边界积分方程方法——边界元法

力学基础与工程应用

● 杜庆华 等合著

BIANJIE JIFEN FANGCHENG FANGFA
BIANJIE YUANFA
LIXUE JICHU YU GONGCHENG YINGYONG

高等教育出版社

边界积分方程方法
——边界元法

——力学基础与工程应用——

杜庆华　等合著

作者：

杜庆华，岑章志　北京清华大学

嵇　醒，楼志文　西安交通大学

卢习林　　　　　北京化纤学院

高等教育出版社

本书是作者们在长期科研基础上写成的。

本书前两章讲述边界元法基础知识，后八章讲述典型问题边界元法。典型问题包括：弹性力学三维问题、平面问题，柱体自由扭转，温度场与弹性热应力，平板弯曲，线弹性断裂力学，弹性动力学及弹塑性问题等。在四个附录中给出两个典型程序和必要的数学知识。

本书由河海大学钱家欢教授组织审阅，姜弘道、沈家荫、卢盛松、李永谐等同志参加审阅。

本书可作为大学生选修课和研究生的教材之用，亦可供力学教师、力学工作者和工程技术人员学习参考之用。

本书得到国家自然科学基金部分资助。

边界积分方程方法——边界元法

——力学基础与工程应用——

杜庆华 等合著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.875 字数 240 000

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 0001— 1 230

ISBN 7-04-002464-0/TB·144

定价 3.35 元

前　言

在有限元法得到很大发展的情况下，近二十年来一种新的解析数值方法，边界积分方程——边界元法已经建立并且得到了广泛应用，它已被认为对很多工程问题中涉及的场问题，特别是力学问题是一种有效的新方法。以本书第一作者及其合作者所形成的清华大学边界元法研究组在较长时期中对这一方法在弹塑性力学以及涉及热传导和动力学问题中的应用作了基础性的力学研究，近三、四年清华大学和西安交通大学在这方面还进行了互相配合的研究。为了使得有兴趣进入这一方法研究领域的读者能够得到一本介绍这一方法的基本力学构想及其具体进行步序的基础知识的专著，本书作者们以固体力学为主要内容介绍了自己在这方面的工作。为了适应工程应用的要求，本书详细介绍了有关的基础理论以及典型程序示例。全书可分为两个部分，即基础知识（第二章）和典型问题。典型问题包括：三维弹性力学问题，轴对称及回转体扭转问题（第三章）；平面问题，棱柱体扭转问题，温度场及热应力（第四，五，六章）；平板弯曲问题（第七章）；断裂力学问题（第八章）；与时间有关的弹性动力学问题（第九章）以及弹塑性分析边界元法（第十章）。在附录一中给出两个典型程序，一个是 BE3DE 为三维弹性分析边界元法程序；一个是 BEMPB 为外点积分技术边界元法解克希霍夫平板弯曲问题的程序。在附录二、三、四中给出了与本书有关的一些基本数学公式，包括指标符号，笛卡尔张量，几个基本积分等式以及高斯数值积分公式的求积点坐标和求积系数。

作为一本专著的作者们认为应该提到有关其它参予合作者的

主要贡献。例如姚振汉在弹性分析方面起了重要作用，以及乐美峰和臧昆在应力分析方面，宋国书在平板弯曲方面，单文文在变截面轴扭转方面的工作等。另外，这本书的部分内容曾作为边界元法基础知识讲座，先后在华中工学院(1982)*，浙江大学**，兰州大学讲授过，江西省力学学会(1986)印出讲义。本书是在这些讲义基础上经作者共同扩展、充实而定稿的。

虽然本书部分初稿于五年前即已初步完成，但由于本书涉及面较广，写出全书仍不免仓促，故作者们非常欢迎读者及使用者不吝惠于批评指正。

杜庆华　1987.5

* 见第一章参考文献[42]。

** 见第一章参考文献[43]。

符 号 说 明

本书采用的通用符号有

〈**算子符号**〉

L 为线性微分算子

H_k 为自然边界条件算子

G_k 为基本边界条件算子

∇^2 为拉普拉斯算子

〈**变量符号**〉

u, v, w 为标量场变量

W 为标量权函数

u_i, v_i 为矢量场变量

W_i 为矢量权函数

f 为域内给定标量函数

g_k, g 为相应于 G_k 的边界给定标量函数

h_k, h 为相应于 H_k 的边界给定标量函数

〈**几何符号**〉

V 为一般的 n 维域

S 为 V 域的边界，用上标表示给定相应边界条件的部分边界，如 S^{gk}，S^{hk}，S^g，S^h，……等。

n_j 为单位外法线矢量

(x) 为具有坐标 x_i 的一个点

P, Q 为域内的点，其中 P 又专指相应于基本解奇异点的域内点

p, q 为边界上的点，p又专指相应于基本解奇异点的边界点

r　　为基本解奇异点到 Q 或 q 点的距离

Ω　　为二维域

Γ　　为二维域的边界，给定不同边界条件的边界段亦用相应上标表示

s　　为二维域边界的弧坐标

n, t　　为二维域边界的外法线方向及切线方向

（某些符号的含义还可参看图1）

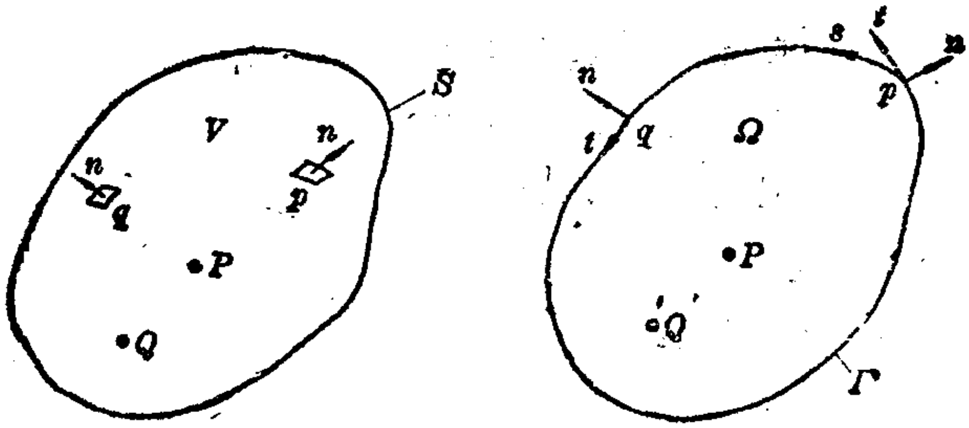

图　1

〈其他符号〉

$\Delta(P)$　为狄拉克 δ 函数，P 为其奇异点

δ_{ij}　　为克罗内克尔 δ

$\langle,\rangle$　　为内积符号，例如 $\langle u, v\rangle_V=\int_V uv\mathrm{d}V$

$\square_{,\square}$　为求导符号，例如 $u_{,i}=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

$[\ \ ]$　为间断值符号，例如 $[T]=T(q^+)-T(q^-)$

$\square^s$　　为基本解符号，例如 u^s

$\overline{\square}$　　为给定函数符号，例如 $\bar{u}$

对于一般弹性力学问题还采用下列符号

σ_{ij}　　为应力张量

ε_{ij}　　为应变张量

E_{ijkl}　为弹性系数张量

u_i　　为位移矢量

t_i　　为边界面力矢量

f_i　　为体积力密度矢量

λ, μ　为拉梅常数

ν　　为泊桑比

u^s_{ki}　　为弹性力学问题的基本解

t^s_{ki}　　为对应于 u^s_{ki} 的面力

$C_{ki}(p)$ 为边界积分方程中与边界在 p 点的几何特征有关的系数

对于回转体弹性力学问题还采用下列符号

R, θ, Z 为柱坐标

n_1, n_2 为子午面上二维域边界单位外法线矢量的两个分量，$n_1 = \cos(n, R)$，$n_2 = \cos(n, Z)$

α_{ij}　为由整体坐标(R, Z)变换到自然坐标(n, s)的变换系数

v_i, τ_i 为在自然坐标里对应于整体坐标里的 u_i，t_i 的位移与面力

$K\left(\frac{b}{a}\right)$为第一类全椭圆积分

$E\left(\frac{b}{a}\right)$为第二类全椭圆积分

$a \quad = \sqrt{b^2 + r^2}$

$b \quad = 2\sqrt{R(p)R(q)}$

$A \quad = \dfrac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$

$B \quad = R(p)R(q)$

$H \quad = a^2 - b^2/2$

对于平板弯曲问题还采用下列符号

(x, y) 为中面上一点，坐标为 x, y

w　　为板的挠度

θ　　为边界法向转角

M　　为边界弯矩

V　　为边界折算剪力

T　　为边界扭矩

Q_n　　为边界剪力

$\bar{p}$　　为给定域内的分布荷载密度

F　　为边界集中力

D　　为板的抗弯刚度

$[\ \ ]_{(p)}$表示括号中微分算子对 p 作用

本书符号的不带括号的下标一般均为指标符号的指标，遵守有关的操作规则，比如同一项出现指标重复表示对该指标遍历求和。而符号的上标在本书中不是指标，仅作一般标记，除所列符号外文中出现的其他符号按其标准的数学定义，或在个别用到之处专门说明。

目　　录

符号说明……………………………………………………………………1
第一章　绪论…………………………………………………………………1
§1-1　边界积分方程方法——边界元法的概述……………………………1
§1-2　边界元法的一些特点………………………………………………2
§1-3　边界元法在工程应用上的最近进展………………………………3
参考文献……………………………………………………………………6
第二章　边界积分方程——边界元法的基础知识…………………10
§2-1　从简单力学问题的积分式到边界积分方程………………………11
§2-2　边界积分方程离散步序的简述……………………………………19
§2-3　有关椭圆型方程的算子与内积公式………………………………20
§2-4　加权余量格式与边界积分方程……………………………………24
§2-5　弹性静力学基本方程的椭圆性……………………………………27
§2-6　几个弹性力学基本问题的变分格式………………………………31
§2-7　弹性力学基本方程的基本解………………………………………38
参考文献……………………………………………………………………49
第三章　弹性静力学三维问题的边界元法……………………………50
§3-1　线弹性静力学的基本方程和边界条件……………………………50
§3-2　三维线弹性静力学的边界积分方程………………………………51
§3-3　边界积分方程的离散化和边界元…………………………………54
§3-4　数值技术……………………………………………………………57
§3-5　轴对称问题…………………………………………………………64
§3-6　变截面轴的扭转问题………………………………………………73
§3-7　数值算例……………………………………………………………75
参考文献……………………………………………………………………81
第四章　弹性力学平面问题边界元法……………………………………83
§4-1　平面弹性静力学基本方程和边界条件……………………………83
§4-2　边界积分方程及基本解……………………………………………84

§ 4-3　数值解法…………………………………………………………………………90
§ 4-4　域内位移和应力………………………………………………………………93
§ 4-5　边界应力计算…………………………………………………………………94
§ 4-6　边界元分域计算………………………………………………………………96
参考文献……………………………………………………………………………100
第五章　柱体的自由扭转边界元法……………………………………………101
§ 5-1　柱体自由扭转的基本方程……………………………………………………101
§ 5-2　边界积分方程…………………………………………………………………103
§ 5-3　自由扭转的边界元方程………………………………………………………105
§ 5-4　扭矩 M_n、扭转刚度 GJ_p 及截面边界处剪应力的计算………106
参考文献……………………………………………………………………………109
第六章　温度场和弹性热应力的边界元法……………………………………110
§ 6-1　热传导基本方程………………………………………………………………110
§ 6-2　定常温度场的边界元方程……………………………………………………112
§ 6-3　非定常温度场的边界元法……………………………………………………116
§ 6-4　计算热应力的边界积分方程…………………………………………………121
参考文献……………………………………………………………………………125
第七章　平板弯曲问题的边界元法……………………………………………126
§ 7-1　薄板弯曲的基本方程…………………………………………………………126
§ 7-2　基本边界积分方程……………………………………………………………130
§ 7-3　辅助边界积分方程……………………………………………………………135
§ 7-4　边界元解法……………………………………………………………………138
§ 7-5　典型算例………………………………………………………………………149
参考文献……………………………………………………………………………153
第八章　线弹性断裂力学问题的边界元法……………………………………155
§ 8-1　线弹性断裂力学………………………………………………………………155
§ 8-2　平面线弹性断裂力学的边界积分方程………………………………………158
§ 8-3　二维裂纹体奇性降阶面力边界积分方程……………………………………160
§ 8-4　分域法和奇异性边界元………………………………………………………163
§ 8-5　几个算例………………………………………………………………………164
参考文献……………………………………………………………………………169

第九章　弹性动力学问题的边界元法……172
§9-1　弹性动力学基本方程……173
§9-2　拉氏积分变换格式……174
§9-3　傅氏积分变换格式……178
§9-4　数值傅氏反变换……179
§9-5　数值拉氏反变换……180
§9-6　离散技术……183
§9-7　内点应力和边界点应力……184
§9-8　时间差分格式……186
§9-9　采用与时间有关的基本解的格式……187
§9-10　弹性动力学问题边界元法的若干算例……190
参考文献……194
第十章　弹塑性问题的边界元方法……197
§10-1　基本方程和屈服条件……197
§10-2　弹塑性问题的边界积分方程和内点应力公式……201
§10-3　离散化建立迭代公式……204
§10-4　边界点应力计算……206
§10-5　内部单元模式和奇异积分处理……210
§10-6　迭代数值技术……214
§10-7　典型算例……220
参考文献……224
附录一　两个典型程序……225
(一)三维弹性问题边界元程序使用说明及程序清单……225
(二)用外点边界元法解薄板弯曲问题程序使用说明及程序清单……253
附录二　指标符号、矢量与笛卡尔张量……288
附录三　有关边界积分方程建立的几种等式……297
附录四　数值积分(高斯求积)公式……300

BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD
—— BOUNDARY ELEMENT METHOD
MECHANICAL FOUNDATIONS AND ENGINEERING APPLICATIONS

DU QINGHUA*
JI XING** LOU ZHIWEN**
CEN ZHANGZHI* LU XILIN***

CONTENTS

FORWARD 1
I. INTRODUCTION 1
II. THE BASIS OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD——BOUNDARY ELEMENT METHOD 10
III. THREE DIMENSIONAL ELASTOSTATIC PROBLEMS 50
IV. PLANE ELASTICITY 82
V. TORSION OF PRIMASTIC BODIES 100
VI. TEMPERATURE FIELD AND THERMOELASTICITY 110
VII. PLATE BENDING PROBLEMS 126
VIII. LINEAR FRACTURE MECHANICS 155
IX. ELASTODYNAMICS 172
X. ELASTOPLASTICITY 197
APPENDIXES:
PROGRAMS:
THREE DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS 225
PLATE BENDING PROBLEMS 255

第一章　绪　论

§1-1　边界积分方程方法——边界元法的概述

对于常见的微分或偏微分方程问题连同它们的边界条件，一般可以做到用域内积分以及边界积分的形式来表达，这种方法被称为积分方程方法。边界积分方程方法是一种主要只涉及边界信息的积分方程方法。积分方程或积分形式所表达的力学问题或场问题最早是与几种目前常见的积分变换形式相联系的。其后，在本世纪初，一些典型的线性积分方程（用 Fredholm，Hilbert 以及 Volterra 等人命名的原理或方程）在一些众所周知的教科书或论著中被介绍过，例如 Mikhlin(1957)[1]和 Tricomi(1957)[2]。在 50 年代到 60 年代中，结构力学的有限元法被提出，而且得到迅速的发展。在 60 年代中期略后，Rizzo(1967)[3]正式提出经典弹性力学离散的边界积分方程方法。在其后的十余年中，从着眼离散方式而言将这种边界积分方程方法正式称为边界元法。

积分方程方法的“总体考虑”的特点在一些力学问题中早已有所应用。例如，弹性杆件的稳定和振动分析[4],[5]，这里，由于它们的特征值从本质上讲是只与杆件的总体形态有关的，在建立积分方程时边界（端点）条件被隐含于核函数的边界要求中。边界积分方程——边界元法作为一种有效的边界值分析方法是在位势问题与弹性静力分析中首先得到论述，例如：[6]及[7]以及近期的[8]中所作出的多个工程应用举例。当然比较切实可用的计算方法应该首先归诸[9]。

有关边界积分方程——边界元法(以下简称为边界元法)在解二阶及四阶椭圆型的场问题的具体方法虽然在七十年代中期前后已经明确，但是分析问题的基本步骤及其具体工程应用是在一些书(例如[10])中才得到较详细介绍的。本书特地对于有关二阶方程及四阶方程的弹性力学问题作了详细的论述并给出较详细的具体举例，见第二、三章和第四、五、七章。应该指出，关于弹塑性的边界元法虽然有[11]、[12]等早期工作，但是正确无误的分析是从[13]才有可能的。本书第十章对于切实可行的初始应力弹塑性边界元计算给出了具体分析、计算过程及结果。线弹性断裂力学的边界元法，例如，可见于[14]、[15]，本书第八章作了基本方法的介绍。本书的第九章对于与时间有关的场问题的边界元法做了入门性的介绍，八十年代初以来的工作可以参考[16]。

应该指出，本书是作者们根据近年所进行的工作在[42]和[43]的基础上改写完成的。

§1-2 边界元法的一些特点

边界元法作为边界积分方程的离散数值解法有它特有的优点，同时也在数值计算上引出一些新的问题。由于采取边界上的积分形式，降低了问题的空间维数。一个三维的弹性静力学问题利用边界积分形式则变为二维问题；平面问题、轴对称问题、柱体扭转问题以及平板弯曲问题利用边界积分形式都只需要利用一维(曲线周界)的边界离散，即变为一维问题。所以边界元法在边界离散处理时只需用二维曲面单元和一维线单元。降低问题的维数无疑将使未知量数目显著降低。以弹性分析为例，对一些示范性的具体算例，为了达到一定的精度，在有限元法中常用含有数千个未知数的方程组，而用边界元法解同一问题只需用含有一、二百个未知数的方程组就会有很高的精度。在这里边界元法与有限

元法不同之处在于：有限元法一般导致对称的刚度矩阵，而且在适当的节点编号下可得到非零元素集中于对角线附近的带状稀疏矩阵；边界元法则一般形成非对称满阵。可以认为，一般说来边界元法在计算上具有较高精度和计算量较小的特点，但是也必须考虑利用最后形成的系数矩阵为非对称满阵，其矩阵元素的求值有大量积分计算，特别是采用高度协调的边界元时所涉及的积分计算量是较大的。还应该指出：在动力问题和进入塑性的计算中，除边界积分外同时还有域内的积分，这样，有时需要进行将域内积分化为边界积分的积分变换或者同时使用边界元和有限元（域内积分部分）。当边界元法应用于有无限域的情况是方便的，因为这时为了建立域内量与边界量之间的关系本来就已选用了适用于无限域的基本解。对于链状结构（例如见第三章的算例 4），采用子域法也可以形成边界元的带状矩阵，这时局部子块是非对称满阵，但在总体上则会形成汇集在对角线附近的一个宽带式非对称矩阵。

边界元法可以直接用边界量作为求解变量来建立边界积分方程，这叫直接法。但与此同时，也可以从虚设的源密度函数或虚设边界的虚载荷作为求解变量来形成边界积分方程，这叫间接法。由于这些虚设的分布函数并不具有直接明确的边界物理涵义，它虽然在解题时可以有其方便之处，但要靠最后结果进行校核而不象直接法那样可以随时校核求解的有效性，所以，本书只讨论直接边界积分方程方法。

§1-3 边界元法在工程应用上的最近进展

全面地了解近十多年来边界元方法的进展状况可以使读者看到这种解析数值方法的潜力及其宽广的应用前景。边界元法的提出除了前节已经提到的，如 Купрадзе (1963)[6]的工作外，其实，首先见端于 1963 年对位势问题的应用[17]。经过对弹性力学和塑

性力学方面的一系列问题尝试后，到了七十年代中期终于已经可以看到边界元法的工程应用的诸多方面[18]。在这个时期的前后有两篇博士论文([19]和[20])是开始这方面研究工作的重要成果。

应该指出，近十年来每年举行的国际边界元学术会议，大体上记录了边界积分方程方法基本理论方面的研究成果和具体边界元技术在工程上应用的进展[21]～[28]。这八次国际会议除了反映传统的固体力学(弹性、塑性、动力学等问题)边界元法研究外，可以提到的其它方面的研究有：位势流及波的传播，如Ingham(1985)的工作[27]；非均匀椭圆型问题、抛物型问题，如J. Wu(1985)的工作[27]；各向异性介质，如Kobayashi(1986)的工作[28]；粘塑性、粘弹性，如Kobayashi(1982)的工作[24]和Telles(1982)的工作[24]、[26]；岩土地基结构和土壤相互作用，见[26]和[27]；开挖，深孔的渗压固化也一直受到注意，如Alarcon(1982)，Kuroki(1982)的工作[24]。此外，电磁场的边界元分析也受到工程界的注意，见[28]；耦合技术及形状优化，见[25]、[28]，特征值分析，见[24]。至于平板弯曲则除了第七章所引资料外，Reissner板的边界元分析见[26]及[29]。

近年来在我国曾举行两次有关边界元法在工程中应用的学术会议[29]、[30]，标志着我国在边界元法的研究方面达到了一个新的水平。研究的内容，除了固体力学应力分析(应力集中，断裂，板壳，动力学等)外，还有流体力学、热力学、电磁场、土力学等学科领域的问题，并且从线性弹性问题的研究扩展到弹塑性，非线性，带时间变量等问题。此外，对边界元方法的数学方面也有不少探讨。工程应用的范围除了机械结构不连续区局部应力分析外，还涉及土建、水利、采矿、地质岩土、航空等诸方面。这说明边界元法的工程应用研究在我国是方兴未艾的。

注意边界元方法在各个专门问题中的研究进展是很重要的。