模糊数学及其应用丛书

模糊分析学的结构理论

STRUCTURE THEORY OF FUZZY ANALYSIS

吴丛炘 马 明 方锦暄 编著

贵州科技出版社

模糊数学及其应用丛书

模糊分析学的结构理论

吴从炘　马明　方锦暄　编著

国家自然科学基金资助项目

贵州科技出版社

黔新登(90)03号

模糊分析学的结构理论

吴从炘　马明　方锦暄　编著

贵州科技出版社出版发行
(贵阳市中华北路289号　邮政编码550001)

*

核工业中南三〇六印刷厂印刷　贵州省新华书店经销
787×1092毫米　32开本　9.25印张　190千字
1994年9月第1版　1994年9月第一次印刷
印数1～2000

ISBN7—80584—295—7/O·012　定价:9.30元

《模糊数学及其应用丛书》
资 助 单 位

贵州科技出版社
中国人民解放军国防科学技术大学
贵州师范大学
中外合资贵州永兴电子仪表公司
贵阳大光五金站　吴石川

《模糊数学及其应用丛书》
编辑委员会

学客座教授）

吴从炘 （航空航天部有突出贡献的优秀专家，博士导师，哈尔滨工业大学数学系主任，教授）

吴望名 （上海师范大学数学系主任，教授）

张文修 （西安交通大学研究生院副院长，教授）

郭桂蓉 （博士导师，中国人民解放军国防科技大学副校长兼研究生院院长，教授）

前　　言

自从美国扎德(L. A. Zadeh)教授于1965年建立模糊集合论以来，由于它在处理广泛存在的一种不确定性——模糊性方面的成功，它在处理复杂系统方面的简捷与有力，在某种程度上弥补了经典数学与统计数学的不足，越来越受到欢迎。在这种背景下，随着模糊工程的开发和应用，模糊技术产品的广泛利用，日本于1990年将本田(Honda)奖授予了扎德教授，以表彰这一新方法论的成功。

20多年来，这一新的数学方法从理论到应用，从软技术到硬技术，都有了很大的发展，得到了越来越多的人的关心和支持，他们迫切希望了解这一新方法的研究与进展。在贵州科技出版社等单位的大力支持下，国际模糊系统协会中国分会(China Chapter of IFSA)和全国模糊数学与模糊系统学会组织编辑了《模糊数学及其应用丛书》。

这套丛书选编了一批学术性较强、应用性较好的模糊数学及其应用的专著，这些专著基本上反映了当前国际和国内水平。这些专著均是执笔者多年研究的成果，反映了当前国际同行的动态，其中多数属国家自然科学基金资助项目和国家863高技术计划项目。

我们相信这套丛书的出版，将对国内外模糊数学及其应用的研究与发展起到很好的推动作用。

刘应明

1991.9

内容简介

本书介绍了近十年来模糊分析学结构理论方面的主要研究成果。内容有：第一章，预备知识；第二章，模糊测度空间、模糊可测函数空间与(G)可积函数空间；第三章，模糊数空间与模糊随机变量；第四章，局部凸的模糊拓扑线性空间；第五章，模糊线性邻域空间；第六章，广义模糊赋范空间。

本书可供数学工作者及大专院校师生参考，并可用作研究生教材。

STRUCTURAL THEORY OF FUZZY ANALYSIS

ABSTRACT

The main purpose of this book is to systematically introduce the structrual research on fuzzy analysis. In writing the book, we should be naturally concerned with the set-theoretic structure, algebric structure, topological structure, order structure etc. in every respect of fuzzy analysis so as to give a outline of structural theory of fuzzy analysis. But the limitations make us only deal with the materials in the following five topics to be the Chapter 2 to 6 of the book.

1. Fuzzy measure spaces, fuzzy measurable functions spaces and fuzzy integrable function spaces.

2. N-dimension fuzzy number space and its embedding problems.

3. Locally convex fuzzy topological vector spaces.

4. Linear fuzzy neighborhhod spaces.

5. Fuzzy real line R(I) and R(I)-valued normed spaces.

To make the book more self perfect, we have included the fundamental content of fuzzy set theory, fuzzy algebra, fuzzy topology to be the Chapter 1.

编写说明

众所周知，自 1965 年 L. A. 扎德(L. A. Zadeh)提出模糊集，模糊数学业已成为一个具有广泛应用的新学科。其中，占有重要地位的模糊分析学，其研究成果同样已相当丰富而深入。对此，蒙各方支持，我们曾于 1991 年在国防工业出版社出版了《模糊分析学基础》一书，试图在某种程度上起到一种抛砖引玉的作用。

由于现代经典分析学的结构研究的重大意义，实际上，国内外模糊数学界也一直非常重视模糊分析学的结构研究，它包括了对模糊分析学中种种对象的诸如集论结构，代数结构，拓扑结构以及序结构等等方面的探讨。这决不是经典分析结构理论的单纯移植，它富有模糊数学所特有的方法和内容。

本书尝试以不大篇幅较系统地介绍目前国内外有关模糊分析学结构研究的概貌。为此，书的撰写中采取了下述方式：第一，力求包含这些研究的主要方面；第二，对每一方面研究的阐述，均侧重于最基本的内容，且尽可能自身完备；第三，为方便有兴趣读者进一步了解与学习，书末附有较完整的文献目录，供查阅参考，同时还有一个附记用以说明这些文献与各章的联系；第四，做到与前书，即《模糊分析学基础》一书，主要部分不重复，凡前书属于结构方面研究的内容，如模糊拓扑线性空间、模糊赋范空间，一维模糊数空间等，除为承上启下所必需外均不再列入。

全书共六章，第一章为预备知识；第二章讨论各种模糊可测函数空间和各种模糊可积函数空间；第三章致力于一般的n维模糊数空间，它与一维模糊数空间有较大差异，第四章系局部凸模糊拓扑线性空间与局部m凸模糊拓扑代数；这三章基本上是国内的研究工作。而第五、六两章分别介绍国外关于模糊线性邻域空间和多种广义模糊赋范空间的近期研究。

本书是国家自然科学基金资助项目，并得到中国模糊数学与模糊系统学会，《模糊数学及其应用》丛书编委会和贵州科技出版社的支持，在此特致谢意！

由于水平所限，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

吴从炘
1992年11月18日
于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章 预备知识

本章从模糊分析及其结构理论需要的角度出发，简要概述了模糊集论，模糊代数与模糊拓扑学中的某些基本内容。

§1 模糊集论概要

本节将介绍模糊集理论的一些基本概念以及若干基本运算和基本原理。

定义 1.1 所谓给定论域（非空集）U 上的一模糊子集 A，是指对任何 $x\in U$ 都有一个数 $\mu_A(x)\in[0,1]$ 与之对应，并且称之为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度；即指的是映射

$$\mu_A: U\to[0,1]; x\to\mu_A(x)。$$

而映射 μ_A 又称为是 A 的隶属函数，以下将以 $A(x)$ 简记 $\mu_A(x)$ 并且在不致误解情况下，对模糊子集 A 和它的隶属函数 $A(x)$，我们将不加区分，同时模糊子集也常简称为模糊集。

显然，当隶属函数仅取值于 $\{0,1\}$ 时就成为通常的特征函数，即分明子集是模糊子集的特例。

U 上的所有模糊子集的全体构成的集族记为 $\mathscr{F}(U)$。U 上的所有分明子集的全体构成的集族记为 $\mathscr{P}(U)$。

由于模糊子集的隶属函数相当于将分明子集特征函数的值域从 $\{0,1\}$ 扩张到 $[0,1]$，因此类似于用特征函数来表达分

明子集之间的关系，我们有

定义 1.2 设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，若对任何 $x\in U$ 有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 B 包含 A，记为 $B\supset A$，或 $A\subset B$；当 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立时，又称 A,B 相等。显然 A,B 相等当且仅当对任何 $x\in U$ 均有 $A(x)=B(x)$成立。

定义 1.3 设 T 是指标集，$A_\alpha\in\mathscr{F}(U)(\alpha\in T)$，则$\{A_\alpha\}$的并集$\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha$ 和交集$\bigcap_{\alpha\in T}A_\alpha$ 将分别由下式定义

$$(\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha)(x)=\sup_{\alpha\in T}A_\alpha(x),x\in U,$$

$$(\bigcap_{\alpha\in T}A_\alpha)(x)=\inf_{\alpha\in T}A_\alpha(x),x\in U。$$

特别当 T 是有限集时，

$$(\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha)(x)=\max_{\alpha\in T}A_\alpha(x),x\in U,$$

$$(\bigcap_{\alpha\in T}A_\alpha)(x)=\min_{\alpha\in T}A_\alpha(x),x\in U。$$

定义 1.4 设 $A\in\mathscr{F}(U)$，则 A 的补集 A' 定义为

$$A'(x)=1-A(x),x\in U。$$

定理 1.1 $(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,')$满足性质：

1° 幂等律，$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

2° 交换律，$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

3° 结合律，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

4° 吸收律，$(A\cup B)\cap A=A$，$(A\cap B)\cup A=A$；

5° 分配律，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

6° 0－1 律，$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，

$A\cup U=U$，$A\cap U=A$；

7° 复原律，$(A')'=A$；

8° 对偶律，$(A\cup B)'=A'\cap B'$，$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

以上各性质的证明只须按定义直接验证之即可，此处从略。事实上，由性质 1°～4°说明($\mathscr{F}(U)$，$\cup$，$\cap$，$'$)是格。

定义 1.5 若 $A\in\mathscr{F}(U)$满足条件：$A(x)=\lambda>0$，$A(y)=0$ 当 $y\neq x$ 时，则称 A 为模糊点，记为 x_λ。点 x 称为是模糊点 x_λ 的承点，而 λ 叫做模糊点 x_λ 的高度。以下将以 U^* 记 U 上所有模糊点之集。

显然分明点 $x\in U$ 就是以 x 为承点，1 为高度的模糊点 x_1。由于模糊点是特殊的模糊子集，所以当 $x_\lambda\subset B$，即 $B(x)\geqslant\lambda$ 时我们称模糊点 x_λ 属于 B，记为 $x_\lambda\in B$。

模糊点与模糊子集的属于关系是分明点、分明集属于关系的推广。然而分明的属于关系还有如下形式的推广。

定义 1.6 若 $x_\lambda\in U^*$，$A\in\mathscr{F}(U)$，且 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于 A，记为 $x_\lambda\widetilde{\in}A$。

定理 1.2 设$\{A_\alpha:\alpha\in T\}\subset\mathscr{F}(U)$，则模糊点 $x_\lambda\widetilde{\in}\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha$ 当且仅当存在 $\alpha_0\in T$ 使得 $x_\lambda\widetilde{\in}A_{\alpha_0}$。

证明 若有 $\alpha_0\in\mathscr{A}$ 使得 $x_\lambda\widetilde{\in}A_{\alpha_0}$，则 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，所以 $\sup_{\alpha\in T}A_\alpha(x)>1-\lambda$，即 $x_\alpha\widetilde{\in}\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha$。反之，若 $x_\lambda\widetilde{\in}\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha$，则 $\sup_{\alpha\in T}A_\alpha(x)>1-\lambda$，于是由上确界的性质有 $\alpha_0\in T$ 使得 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，即 $x_\lambda\widetilde{\in}A_{\alpha_0}$。

容易举出例子说明定理 1.2 对模糊点与模糊子集的属于关系是不成立的，但对于分明属于关系，这又是一条非常基本的性质，因此在模糊集论中仅有属于关系是不够的。

例 取 $A_n=(1-\frac{1}{2n})^*$ $(n=1,2,\cdots)$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=U$，于是

对任何 $x\in U$ 均有 $x_1\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，但对任何 n 均有 $x_1\overline{\in}A_n$，此处 A_n 表示 $A_n(x)\equiv 1-\dfrac{1}{2n}$，$x\in U$。

定义 1.7 设 $A\in\mathscr{F}(U)$，$r\in[0,1]$，则 $[A]^r=\{x\mid A(x)\geqslant r\}$，$\sigma_r(A)=\{x:A(x)>r\}$ 分别称为是模糊子集 A 的 r 割集和强 r 割集，又 $\sigma_0(A)$ 称为是 A 的支集或承集，也记做 $\mathrm{supp}A$。

利用 r 割集和强 r 割集，我们可以得到将模糊子集转化为分明子集的分解定理。

定理 1.3 （分解定理）设 $A\in\mathscr{F}(U)$，则

$$A=\bigcup_{r\in[0,1]}([A])^r\cap r^*),$$

$$A=\bigcup_{r\in[0,1]}(\sigma_r(A)\cap r^*),$$

此处 r^* 表示隶属函数为常值函数 r 的模糊子集。

证明 以第二式为例，一式的情形类似。

对任何 $x\in U$，我们有

$$(\bigcup_{r\in[0,1]}(\sigma_r(A)\cap r^*))(x)$$

$$=\{(\bigcup_{r\in[0,A(x))}(\sigma_r(A)\cap r^*))\cup(\bigcup_{r\in[A(x),1]}(\sigma_r(A)\cap r^*))\}(x)$$，由于当 $r\in[A(x),1]$ 时 $x\in\sigma_r(A)$，所以

$$(\bigcup_{r\in[A(x),1]}(\sigma_r(A)\cap r^*))(x)=0,$$

因之

$$(\bigcup_{r\in[0,1]}(\sigma_r(A)\cap r^*))(x)=(\bigcup_{r\in[0,A(x))}(\sigma_r(A)\cap r^*))(x)=\sup_{r\in[0,A(x))}r=A(x),$$

于是 $A=\bigcup_{r\in[0,1]}(\sigma_r(A)\cap r^*)$。

除分解定理外，对 r 割集和强 r 割集，我们还有

定理 1.4 若 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，则

(1) $[A\cup B]^r=[A]^r\cup[B]^r$，$[A\cap B]^r=[A]^r\cap[B]^r$；