〔美〕N.巴拉巴尼安 T.A.比卡特 著

电网络理论

下 册

夏承铨 刘国柱 宁超 刘正兴 黄东泉 译

邱关源 校

电网络理论

下　册

[美] N. 巴拉巴尼安
T. A. 比卡特　著
夏承铨 刘国柱 宁超 刘正兴 黄东泉 译
邱关源 校

高等教育出版社

内容简介

本书详细阐明了现代电网络理论的一些重要论题，对系统内部成分和系统特性、网络的频率响应和时间响应、网络分析和网络综合都加以讨论，比较全面讨论了线性非时变网络，也介绍了时变和非线性网络。本书重视基本概念和逻辑思维，系统性强，论证比较严密。书中很多地方还留一部分内容给读者思考，有适量的说明性例题，每章末配有丰富多样的习题，其中一部分具有一定的难度和思考价值。

本书可用作电类各专业的研究生和高年级大学生的教学参考书，也可供有关科技人员参考。

中译本分两册出版。上册为基本概念、图论和网络方程式、网络函数、状态方程式、积分解法和网络函数表示法等六章。下册为网络综合基础、散射参数、信号流图和反馈、线性时变和非线性网络等四章以及广义函数、复变函数论和拉普拉斯变换理论等三个附录。

电网络理论

下　　册

［美］N.巴拉巴尼安　T.A.比卡特　著

夏承铨　刘国柱　宁超　刘正兴　黄东泉　译

邱关源　校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 16.125　字数 389,000

1983年3月第1版　1984年6月第1次印刷

印数 00,001—7,500

书号 15010·0476　　定价 2.45 元

目　录

第七章　网络综合基础

网络综合是为了对指定的激励提供规定的响应而设计和构成一个网络的方法。这是分析问题的逆命题;在分析问题中,当把一个指定的激励施加在给定的网络上时，要计算的是响应。与分析问题不同,综合问题可能没有唯一的解答。事实上,它可能没有任何一个解答,因为对于给定的激励,可能并无具有所要求的响应的网络。这样，人们一开始就面临着用一个可能得到的响应去逼近所希望的响应的必要性。

响应及其逼近，既可在时域中也可在频域中加以说明。在频域中,逼近过程的最终结果,是表征所要求网络的一个或几个网络函数的规格。接着必须根据这些函数去实现该网络。实现是由网络有各种类型这一事实作为引导的。这些网络的类型可用外接端子的数目、器件的类型(无耗,有源,RC,等)、结构(梯形,接地等),等等来表征。

在实现过程中的第一件事情是决定适合于每种网络的网络函数的性质。这些性质包括极点和零点的容许位置，留数和实部的符号,以及系数间的相对大小。这是本章中我们主要关注的问题。

为了确立网络函数的解析性质，需要介绍某些附加的数学论题。前两节专门讨论这些数学问题。我们并不力求说明的完整性,而常常只满足于叙述具有某种似理性讨论的结果。

7.1　矩阵的变换

设有一方阵 **A**,可以对其进行若干次运算后得到另一矩阵 **B**。当然,矩阵 **B** 将与原矩阵 **A** 有关系，这特定的关系决定于所进行

的运算。矩阵A被认为是用某种方式被变换了。

初等变换

一些特定的运算具有很重要的性质。这些都是很简单的运算，并总称为初等变换。设有一矩阵A, A的初等变换如下:

1. A的任意两行或两列相互交换位置。

2. 把A的某一行或列的诸元素同另一行或列的相应的元素相加。

3. 用一标量乘A的某一行或列的每一个元素。

显然这些变换并不改变A的阶数。根据第一章所讨论的行列式的性质可知，第一种变换仅仅改变了A的行列式的正负号；第二种变换保持A的行列式不变；第三种变换使A的行列式乘上一个常数。因此，如果矩阵A是非奇异的，则经过一个初等变换后所得到的矩阵也是非奇异的。事实上，矩阵的初等变换不能改变它的秩，即使在秩小于阶时也是这样(见习题5)。

对矩阵A所作的由初等变换所表示的运算，可以由A乘以某些简单的非奇异矩阵来进行。这些矩阵称为初等矩阵，它们本身又是由单位矩阵进行相应的运算而得到的。这样，把一个三阶单位矩阵的第三行加到第二行则得到下面左边的初等矩阵；类似地，把一个三阶单位矩阵的第三列加到第二列则得到下面右边的初等矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

当一个有三行的矩阵A被上述左边的初等矩阵左乘时，其作用是把A的第三行加到它的第二行上去。当一个有三列的矩阵A被上述右边的初等矩阵右乘时，其作用是把A的第三列加到它的

第二列上去。这样

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+a_{31}&a_{22}+a_{32}&a_{23}+a_{33}&a_{24}+a_{34}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{33}\end{bmatrix}$$

注意 **A** 不必是方阵；当然，它与初等矩阵必须是可乘的。

因为一个单位矩阵的初等变换并不改变它的秩，因此任何初等矩阵都是非奇异的。因为两个非奇异矩阵的乘积是非奇异的，于是得出这样的结论：任意个初等矩阵的乘积也是非奇异的。一个意义更重大的问题是，倒过来行得通吗？能把任何非奇异矩阵分解成一些初等矩阵吗？回答是肯定的。可以证明，任何非奇异矩阵都能写成有限个初等矩阵的乘积。

作为另一个示例，假设要求：(1)将一个(4×3)的矩阵 **A** 的第一行乘 5 后加到它的第三行上去，以及(2)把第二列乘 3 后与第三列互换位置。下面的两个初等矩阵将能完成这种运算：

$$\mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\5&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&1&0\end{bmatrix}$$

第一个矩阵应当左乘 **A**；第二个矩阵应当右乘 **A**。读者应当证实这个结果。

关于初等矩阵的进一步说明，将留给一组扩充了的习题。在

下面所展开的讨论中，假设可以利用这些习题的结果。

等值矩阵

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是两个同阶的矩阵。如果 $\mathbf{B}$ 能通过有限次数的初等变换从 $\mathbf{A}$ 得到，我们就说 $\mathbf{B}$ 等值于 $\mathbf{A}$。如所有的变换是对行进行的，则 $\mathbf{B}$ 就是行等值于 $\mathbf{A}$；如所有的变换是对列进行的，则为列等值。施行一些连续的初等变换意味着用一些初等矩阵的乘积去乘 $\mathbf{A}$。这样一个乘积可以用单个矩阵来表示，它是非奇异的，因为每个初等矩阵都是非奇异的。因此，关于等值的一般定义可重述如下:

定理 1 设有两个同阶的矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$。当且仅当

$$\mathbf{B}=\mathbf{PAQ} \tag{1}$$

式中 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是非奇异的时，矩阵 $\mathbf{B}$ 等值于 $\mathbf{A}$。

因为 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是非奇异的，那末 $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}$。这与式(1)的形式相同；因此，如 $\mathbf{B}$ 等值于 $\mathbf{A}$，那末 $\mathbf{A}$ 也等值于 $\mathbf{B}$；即两个矩阵的等值是一种互有的性质。

因为矩阵的初等变换并不改变它的秩，所以一系列的初等变换仍使矩阵的秩不改变。因此两个等值矩阵有相同的秩。特别是，如果 $\mathbf{A}$ 是一个非奇异的方阵，则与 $\mathbf{A}$ 等值的矩阵也是非奇异的。

事实上，如果 $\mathbf{A}$ 是一个非奇异的矩阵，它总是能用一系列的初等变换简化为单位矩阵；也就是说，总会有非奇异矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$(每个都是初等矩阵的乘积)使得

$$\mathbf{PAQ}=\mathbf{U} \tag{2}$$

于是

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PAQ})\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} \tag{3}$$

因此，如 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，总能分解为两个非奇异矩阵 $\mathbf{P}^{-1}$ 和 $\mathbf{Q}^{-1}$ 的

乘积。当然，这是“存在性”的说法；它没有规定一种算法来进行这种因式分解。

一个非奇异矩阵等值于一个单位矩阵的事实，如在式(2)中所表明的那样，是更一般情况中的一种特殊情况。令$\mathbf{A}$是秩为r的$(m\times n)$阶矩阵。那末，用初等变换总能化简为具有如下形式的矩阵$\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}=\mathbf{PAQ}=\begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \tag{4}$$

上式左上方的子矩阵是一个r阶的单位矩阵。当$\mathbf{A}$是方阵且为非奇异时，$n=m=r$，式(4)化简为式(2)。式(4)右边的矩阵称为$\mathbf{A}$矩阵的标准形式。

在式(1)中，假设$\mathbf{Q}=\mathbf{U}$；结果是$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$。非奇异矩阵$\mathbf{P}$是初等矩阵的乘积。用$\mathbf{P}$乘$\mathbf{A}$意味着对$\mathbf{A}$的行进行初等变换。在乘积矩阵$\mathbf{B}$中，它的行仅仅是$\mathbf{A}$的行的线性组合。所以，如果两个矩阵是行等值的，则一矩阵的行是另一矩阵的行的线性组合，反之亦然。用相似的方法可知，如两矩阵是列等值的，则一矩阵的列是另一矩阵的列的线性组合；例如，在第二章已发现一个网络的基本割集矩阵$\mathbf{Q}_f$可由非奇异矩阵$\mathbf{A}_t^{-1}$左乘关联矩阵$\mathbf{A}$得到。我们会想到，$\mathbf{Q}_f$的行应为$\mathbf{A}$的行的线性组合，或等值地说，割集方程应为节点上的基尔霍夫电流定律方程的线性组合；我们知道这是对的。

相似变换

在等值关系式(1)中，并不要求矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$之间有什么关系。然而，当它们有某些特殊关系时，等值具有这样的有用性质，使得相应的变换易于分类和命名。

假设在式(1)中，$\mathbf{A}$是方阵且$\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$。于是

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \tag{5a}$$

或 $$\mathbf{QB}=\mathbf{AQ} \tag{5b}$$

这种变换是相似变换；**A** 和 **B** 称为相似矩阵。这种变换已经在第一章中讨论过，在那里我们看到两个相似矩阵有相同的特征值。为了完整起见把它包括在这里。

相合(全等)变换

下面是另一种特殊的等值。假设在式(1)中 $\mathbf{P}=\mathbf{Q}'$。那末变换

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} \tag{6}$$

称为相合变换(congruent transformation)称 **B** 相合于 **A**。

因为 **Q** 可写成初等矩阵的乘积，所以 $\mathbf{Q}'$ 将等于这些初等矩阵的转置的积，但将其原有的顺序反过来。因此 $\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 可从 **A** 通过一些成对的初等变换得到；一个是对行的变换而另一个则是对列的变换。

将式(5)中的相似变换和式(6)表示的相合变换作一比较表明，如 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}'$ 则二者相同。这种性质得到一个特殊名称。一矩阵具有性质：

$$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}' \tag{7}$$

就称为正交矩阵。

如 **A** 是秩为 r 的实对称矩阵，我们可以用一系列的初等变换证明它相合于一个具有下列形式的对角阵 **D**：

$$\mathbf{D}=\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{8}$$

式中 $\mathbf{D}_r$ 是一个 r 秩 r 阶的对角阵，而 **Q** 则为非奇异的。这类似于在式(4)中的标准形式，但有许多不同之处。在式(4)的一般情况中，**A** 不必是方阵，且 **P** 和 **Q** 两个矩阵不必有关系。

在 **D** 的对角线上的非零元素可能是正或负。总可以利用行

和列的互换来先放置正的元素。初等矩阵相应的乘积可以归并为$\mathbf{Q}$。当正负项已明确指出时，该结果可写出如下:

$$\mathbf{D}=\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}_{r-p} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_r=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}_{r-p}\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $\mathbf{D}_p$ 和 $\mathbf{D}_{r-p}$ 两者都是具有正对角元素的对角阵，$\mathbf{D}_p$ 的阶和秩是 p，而 $\mathbf{D}_{r-p}$ 的阶和秩是 $r-p$。

现在让我们定义矩阵

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}_{r-p}^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中

$$\mathbf{D}_p^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}d_1^{-\frac{1}{2}} & & & 0\\ & d_2^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_p^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{r-p}^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}d_{p+1}^{-\frac{1}{2}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_r^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix} \tag{11}$$

那末，在用矩阵 $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ 把 $\mathbf{D}$ 作进一步的相合变换后，式 (9) 可以写成为:

$$(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})'\mathbf{D}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}=(\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})'\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{U}_{r-p} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{C} \tag{12}$$

因为$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$是非奇异的，所以$\mathbf{QD}^{-\frac{1}{2}}$也是非奇异的。因此右端完全是A的相合变换。它称为正则矩阵；在式(12)中的A的相合变换称为把A化为正则形式。在这个表达式中的整数p称为矩阵的指数。

7.2 二次型和埃尔米特型

本节的题目是一数学形式，它出现在网络中是由于考虑功率消耗或能量储藏。为了知道它是怎样产生的，在研究其数学性质之前，让我们考虑一个具有支路电阻矩阵$\mathbf{R}$的纯电阻网络；在任何时刻的支路电压和电流向量是$\mathbf{v}(t)$和$\mathbf{i}(t)$。在任何时刻网络中消耗的功率是$p(t)=\mathbf{i}(t)'\mathbf{v}(t)$。在引入支路关系$\mathbf{v}=\mathbf{Ri}$时，此功率成为

$$p=\mathbf{i}(t)'\mathbf{v}(t)=\mathbf{i}'\mathbf{Ri} \tag{13}$$

例如，对于有三条支路的网络，右边的量是：

$$\mathbf{i}'\mathbf{Ri}=[i_1 \quad i_2 \quad i_3]\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$=R_1 i_1^2+R_2 i_2^2+R_3 i_3^2$$

上式是电流的二次型，它说明了我们现所叙述的内容。为了表明该结论是一般的，我们将采用一般的符号。

定义

令$\mathbf{A}=[a_{ij}]$是实的方阵；而$\mathbf{x}=[x_i]$是一个实的或复的列向量。在$\mathbf{x}$是实向量时(即$\mathbf{x}$的元素是实数)，表达式

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

以及在 $\mathbf{x}$ 是复向量时，表达式

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}=[\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \cdots \quad \bar{x}_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

都称为二次型。当我们进行上述的矩阵乘法后，采用这一名称的理由就变得清楚了，在 x 为实数时我们得到

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j \tag{16}$$

而在 x 为复数时得到

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_i x_j \tag{17}$$

我们看到，这些是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次表达式。

在式(14)至式(17)中的矩阵 $\mathbf{A}$ 称为二次型矩阵。我们把 x 作为变量，因而该矩阵实质上就确定了二次型。我们将涉及的是实的、对称的矩阵 $\mathbf{A}$ 的二次型。实际上，任何一个具有实矩阵的二次型能够变换为具有对称矩阵的二次型，这是因为如果 x 和 a_{ij} 是实的，我们可以写出

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = 2\left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)x_i x_j \tag{18}$$

我们看到，如果在矩阵中的 a_{ij} 与 a_{ji} 都用它们的和的一半去替代，在这一方程左边的两项对二次型的贡献是不会改变的。因此，如 $\mathbf{A}$ 不是对称的，我们定义对称矩阵 $\mathbf{B}$ 为