存在，且在 $t\to+\infty$ 时仍具有衰减性．

这样，上面所说的这一套新的处理方法，实际上可以看成是常微分方程的渐近稳定性理论在偏微分方程情形的推广．但一般说来，在偏微分方程的情形，相应的线性齐次方程的解即使在 $t\to+\infty$时有衰减，也可能不是指数型的衰减，而只是多项式型的代数衰减，而且其衰减的速度往往和空间变数的维数 n 有关(一般说来，维数愈高，衰减性质愈好)．利用这一衰减性，仍可在小初值的情形对相应的非线性发展方程得到经典解的整体存在性及在 $t\to+\infty$ 时的衰减性．这里所考察的非线性发展方程，可以是在相应的线性发展方程上加上任意的二阶或二阶以上的非线性摄动项而得到的，因此可以对相当一大类非线性发展方程得到统一的结果，这是以往其他一些处理解的整体存在性的方法所不及的．但这一方法也有一个较大的限制，即通常只能对小初值的情形得到结果，而且由于衰减性质和空间维数有关，往往还要对空间维数加以一定的限制(维数如果太低，解可能不衰减或衰减程度不足以保证解的整体存在性)．

在本书中，我们将系统介绍上述处理整体经典解存在性的方法及相应的结果．限于篇幅，并为了方便地说明这一方法的实质，我们仅对非线性热传导方程和非线性波动方程这二类在应用上常见的方程进行讨论，而且只限于考察这二类方程的 Cauchy 问题．对其他一些类型的非线性发展方程以及各种类型的耦合方程组，对内、外区域上的混合初-边值问题等，原则上均可以类似地进行讨论，但在本书中将不予涉及．关于解的破裂现象，在本书中也将

只提及有关的结果，而不作具体的讨论。但对所有这些，我们都将在书末给出一个尽可能完全的文献目录，以供有兴趣的读者查阅、参考。

本书中所叙述的有关整体经典解存在性的结果，除包含了作者自己的一些研究成果外，其余都是在 S. Klainerman [1,2,6], S. Klainerman 和 G. Ponce [1] 及 A. Matsumura [2] 等几篇新近的著作中所得到的结果，但在处理及叙述的方法上，却和这几篇著作以及传统的做法有较大的不同和明显的改进。

我们知道，非线性问题的解往往是不能直接求得的，通常必须先对一类较易处理的逼近问题求得原问题的近似解，然后通过对近似解建立适当的估计式，再过渡到极限而得到原非线性问题的解。在 S. Klainerman [1—2] 中，为了得到 Cauchy 问题的逐次近似解，并保证其在整个求解区域 $t \geqslant 0$ 上的收敛性，利用了 Nash-Moser-Hörmander 迭代格式。这一方法对处理在普通迭代过程中导数发生损失的问题是相当有效的，但整个讨论显得相当复杂，而且在 Cauchy 问题的情况并不是必要的。在 S. Klainerman [6], S. Klainerman 和 G. Ponce [1] 及 A. Matsumura [2] 等工作中，则采用了局部解延拓法来证明 Cauchy 问题的整体经典解的存在性。局部解延拓法实际上将整个证明过程分为二步：第一步先通过近似解序列在关于 t 的局部区域上的收敛性，来得到局部解的存在性；第二步再利用对解建立适当的一致先验估计式，将局部解延拓为整体解。和前一种方法相比，局部解延拓法显得更为自然，而且也比较简便和清楚，这是目前证明整体解存在性的一个常用的方法。特别在局部解的存在性为已知的情况下，采用这一方法的优点更为突出。但如果要完整地写出证明的全过程，工作量仍然是相当大的。

在本书中，我们对处理这类整体经典解的存在性问题，建立了一套简明而规格化的处理方法，既避免了使用复杂的Nash-Moser-Hörmander 迭代格式，又无须先证明局部解的存在性，就可直接证明整体经典解的存在性，并同时得到解在 $t \to +\infty$ 时的衰减性质，

为此我们引入一个同时体现了解的能量估计及解的衰减性的函数空间作为迭代的基本空间，只利用简单的迭代格式和普通的压缩映象原理，就可直接证明近似解的序列在整个求解区域 $t \geqslant 0$ 上的收敛性．这里对非线性问题的整个讨论只需建立在相应的线性问题的基础上，即只需要利用相应的线性问题的解的存在性及能量估计式，以及相应的线性齐次问题的解当 $t \to +\infty$ 时的衰减估计式．可以看到，采用本书中所用的框架来处理问题，不仅使整个证明过程得到很大的简化（整个证明的工作量和证明局部解存在性时的大体相当），而且可以清楚地理解这一方法的实质，有利于将这一方法应用于更广泛的范围．

在本书中全部讨论所用的主要工具是 Sobolev 空间的理论，包括有关的插值理论．凡是涉及这方面的内容，除有时作必要的说明外，均不加证明地直接引用，读者如有需要可查阅有关的参考书籍．除此以外的内容，都是尽可能自封的．熟悉 Sobolev 空间理论的读者，阅读本书应该不会遇到原则上的困难．需要指出的是，本书对有关乘积函数和复合函数在 Sobolev 空间中的一些估计式，作了相当系统的归纳、整理和推广．这不仅直接满足于本书中所讨论问题的需要，而且对研究其他各种非线性问题也都会经常地发挥作用．

本书中的一部分内容，曾于 1985 年下半年在复旦大学作为研究生课程加以讲授．接着，又于 1986 年上半年在南开数学研究所的偏微年活动中作为一门基本课程讲授了本书的大部分内容，收到了良好的效果，并在此基础上修改定稿．复旦大学偏微分方程研究方向的一些研究生和来自全国各地的很多数学工作者（包括教师和研究生）在作者讲授该课程时给予了热情的支持和协助，南京空军气象学院的黄思训同志还帮助作者誊清了全部书稿，在此一并表示深深的谢意．

限于作者的水平，书中不妥甚至错误之处在所难免，恳请读者批评指正．

作者

一九八六年六月七日

目　录

第一章　非线性热传导方程

§1 引　　言

在本章中，我们将考察 n 维非线性热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u, D_x u, D_x^2 u) \quad \left(\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n}\right), & (1.1) \\ t = 0: \quad u = \varphi(x) \qquad (x = (x_1, \cdots, x_n)), & (1.2) \end{cases}$$

这里记

$$D_x u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = (u_{x_i}, i = 1, \cdots, n), \tag{1.3}$$

$$D_x^2 u = (u_{x_i x_j}, i, j = 1, \cdots, n). \tag{1.4}$$

令

$$\hat{\lambda} = (\lambda; (\lambda_i), i = 1, \cdots, n; (\lambda_{ij}), i, j = 1, \cdots, n), \tag{1.5}$$

假定方程 (1.1) 中非线性项 $F = F(\hat{\lambda})$ 在 $\hat{\lambda} = 0$ 的一个邻域中适当光滑,并满足如下的条件

$$F(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha}), \tag{1.6}$$

其中 $\alpha \geqslant 1$ 为整数.

注 1.1　对于形式上更为一般的非线性热传导方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u, D_x u, D_x^2 u) u_{x_i x_j} = F(u, D_x u, D_x^2 u), \tag{1.7}$$

总可将其改写为

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(0, 0, 0) u_{x_i x_j} = \bar{F}(u, D_x u, D_x^2 u) \tag{1.8}$$

的形式,其中 $\bar{F}$ 满足 $\alpha = 1$ 时的 (1.6)式. 再经过一个自变数的可逆变换,就可以化到形如 (1.1) 的方程,但 (1.6) 式中的 $\alpha = 1$.

关于 Cauchy 问题(1.1)-(1.2)在 $t\geqslant 0$ 上的整体经典解的存在唯一性，首先由 S. Klainerman ([2]) 于1982年借助于热传导方程解的 $L^\infty(\mathrm{R}^n)$ 范数当 $t\to+\infty$ 时的衰减估计以及能量估计式，利用 Nash-Moser-Hörmander 迭代，在上述一般的情形下证明了如下的结果：若空间的维数 n 满足条件

$$\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)<\frac{n}{2}, \tag{1.9}$$

则在小初值的情形（即设 $\varphi(x)$ 在某些 Sobolev 空间中的范数适当小），Cauchy 问题 (1.1)-(1.2) 在 $t\geqslant 0$ 上恒存在唯一的整体经典解，并当 $t\to+\infty$时具有相应的衰减性质. 兹后，S. Klainerman 和 G. Ponce ([1]) 又于 1983年利用局部解延拓法得到同样的结果.

注意到：如果在上述证明中进一步利用热传导方程解的$L^2(\mathrm{R}^n)$范数当 $t\to+\infty$时也具有衰减性，那么还可以将结果加以改进.郑宋穆和陈韵梅（[1, 2]）及 G. Ponce（[1]）差不多同时独立证明了：只要空间维数 n 满足条件

$$n>\frac{2}{\alpha}, \tag{1.10}$$

上面的结果就可以成立. 在 $\alpha=1$ 这一特殊但也是最具有重要性的情形，由 (1.9) 式要求空间维数 $n\geqslant 5$，而按 (1.10) 式只要求 $n\geqslant 3$，结果有了明显的改进；但当 $\alpha>1$，例如 $\alpha=2$ 或 3 的情形，由 (1.9) 式及由 (1.10) 式所得的对空间维数 n 的要求实际上是一样的. 事实上，由 (1.9)式所给出的空间维数 n 和 α 之间的依赖关系可见下表.

$\alpha=$	1	2	3,4,…
$n\geqslant$	5	2	1

而由 (1.10) 式所给出的空间维数 n 和 α 之间的依赖关系则见下页表.

$\alpha =$	1	2	3,4,…
$n \geqslant$	3	2	1

为了得到(1.10)式所示的结果，G. Ponce 利用了局部解延拓法，而郑宋穆和陈韻梅则仍采用了 Nash-Moser-Hörmander 迭代的手续。

这里指出，由(1.10)式所示的对空间维数 n 的限制是必要的。事实上,对一个特殊形式的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^{1+\alpha}, \\ t = 0: \ u = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.11}$$

H. Fujita ([1]) 及 F. B. Weissler ([1]) 已先后分别证明了在

$$n < \frac{2}{\alpha} \tag{1.12}$$

及

$$n = \frac{2}{\alpha}. \tag{1.13}$$

这两种情形、即使对于小初值也不一定能在 $t \geqslant 0$ 上得到整体经典解,而可能发生解的破裂现象.

在本章中,我们将利用在前言中所述的方法,比较简明地证明在假设(1.10)下具小初值的整体经典解的存在唯一性。同时，在非线性右端项 F 不显含 u 的特殊情形，用类似的方法简单地证明了郑宋穆([3])首先得到的下述结论：此时对空间维数 $n \geqslant 1$ 无需加以任何限制，就可以得到同样的结果（参见李大潜、陈韵梅[1]）。

§2 n 维热传导方程的 Cauchy 问题

我们知道,对下述 n 维齐次热传导方程的 Cauchy 问题