

内 容 提 要

本书对板的理论和分析作了综合性的论述。主要包括：弹性板的静力和动力分析（经典法、数值法和近似法）、板的稳定性（静力和动力）以及板的极限（屈服线）分析法。

书的附录中列有不同边界条件和受载情况下各种板的计算公式。

本书可供土木建筑、交通运输、水利和机械等专业的大专院校师生和工程技术人员参考和自学用。

Rudolph Szilard
Theory and Analysis of Plates
CLASSICAL AND NUMERICAL METHODS
PRENTICE-HALL, INC

1 9 7 4

板的理论和分析
经典法和数值法

〔美〕 R. Szilard 著

陈太平 戈鹤翔 周孝贤 译

周孝贤 校

中国铁道出版社出版

责任编辑 翁大厚 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：37.25 字数：902 千

1984年2月第1版 1984年4月第1次印刷

印数：0001—5,000册 定价：5.65元

译 者 序

本书主要是论述板的理论和分析计算的方法。

近十几年来,随着工程材料强度的不断提高、施工工艺的不断改进、结构理论不断完善以及电子计算技术的广泛应用,板的采用已日趋增多。铁路和公路桥梁的桥面板,房屋建筑的楼面、屋盖板,水利工程的闸门以及飞机船舶的躯体等都是般常见的板式结构。由于板的用途较广,情况复杂,板的理论和设计计算中所碰到的一系列问题必然要加以研究和分析。因此,引起了各国从事这方面工作的学者、设计工程师的极大关注,并开展了大量的研究分析工作。

本书是美国Rudolph Szilard教授1974年的著作。作者根据多年的教学经验,将有关板的理论和分析计算方法作了系统的归纳。本书内容丰富,深入浅出,且实例较多。所用数学工具,基本上不超过工学院高等数学课程的范围,不得已时,则另加解释。书中列入了大量的例子,其中多数是属于计算性质的,作为所讲述的方法的具体应用实例,而且均将数值计算全过程列出。当采用数值法或近似法计算时,也将结果与其精确解进行比较。书中所推导公式的形式,作者也力求使之能适用于已有的电算程序,以利计算。

本书除了对弹性板的静力和动力分析作了经典法、数值法和近似法的论述外,尚对板的极限分析法——屈服线分析法进行了叙述。这对今后板的分析采用极限状态的设计方法极为重要。此外,本书还在第三章中对板的高等论题进行了论述,如板的大挠度理论、影响面、无梁板、斜板和正交异性板等。

作者根据板的不同边界条件和受载情况,列出了大量的、常规设计中所常遇到的各种板的计算公式。其中包括板的静力、动力和稳定性的计算公式,另外还有钢筋混凝土板的极限承载能力的计算公式。这就使本书具有板的计算手册的性质,可供工程技术人员实际应用。本书各章节的后面均列有为数众多的参考文献,可供读者作为对板的理论与分析作进一步研究之用。

在整理本书译文时,发现原书排印中的错误,均在译文中修正。

在译校过程中得到有关同志的协助,特此表示谢意。由于书中涉及问题较广,限于译者水平,谬误之处在所难免,希望读者指正。

译 者

1982.7.5.

序 言

这是一本有关板的问题的综合性著作，内容广泛齐全。主要读者对象为研究生及从事实际工作的工程师。本书不但可以作为教学用书，而且也可以作为参考书。

本书的主要任务有以下几方面：

1. 作为一本板的分析中有关经典方法的入门教学用书。
2. 使读者能明瞭在板的高等分析中的现代分析法和数值法。
3. 作为从事实际工作的结构工程师的一本参考书。

作为一本教学用书使用 作为一本教科书，它必须对基本原理及公式的推导有一清晰的论述，同时还要备有足够数量的例题。为此，本书从始至终都突出物理现象的数学模式化。作者在本书中并没有去追求很多特殊板问题的求解，而是对一般广泛应用的板的分析法和数值法进行了介绍。本书中还列举了大量的实际例题，用以说明如何将上述方法应用于各种具有实际意义的板的问题之中。

尽管高等数学在求解大多数板的问题时是必不可少的，但是，本书对数学基础的要求还是适中的。作者假设读者仅仅是熟悉于微积分和矩阵代数的运算，同时对本书中所需应用的数学方法，均给以系统而又简要的推导，俾使读者易于理解。本书中涉及高等分析方法的有关章节是作为一个主要组成部分编入的，而不是按照一般的习惯作法，仅将数学基础知识在书本的开始部分、或者是在附录中提示一下。对于其它方面的基础知识，例如弹性理论、结构动力学、极限设计等等也都是按照上述同样的方法进行处理。因此，这就使得本书在内容上能成为一本内容比较齐全的教学用书，使用时也无需要再参考其它的有关书籍。

有关板的经典方法中的基础理论知识，由于整个板的理论是建立在这个基础之上的，因此，纵然它的使用极其有限，作者还是将它作为必要的内容而列于本书中。关于板问题的精确解，犹如大多数数学物理方面的问题一样，都是只能在最简单的情况下才能获得。而对于大多数具有重大实际意义的板的问题，则经典法或者是给不出任何解来，或者是给出的解由于过于复杂而无法实际应用。在此，数值法和近似法提供了唯一合理的解决途径。

高速电子计算机的发明，真正地促进了数值法在求解与应用力学有关的复杂问题方面的发展。在各种适于使用计算机的计算方法中，有限差分法和有限单元法已经得到了广泛的应用。在板的问题中当采用计算机求解时，其程序编制不列入本书内容之中。但是，在本书中与应用计算机方法有关的问题都已用公式表示，这样在具有现成的计算机程序时立即可以使用，即便没有时，也可以请计算中心很容易地编制成电算程序加以应用。

在现代的分析方法中，伽勒金的变分法较其它方法应用得更广泛。作者认为这是由于这种方法比较简单、有效，并且用途广泛。这也说明了它的重要性。

近年来，由于引用了极限荷载设计法，因此以工作荷载和工作应力为基础的结构分析法已经很不受欢迎了。虽然，这种简单而又仍然有效的方法的发展尚不完善，但是在第7章中所介绍的屈服线法还是非常值得从事实际工作的工程技术人员认真学习的。

在本书目录中注有星号（*）的章节是作者建议供土木、机械、航空、海洋、建筑工程

专业的研究生,以及工程力学、造船专业的学生用的一个学期的板的课程。但是,书中所提供的教材是足够两学期课程用的;最好是在第一学期进行了课堂教学之后,能让学生自己阅读(自学)一学期。在本书每章的末尾都列有学生们应当完成的作业。教师还可以借助于附录A及书中的例题给学生出些课外作业。

作为一本从事实际工作的工程师的参考用书 对于从事实际工作的工程师的要求就不一样,这是由于他们之中的大部分已熟悉板的理论方面的基础知识。因此,他首先感兴趣的是要知道他自己的特殊问题是否有现成的解法。为此,在本书的附录A中给出了包括大多数板的重要问题的公式。其次,如果书中缺乏现成的公式去求解,那么他希望使用他已熟悉的构架法、矩阵法以及弯矩分配法等方法。最后,从事实际工作的工程师,需要关于所提供的方法的有效性和经济性方面的资料,以便从这些方法中作出正确的选择。

要将本书编写成一本综合性的教学用书和参考用书,两者的要求又各不相同,这就使得作者遇到很多困难。然而,由于下述理由,使得这种综合性的编写亦得以完成:

1. 学生们在他们毕业后从事的实际工程中,还是常常要使用他们在学校里所用的教科书(虽然他们一般地是不打算再用它),这是由于他们对于教科书中的内容、符号规则、代用符号等都是比较熟悉的缘故。

2. 从事实际工作的工程技术人员可以使用本书作为自学材料,俾使自己的知识能适应于最新的现代应用力学分析法和数值法的要求。

本书中参考系统的说明 本书中所有的数学表达式都依次用括号内的编号列出,每个括号内第一个点的前面的数字是章的编号,第二个点的前面是节的编号,最后面的数字是公式的编号。例如式(2.7.4.)是表示2.7节中的第4个公式。

作者认为,本书的整个部分可以分章写成。书中所列的参考文献和参考书目也增加了本书的内容。至于所列参考文献的编号系统则与公式的编号系统相似。括号中的数字代表有关章节及参考文献的编号。在括号中如果没有章节数字的,则表示为板的一般参考文献,并将它列在绪论的后部。有关各种板的理论发展史部分的参考文献,则在其编号前面加上“H”字号。编号中带有前缀“I”的参考文献是表示用于绪论的参考文献,带有“A”和“B”的则表示用于附录中的参考文献。

下列缩写名词已尽可能和参考文献中所采用的相一致:

ACI J.	美国混凝土学会杂志
AIAA J.	美国航空与宇宙航行学会杂志
ASCE	美国土木工程师学会
ASME	美国机械工程师学会
IABSE	国际桥梁和结构工程协会
NACA	(美)国家航空谘询委员会
NASA	(美)国家航空和航天管理局
ZAMM	(德)应用数学和应用力学杂志

作者虽已作了极大的努力来检查错误,但因书中包含了大量的数学运算,所以有些错误在所难免。因此,如果有人告知由于作者的疏忽而导致的错误,作者将表示谢意。

谢词 作者谨向夏威夷大学数学副教授,已故的艾利克·依·格劳斯博士致以崇高的敬意,他认真地审阅了本书的第一章。还要感谢哲学副博士罗那特·H·K先生,他审查了本

书的校样。由于他们两位的努力，从中发现并消除了不少排印上的错误。另外还要感谢格里
钦·邵富博士，他参与了本书的编辑工作。

最后，应当特别归功于普兰梯斯—霍尔公司，他们不遗余力地付印了本书。

R. 钱拉德

夏威夷，檀香山

符 号

下面所列的符号是本书中最通用的符号。但有时也会应用同一符号来表示一种以上的量；不过在这种情况下，在开始引用这一符号时，将会附有专门的说明。

$a, b, \bar{a}, \bar{b}$	分别为板在 X 和 Y 方向上的长度尺寸。
a_i, b_i	系数
a_{ij}, b_{ij}	分别为矩阵 $[a]$ 和 $[b]$ 的元素
A	面积
B	正交各向异性板的有效抗扭刚度
$B_1, B_2, \dots$	常数
$c_1, c_2, \dots, C_1, C_2, \dots$	常数或数字系数
$\{d_i\}$	节点位移矢量
D, D_x, D_y, D_t, D_{xy}	抗挠和抗扭刚度
$[\mathcal{D}]$	动力矩阵
e	体积应变
E, E_s	杨氏模量, 割线模量
$f_i(\quad), F_i(\quad)$	函数
g	重力加速度
G, G_{xy}	剪切模量
h	板厚
i, j, k, l, r, s	指数和 (或) 正整数 (1, 2, 3 ...)
I	惯性矩
I_{ix}, I_{iy}	梁的几何抗扭刚度
k, k_{ij}, k	土体基床常数或刚度系数
$[K]$	整体坐标系中的刚度矩阵
l, l_x, l_y	跨度
$L(\quad), \mathcal{L}(\quad)$	微分算子
m, n	正整数 (1, 2, 3 ...)
$\bar{m}$	单位面积质量
m_{ij}	质量矩阵的元素
m_T	等效热弯矩
m_u, m'_u	单位长度的极限弯矩
m_x, m_y, m_r, m_φ	单位长度的弯矩
$m_{xy}, m_{r\varphi}$	扭矩
M_x, M_y, M_t	集中弯矩或外力矩

m_{ij}	相容质量矩阵的元素
$\mathfrak{M}$	“弯矩和” $= (m_x + m_y) / 1 + \nu$
$\bar{n}_c$	单位长度的临界（屈曲）荷载
n_T	热平面力
n_x, n_y	单位长度上的平面（轴向）力
n_{xy}	单位长度上的平面剪力
p	扰动力函数的频率
p_*	极限荷载
p_x, p_y, p_z	单位面积上的荷载分量
P_x	横向集中力
Π	总势能
q_x, q_y, q_r, q_θ	单位长度上的横向剪力
r_0, r_1, r	半径
t	时间
T	温度或动能
$[T]$	变换矩阵
u, v, w	分别在 X, Y 和 Z 轴方向上的位移分量
u_x, u_y	横向边缘力
$W(x, y)$	形状函数
W_e, W_i	分别为外力功和内力功
U	应变能
V	体积或外力势能
x, y, z	直角坐标
X, Y, Z	直角坐标系的坐标轴
α, β	角
α_m, β_m	常数
α_T	热胀系数
γ, γ_{xy}	剪应变
$\delta, \delta_{ii}, \delta(\quad)$	位移, 挠度系数, 变分符号
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_T$	应变（法向）分量
$\epsilon, \epsilon(x, y)$	误差及误差函数
$\in$	剩余误差
η, ξ	坐标
ϑ, θ	角
λ	网格宽度 ($\Delta x = \Delta y = \lambda$)
$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{cr}$	本征值及临界荷载系数
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa$	挠曲中平面的曲率变化
μ	方向余弦
$\nu, \nu_x, \nu_y, \nu_{xy}$	泊松比
ρ	无量纲 (r/r_0)

ρ_{ij}	单个有限单元的刚度系数
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	法向应力分量
τ_{xy}, τ_{yx}	剪应力
φ	角, 极坐标
$\varphi_i(\quad), \phi_i(\quad)$	函数
$\Delta, \Delta(\quad)$	差分, 有限增量
$\Phi(x, y)$	艾利应力函数
ω	自由振动的圆(角)频率
∇^2, ∇_r^2	拉普拉斯算子, 参阅式 (1.1.28), (1.1.34), (1.11.10) 和 (1.12.1)

绪 论

板是一种平、直的（扁平的，无曲度的）表面结构物，它的厚度与其他别的尺寸相比要小的多。在几何图形方面，板的周边可以是直线的，也可以是曲线的。在静力学方面，板可以具有自由的、简支的、或固定的边界条件，其中包括弹性支承和弹性约束，有时候也可以是点支承（图 I.1）。板所承受的动力或静力荷载主要是垂直于板的表面。

板的承载作用多少有些相似于梁或缆索；因此，根据板体结构的抗挠刚度，板可以用格子梁或索式网格来近似代替。例如，用网格结构来模拟板的横向挠曲，这仅仅是对板的真实状态的一种近似，因为它任意地破坏了原来结构物的连续性，一般地也忽略了原来板的抗扭刚度，而抗扭刚度对于板的承载能力却起着很大的作用。

由于板的二维结构作用，结果使它的结构比较轻，因此也就具有很大的经济价值。这两点就大大地促使了板在工程中能够得到广泛的应用。很多结构，例如集装箱、船舶等要求完全封闭的结构，使用板就可以很容易地满足这一要求，而不需要另外再增加护盖；这样又进一步地达到了节省材料和劳动力的效果。虽然薄壳结构也可以达到上述优点，甚至效果能更好些，但是由于很多的结构构件需要有平面条件，因此妨碍了使用具有单曲面或双曲面的结构。利用壳体的三维承载能力可以达到更多地节省材料的效果，但是，特别是美国，由于它的造价较高，这一效果也就被抵销了，所以还是愿意采用板式结构。在这方面作者认为折板的应用就是一种很好的折衷方案，因为折板具备有板和壳体两者的优点。折板有时也称之为柱状壳体，它的性能基本上和壳体相似，因此在本书中不予论述。但是，读者会发现在本书的参考文献目录中列有讨论折板理论的有关文献[1]。此外，本书中很多章节还介绍了板的矩阵分析法和计算机分析法，这些方法也可以经济地用于求解复杂板、折板、甚至壳体问题。

因为板具有上述显著的优点，所以它已被广泛地应用于所有的工程范畴中。板经常应用于建筑结构、桥梁、水工结构、道路、集装箱、飞机、导弹、船舶、仪器工具及机械零件等方面（图 I.1 及 I.2）。

板通常可以按照其结构作用的特点分为下列几种主要类型：

1. **刚性板**，这是一种具有抗挠刚度的薄板，它按二维承载，主要是由内力矩（弯矩和扭矩）以及横向剪力来承受荷载，它的作用一般和梁相似（图 I.3a）。在实际工程中所指的板，就是理解为这种类型的刚性板，否则就需另加说明。

2. **薄膜**，这是一种没有抗挠刚度的薄板，它由轴向力和中心剪力*来承受横向荷载（图 I.3b）。这种承载作用可以采用受拉缆索网格来作近似，由于薄膜的厚度极薄，所以它的抗挠刚度可以忽略不计。

3. **柔性板**，这是一种刚性板与薄膜板的综合体，它是由内力矩、横向剪力、中心剪力及轴向力来承受外荷载的（图 I.3c）。由于这种板具有良好的自重对荷载的比值，所以已被广泛地应用于航空工业方面[I.1][I.2][I.3][I.4]。

* 横向剪力的作用方向是垂直于板的平面，而中心剪力则作用于板的平面内（参阅图 I.3a 及 b）。

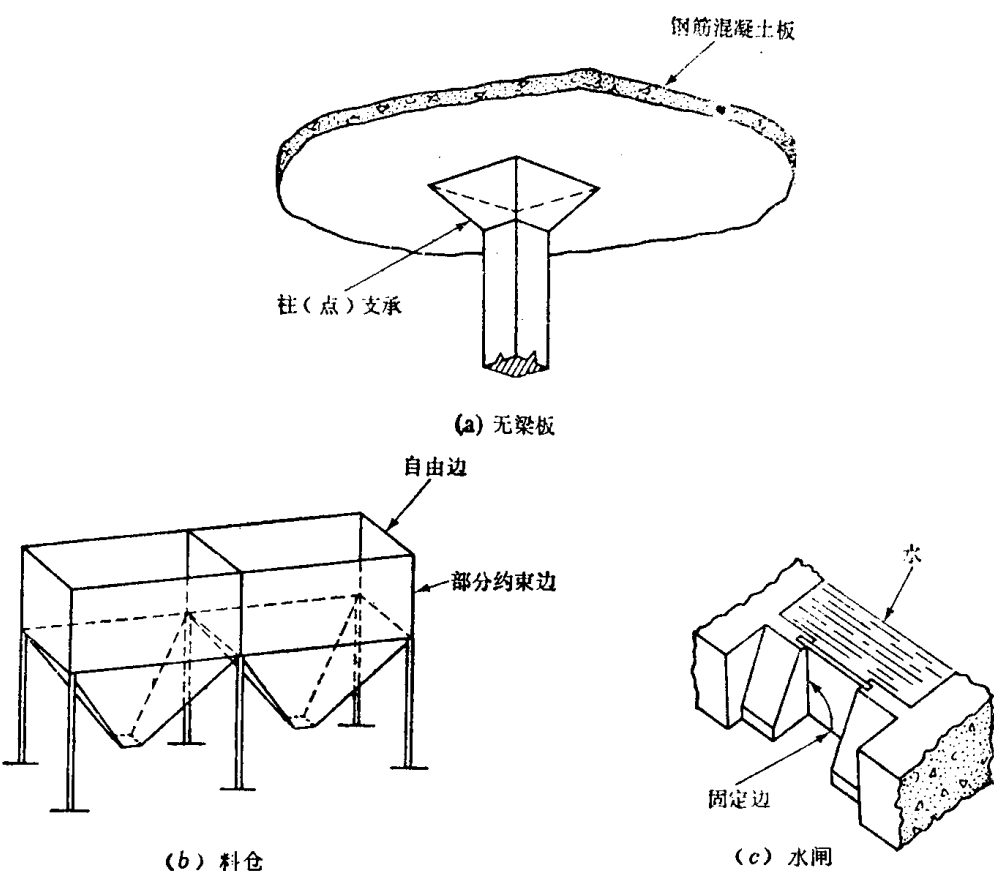


图 I.1 板的各种边界条件

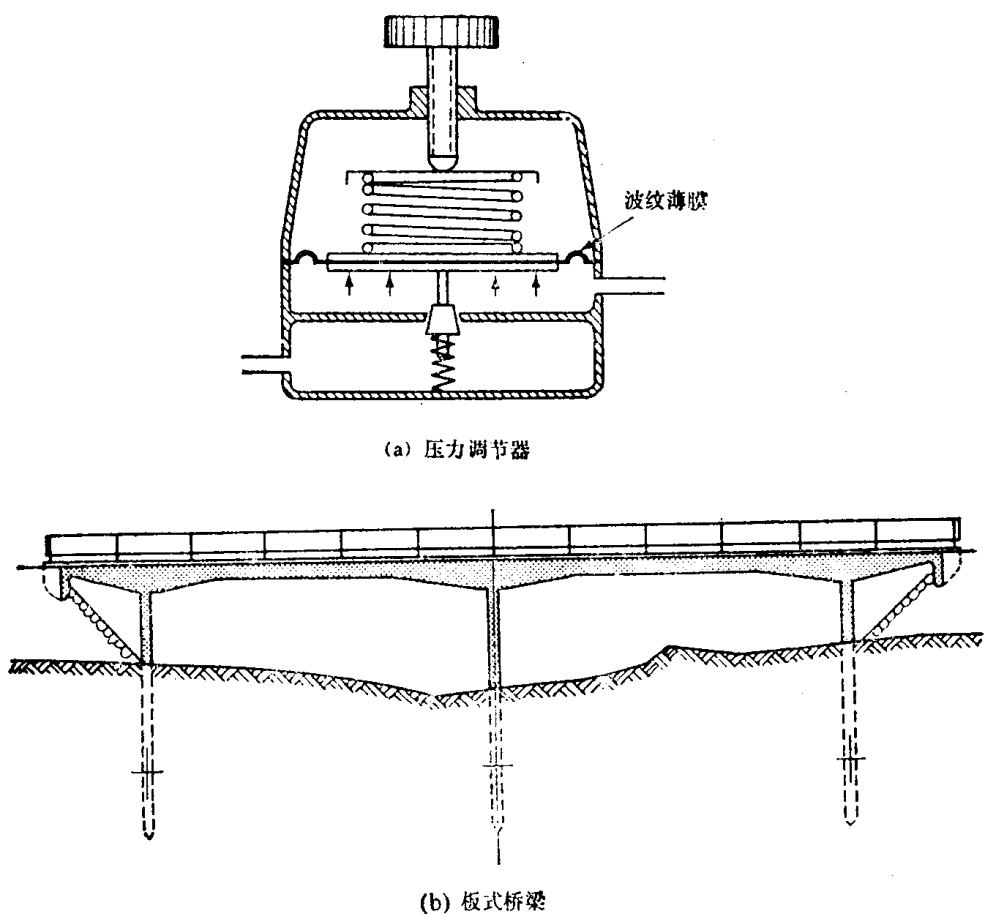
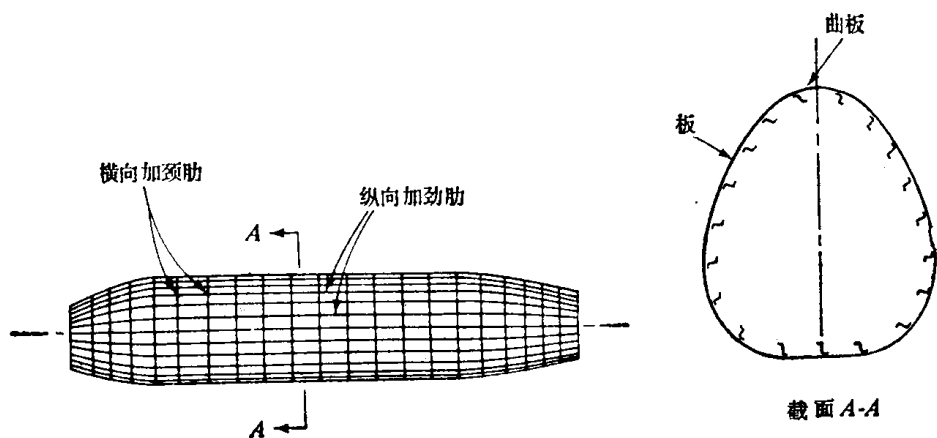
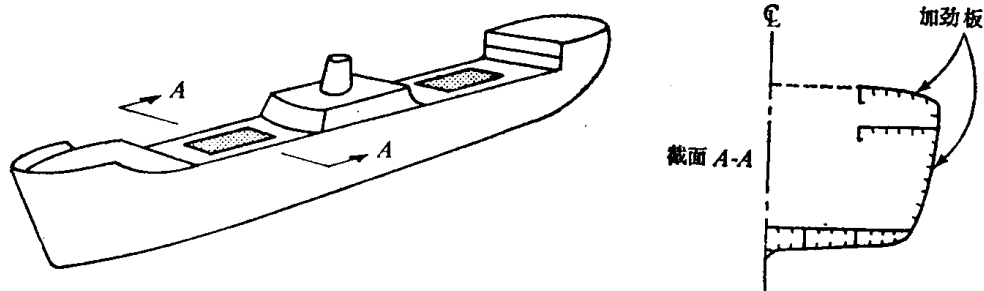


图 I.2 板在各种工程中的应用



(c) 航空和航天结构



(d) 商船

图 I.2 (续)

4. 厚板，它的内应力情况相似于三维连续介质体的应力情况（图 I.3d）。

所有的结构理论对于具有小挠度的结构与具有大挠度的结构是有着严格的区分的。对于前者，一般适用于叠加原理；而对于后者，则必需采用所谓“二次结构理论”。对于板，也毫无例外，因此也可以分为小挠度及大挠度板的理论。在大多数的情况下，一般的实际工程中是要避免采用具有大挠度的板，这是因为无论在使用中或在分析中都会带来很多问题。但是对于自重要求特别严格的航空工业来说则就不顾这些缺点了。因此本书中也将简要地论述一下有关板的大挠度理论。此外，板也可以是具有各向同性及各向异性的力学性能，并且还可以是由层状材料所组成。

板的理论还可以按照它的应力与应变的关系来进行分类。弹性板的理论是以著名的虎克定律所假定的应力与应变之间呈线性关系作为依据的。而非线性弹性理论、塑性理论、粘弹性理论则考虑了更为复杂的应力与应变之间的关系。除粘弹性理论仅考虑动荷载之外，所有这些理论又可以进一步地分成为板的静力学和板的动力学，这和最基本的结构理论一样，它可以按照外荷载是动的还是静的来加以区分。

在本书中，所有各种板的理论都是着重于清晰地阐明其基本原理，而不是对于该课题中所固有的大量内容进行完尽的报导。

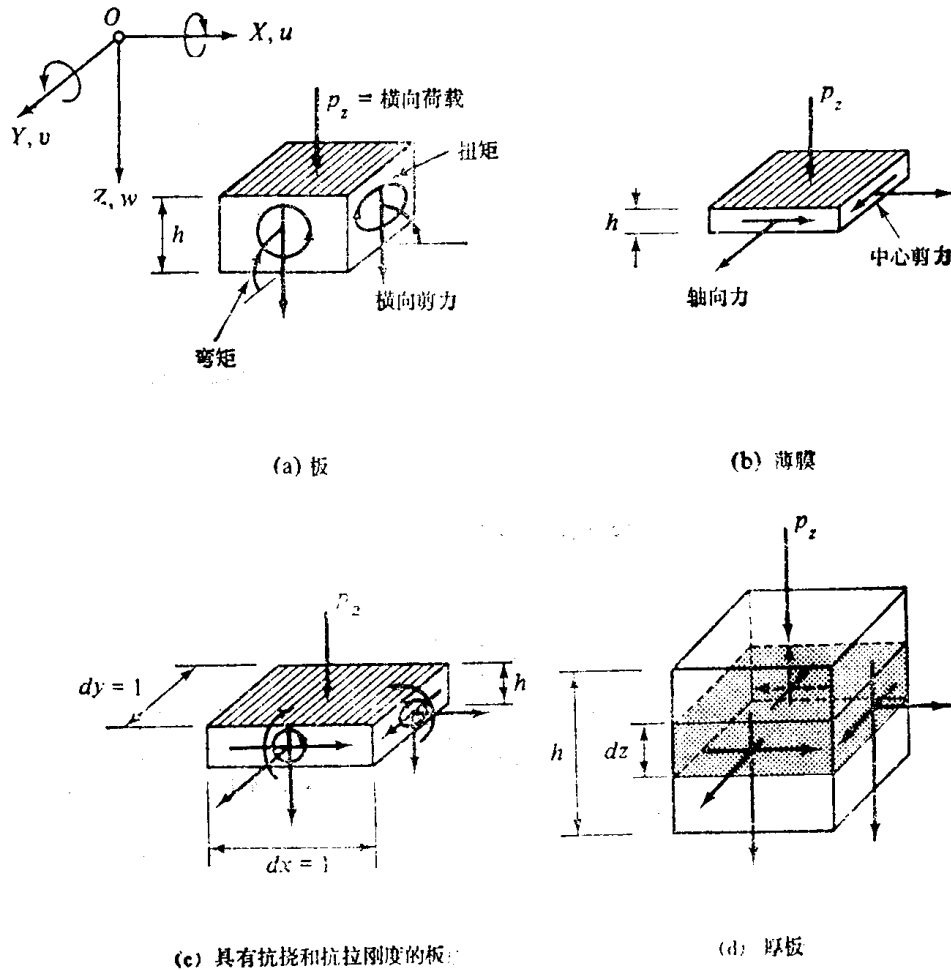


图1.3 各种类型板的单元体的内力

有关板的一般参考文献

- [1] GIRKMAN, K., *Flächentragwerke*, 5th ed., Springer-Verlag, Vienna, 1959.
- [2] TIMOSHENKO, S., and WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
- [3] NÁDAI, A., *Die elastischen Platten*, Springer-Verlag, Berlin, 1925 and 1968.
- [4] GEIGER, H., and SCHEEL, K., *Handbuch der Physik*, Vol. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1927.
- [5] BEYER, K., *Die Statik im Stahlbetonbau*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1956.
- [6] L'HERMITE, R., *Resistance des Materiaux*, Dunod, Paris, 1954.
- [7] VOLMIR, A. S., *Gibkie plastinki i obolochki* (Flexible Plates and Shells), Gos. Izd-vo Teehniko-Teoret Lyt-ry, Moscow, 1956.*
- [8] SAWCZUK, A., and JAEGER, T., *Grenzfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [9] ROARK, T. R., *Formulas for Stress and Strain*, 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [10] LAERMANN, K. H., *Experimentelle Plattenuntersuchungen*, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1971.

* 有德文译本可供应用, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

- [11] WAH, T. (ed), *A Guide for the Analysis of Ship Structures*, U.S. Department of Commerce, OTS, P. B. 181168, Washington, D.C., 1960.
- [12] GALERKIN, B. G., *Thin Elastic Plates* (in Russian), Gostrojizdat, Leningrad-Moscow, 1933.
- [13] PAPKOVITCH, P. F., *Stroitel'naia mekhanika koroblia*, (*Theory of Structure of Ships*, Vol. 2, chapter on bending and buckling of plates), Gos. Izd. Sudostroito. Promushl, Moscow, 1941.
- [14] PONOMAREV, S. D. et al., *Raschety na prochost' v machinostroennii* (*Stress Analysis in Machine Design*), Mashgiz, Moscow, 1958.
- [15] HAMPE, E., *Statik Rotationssymmetrischer Flächentragwerke*, Vol. 1, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1963.
- [16] JAEGER, L. G., *Elementary Theory of Elastic Plates*, The Macmillan Company, New York, 1964.
- [17] HENKY, H., *Neues Verfahren in der Festigkeitslehre*, Oldenbourg, Munich, 1951.
- [18] MÁRKUS, G., *Körszimmetrikus Szerkezetek Elmélete és Számítása* (*The Theory and Analysis of Rotational Symmetric Structures*), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.†
- [19] MANSFIELD, E. H., *The Bending and Stretching of Plates*, The Macmillan Company, New York, 1964.
- [20] BITTNER, E., *Platten und Behälter*, Springer-Verlag, Vienna, 1965.
- [21] RABICH, R., "Statik der Platten, Scheiben, Schalen," in *Ingenieurtaschenbuch Bauwesen*, Vol. 1, Pfalz-Verlag, Basel, 1964, pp. 888-964.
- [22] JONES, L. L., and WOOD, R. H., *Yield Line Analysis of Slabs*, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1967.
- [23] STIGLAT, K. and WIPPEL, H., "Platten," 2nd. ed., W. Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [24] MARGUERRE, K., and WOERNLE, H-T., *Elastic Plates*, Ginn/Blaisdell, Waltham, Mass., 1969.
- [25] DURGAR'YAN, S. M. (ed.), *Vsesoiuznaia konferentsiia po teorii plastin i obolochek* (*Theory of Shells and Plates*), Proceeding of the 4th All-union Conference on Shells and Plates at Erevan, Oct. 24-31, 1962, translated from Russian, National Aeronautics and Space Administration, NASA TT-F-341 Washington, D.C., 1966.
- [26] ANDERMANN, F., *Plaques rectangulaires chargées dans leur plan, analyse statique*, Dunod, Paris, 1969.
- [27] ULITSII, I. I. et al., *Zhelezobetonnye konstruksii* (*Reinforced Concrete Structures*), Gos. Izd.-vo Techn. Lit-ry, Kiev, 1958.
- [28] LEISSA, A. W., "Vibration of Plates," National Aeronautics and Space Administration, *NASA-SP-160*, Washington, D.C., 1969.
- [29] STIGLAT, K. and WIPPEL, H., "Massive Platten," in *Beton-Kalender 1973*, Vol. 1, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1973, pp. 199-289.
- [30] Moscow Inzhenerno-stroitel'nyi Institut, Kafedra Stroitel'noi Mekhaniki, *Raschet plastin i obolochek* (*Design of Plates and Shells*), Pod Obshech Red. V. G. Rekach, Moscow, 1963.
- [31] KALMANOK, A. S., *Raschet plastinok; sprayochnoe posobie* (*Design of Plates; Reference Book*), Gos. izd-vo lit-ry po stroitel'stvu, arkhitekture i stroit. materialam, Moscow, 1959,
- [32] VAINBERG, D. V., *Plastiny, diski, balki-sienki* (*Plates, Disks, Deep Beams; Strength, Stability and Vibration*), Gos. izd-vo lit-ry po stroitel'stvu i arkhitekture, Kiev, 1959.

† 另有德文译本可供应用, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1967.

绪论部分的参考文献

- [I.1] ABRAMS, L. A., *Structural Design of Missiles and Spacecrafts*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- [I.2] KOELLE, H. H., *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
- [I.3] KUHN, P., *Stresses in Aircraft and Shell Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [I.4] SECHLER, E. E., and DUNN, L. G., *Airplane Structural Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.

历史背景

结构力学的发展总的来说是从研究静力问题开始的[H.1], 然而关于板的首次分析和实验研究, 几乎是从板的自由振动开始的。

板的薄膜理论的第一个数学表达式是由欧拉(1766)发表的, 他利用两组互相垂直张拉的弹簧的比拟, 解决了矩形和圆形弹性薄膜的自由振动问题[H.2]。欧拉的学生, 伯努里, 这位同名的伟大的著名数学家的重孙, 他引用了格构比拟[H.3], 将欧拉的比拟推广到板上。由于他在运动微分方程中并未包括板的抗扭刚度, 因此仅仅发现了理论与实验之间的相似性, 而没有普遍的一致性。

德国物理学家契拉特尼发现了各种自由振动的振型[H.1]。他在水平板上进行了实验, 将粉末均匀分布地撒在水平板上, 振动以后便形成了有规则的图形。这些粉末沿着波节线堆积, 而波节线上并不产生垂直位移。

法国数学家索弗、邱曼应用变分法得到了关于板的振动微分方程。但是, 在她的应变能表达式中却忽略了由于板的中面翘曲所作的功。虽然她获得了巴黎科学院(1816)的奖金, 然而, 鉴定人对她的著作并非十分满意, 因为它没有正确地阐明基本原理。

曾经是鉴定人之一的拉格朗日, 他修正了邱曼的著作, 加进了遗漏项, 因此成为首先使用板的正确微分方程的第一个人。未经推导的这个微分方程只是在拉格朗日死后才从他的手稿中被发现的(1813)。

伟大的工程师、桥梁设计者纳维(1785—1836), 可以认为是近代弹性理论的真正创始人。在他的大量的科学活动中包括了求解各种板的问题。纳维推导出了具有抗弯刚度的矩形板的正确微分方程。为了求解某些边界值问题, 他引用了一种“精确”方法, 也就是将微分方程变成为代数方程。纳维法就是利用当时傅里叶所发明的三角级数为依据的。如果板的边界条件是纳维式的, 也就是简支的, 那么这个所谓的微分方程的强迫解便可以相当方便地得到数字上的精确解。泊松(1829)将纳维推导出来的板的基本微分方程推广应用于圆板的横向振动。但是由泊松所导得的公式中, 其边界条件仅适用于厚板。

由于克希荷夫(1824—1887)在他的数学物理论文(德文版)[H.4]中所发表的创造性的著作, 因此他已被公认为考虑弯曲和拉伸联合作用的广义板理论的创始人。在分析大挠度板的问题中, 他认为非线性项是不应再被忽略了。克希荷夫的另外一些重要贡献, 就是他发明了板的频率方程式, 以及在平板问题的求解中引进了虚位移法。克希荷夫的著作是由克莱勃希[H.5]翻译的。在这本译著中包括了圣维南的许多有价值的评论。其中最主要的是发展了克希荷夫的薄板微分方程, 这个方程是以正确的数学方式考虑了板的弯曲和拉伸的联合作用。勒符又将克希荷夫的理论应用于厚板中[1.1.22]。

近一个世纪以来,舰船的建造者们已采用结构钢代替木材来建造舰船,因而也改变了建造的方法。这种建造材料上的改变对于各种板在理论方面的发展是极为有利。俄国科学家在船舶的建造中首先应用了纯数学理论以取代传统的惯例并在这方面作出了重大的贡献。特别是克罗洛夫(1863—1945)[H.6]和他的学生鲍勃诺夫[H.7][H.8][H.9],对具有抗弯及抗拉刚度的薄板理论方面作出了广泛的贡献。由于存在着语言方面的障碍,西方世界直到后来才慢慢地认识和使用了一些方面的成就。铁摩辛柯在这方面的功绩就是使得西方科学家的注意力逐步地直接转向于俄国人在弹性理论方面的研究成果。在铁摩辛柯的很多重要贡献中[2]最主要的就是大挠度圆板的求解[H.11]和弹性稳定问题的公式[H.12]。

1907年费耳在他的工程力学一书[H.13]中,论述了板的非线性理论。但是板的大挠度理论的微分方程的最终形式还是由冯·卡曼推导出来的。冯·卡曼在他的后期著作中还研究了板的有效宽度[H.15]及滞后屈曲特性[H.16]。

纳达的著作[3]就是早期专门论述板的理论的著作之一。威斯特加脱[H.17]和施赫尔[H.18]研究了在弹性基础上板的问题。普莱斯柯特在他的应用弹性力学一书中[1.1.5]介绍了考虑中面内有应变的挠曲板的更为精确的理论。

现代航空工业的发展提供了另一个动力,将板的问题推向更为精确的分析研究。有很多各方面的科学家和工程师对于板的承受平面内的作用力、滞后屈曲特性和振动(高频抖动)以及加劲板等问题都作过分析。本书对于在两次世界大战期间进行研究活动的研究人员中仅提到了华格纳、李维、勃莱依赫和费得霍夫。

波兰科学家赫伯研究了正交各向异性板[3.6.3],并且解决了在非对称分布荷载和边缘弯矩作用下的圆板问题[H.19]。赖斯纳提出了一种更为精确的板的理论[H.20],他考虑了板由于横向剪力所引起的变形。在苏联,伏尔米[7]和帕诺夫的著作主要致力于非线性问题的求解,而奥尼亚西维利和岗凯维奇则研究的是板的自由振动和强迫振动。钱伟长引用了摄动法来求解大挠度问题。约翰逊则根据对可能出现断裂线位置的估算,发展了一种完全新的板的静力分析方法[7.1.3]。约翰逊的屈服线分析法*可以认为是在解决板的问题方面第一次对板的经典理论作出重大的突破。霍奇[H.21]将数学塑性理论推广到分析轴对称板的问题。

最近,高速电子计算机的应用(1950),大大地影响了板的静力和动力分析。虽然早在1941年赫列尼柯夫[2.9.1]已经发明了一种为复杂板的静力分析所用的等效格构体系,但是由于当时还没有高速电子计算机,因此他的对于连续介质的离散化方面的基本理论的研究成果,一直没有能完全地被采用。1956年特纳、克鲁、马马丁和托普[H.22]引用了有限单元法,这就使得有可能应用实用的方法来求得复杂板和壳体的数值解。然而有限单元法的应用也要求具有相当储存量的高速电子计算机。在这一方面阿古利斯和秦克维奇作出了很大的贡献。应用于任意荷载作用下,任意形状板的静力和动力分析的其它适用于计算机计算的方法,是由斯图西和柯拉兹根据改进的有限差分法发明的。

板的理论分析的最新趋势,是以大量地使用电子计算机和引入更为严密的理论为其特征。

有关历史背景的参考文献及参考书目

- [H.1] TODHUNTER, I., and PEARSON, K., *A History of the Theory of Elasticity*, Vols. 1 and 2, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
[H.2] EULER, L., "De motu vibratorio tympanorum," *Novi Commentari Acad. Petro-*

* 参阅第七章。

目 录

符 号..... 1
绪 论..... 1

第 I 部分 弹性板的静力分析

第 1 章 经典法..... 3
 1.1 弹性理论引论..... 3
 1.2 在直角坐标系内板的微分方程*12
 1.3 挠曲理论的边界条件*19
 1.4 基本微分方程的严密解.....22
 1.5 傅里叶级数.....28
 1.6 应用二重三角级数的纳维解法*37
 1.7 应用单傅里叶级数解法（李维法）*41
 1.8 应用单傅里叶级数和二重傅里叶级数的解法续例.....46
 1.9 映象法.....51
 1.10 板条.....53
 1.11 圆板微分方程*61
 1.12 在轴对称荷载作用下圆板的严密解*64
 1.13 各种类型的圆板.....67
 1.14 在偏心集中力作用下的圆板.....70
 1.15 连续板.....73
 1.16 各种几何形状的板.....85
 1.17 抗挠刚度变化的板.....89
 1.18 弹性地基上的板.....95
 1.19 薄膜及各种比拟法100
 1.20 同时挠曲及拉伸*.....105
 1.21 各种经典法的总结和述评*.....108
 习 题*.....109
第 2 章 数值法和近似法111
 2.1 实用分析法简介*.....111
 2.2 普通有限差分法*.....113
 2.3 改进的有限差分法*.....131
 2.4 线性联立方程的求解147

* 带有星号者推荐为课堂上教学用。

2.5	能量法*	154
2.6	其它变分法*	165
2.7	能量法的改进方法	176
2.8	网格结构的矩阵一位移分析法*	180
2.9	构架法(格构比拟法)*	188
2.10	有限单元法*	201
2.11	弯矩分配法在连续板中的应用	229
2.12	连续矩形楼板设计的工程方法	237
2.13	总结及结论*	254
	习 题*	256
第3章	高等论题	258
3.1	大挠度理论	258
3.2	影响面	263
3.3	无梁板	269
3.4	斜板	274
3.5	温度应力	281
3.6	正交各向异性板	284
3.7	多层板	298
3.8	总结和结论	301

第Ⅱ部分 弹性板的动力分析

第4章	动力分析的经典法	305
4.1	结构动力学引论*	305
4.2	横向运动的微分方程*	314
4.3	板的自由挠曲振动*	316
4.4	薄膜的自由横向振动*	321
4.5	矩形板的强迫横向振动	325
第5章	振动计算的数值法和近似法	332
5.1	确定自然频率的能量法*	332
5.2	应用有限差分法求解运动微分方程*	338
5.3	有限单元法在板的动力分析中的应用*	346
5.4	运动的相容质量矩阵	356
5.5	离散体系的阻尼	363
5.6	由静力挠度确定自然频率*	368
5.7	总结和结论	373
	习 题*	374

第Ⅲ部分 板的稳定性

第6章	稳定性分析基础	379
6.1	基本概念*	379