线性算子组的联合谱

张奠宙　胡善文　　著
王宗尧　黄旦润

华东师范大学出版社

线性算子组的联合谱

张莫宙　胡善文
王宗尧　黄旦润　著

华东师范大学出版社

(沪)新登字第 201 号

线性算子组的联合谱

张奠宙　胡善文　王宗尧　黄旦润　著

华东师范大学出版社出版
(上海中山北路 3663 号)
新华书店上海发行所发行　　江苏句容县排印厂印刷
开本：850×1168　1/32　　印张：8.5　　字数：210 千字
1992 年 6 月第一版　　1992 年 6 月第一次印刷
印数：001—2,000 本

ISBN 7-5617-0722-3/O·025　　定　价：7.35 元

前言

算子组联合谱的概念早就出现过，但是真正引起人们重视是在 1970 年 J.L.Taylor 的工作之后。他用代数拓扑中的复形和同调概念定义了联合谱，而且采用多复变函数的技巧发展了算子组的解析演算（参见[112]、[113]）。Taylor 发表了几篇文章后就离开了这块阵地。罗马尼亚学者继续了这项工作，特别是将可分解算子的概念推广到联合谱，别开生面。其中 Frunza 和 F-H·Vasilescu 的工作颇有建树。联邦德国的 Albrecht，Eschmier 的研究内容和罗马尼亚学者基本相同，但具有自己的特色。

美国方面对联合谱研究持乐观态度的有著名算子论学者 R·G·Douglas。他的学生 R·E·Curto 做了一系列出色的工作。1980～1981 年间，Vasilescu 和 Curto 分别将 Taylor 联合谱的理论用泛函分析的语言进行表述，使得研究工作更为便利。Curto 对 Hilbert 空间上算子组的联合谱理论做了深刻研究，在亚正常算子组和半亚正常算子组方面成果累累。日本学者长宗雄（Cho Muneo)和高口真(Takaguchi Makoto）在联合数值域和联合达范性的问题，有许多论文。

我国在算子组联合谱方面的先行者是复旦大学的夏道行教授。早在 1979 年全国第二次泛函分析会议结束后返沪的旅途中，他就鼓励我们研究多个算子的谱理论，并说他自己也将关心这方面的工作。近几年来，夏道行连续发表论文，首创非交换自共轭算子组的联合谱概念，并成功地用于亚正常算子组的研究。现在，复旦大学的陈晓漫，黄超成等继续开拓，获得了包括 Putnam 不等式(算子组)在内的许多好结果。复旦大学的博士李绍宽（现在中国纺织大学任教）及他的学生季跃、姜健飞等做了在初等算

子与联合谱方面许多深入的研究。

国内学者中沿罗马尼亚学派道路前进的有吉林大学邹承祖、李良青。南京大学的王声望教授也密切注视这项工作，他的学生刘光裕是国内最早从事联合谱的学者之一。近几年来，更年青的研究生也开始涉及此领域。

华东师范大学算子理论小组从 1982 年起开始研究算子组的联合谱理论，参加者有张奠宙、魏国强、王宗尧、黄旦润、柴俊，胡善文等人。1985 年起，胡善文去复旦大学从师严绍宗教授，并以联合谱研究获博士学位。他的成果得益于复旦大学算子理论学者的巨大帮助。

联合谱研究的实际背景是中外学者十分关心的问题。多参数微分方程（Sleeman [105]）是其中之一。联合谱与求解算子方程的关系，与 Π_k 空间、$A_{\mathscr{D}}$ 代数联系也值得注意。据王声望先生说，Nagy 认为联合谱将与粒子物理研究有关，这是一种乐观的估计。

本书是我们研究成果的总结。初稿写于 1985 年，以后几经修改，最后又补充了胡善文在复旦大学攻读博士学位时的研究成果。为了读者方便，写了一些预备知识和联合谱的基本理论。我们确想尽量反映国内外的研究成果，但限于能力和篇幅，却未能做得很好，请读者鉴谅。

最后，我们要感谢吉林大学的江泽坚教授，复旦大学的严绍宗教授、本校的程其襄教授，以及马吉溥、李炳仁、孙顺华诸位教授，由于他们的鼓励和支持，指点与帮助，我们的研究工作才得以顺利进行，也才有本书出版。

对华东师大出版社的支持，我们也表示衷心的感谢。

本课题得到国家自然科学基金资助。

编　　者

1989 年 11 月

目　录

第一章　一些准备知识

联合谱的理论需要涉及经典泛函分析以外的一些预备知识，例如同调代数、多复变函数论等，我们不准备多作介绍，而且在以后的章节中也尽量少用泛函分析以外的工具。但是有一些基本概念是不可少的，我们在此简单的叙述，以备读者参考。

§1　Grassmann 代数，外积

设 V 是 n 维实线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是它的基，我们可以由 V 出发，导出一个具有数乘、加法和乘法的某种代数，称之为 Grassmann 代数 $G(V)$，它满足如下条件：

(a) I 和 V 生成 $G(V)$；

(b) I 是 $G(V)$ 的乘法单位元；

(c) 在 $G(V)$ 中，加法、数乘、及实数之间的加法和乘法运算，就是 V 和实数集原来的运算；

(d) 若 $G(V)$ 中的乘法用 $x\wedge y$ 表示，则 $x\wedge y=-x\wedge y$；

(e) 在 V 中存在基 $e_1,\cdots,e_n$，使 $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$。

这样的 $G(V)$ 可用 V 的基构造出来。这就是在 V 的基之间引入外积 $\wedge$：

1° 结合律　$(e_{i_1}\wedge e_{i_2})\wedge e_{i_3}=e_{i_1}\wedge(e_{i_2}\wedge e_{i_3})$；

2° 分配律　$e_{i_1}\wedge(e_{i_2}+e_{i_3})=e_{i_1}\wedge e_{i_2}+e_{i_1}\wedge e_{i_3}$；)

3° 反对称律　$e_{i_1}\wedge e_{i_2}=-e_{i_2}\wedge e_{i_1}$；

4° 关于数乘是齐次的　$\xi e_i\wedge e_j=\xi(e_i\wedge e_j)=e_i\wedge\xi e_j$。

考虑 $G(V)$ 中以下形式元素所成之集 $B^0,B^1,\cdots,B^n$：

B^0：1；

B^1：$e_i, i=1,2,\cdots,n$；

B^2：$e_{i_1}\wedge e_{i_2}$，$i_1<i_2$，$1\leqslant i_1,i_2\leqslant n$；

B^p：$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$，$i_1<i_2<\cdots<i_p$，$1\leqslant i_1,\cdots,i_p\leqslant n$；

B^n：$e_1\wedge\cdots\wedge e_n$。

以 B^p 中的元素作为基，用有限线性组合的方法生成线性空间 V^p。容易验证 B^p 中的$\binom{n}{p}$个元素是线性无关的，故 V^p 是$\binom{n}{p}$维的。我们称 V^p 为 V 的 p 级外代数。V^n 即 R，V^1 即 V。

于是 Grassmann 代数 $G(V)$ 正好是 $V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$，它的维数为$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

本书经常把 V^p 记为 E^n_p，称为由不定元 e_1、$e_2,\cdots,e_n$ 产生的 p 级外代数。

§2 张量积

一、代数张量积（参见［89］）

设 M 是一个可交换的加法群，R 是有单位元 1 的环，若对 $a\in R$，$x\in M$，可定义乘法 ax，满足

（1）$a(x+y)=ax+ay$，　$\forall x,y\in M$；

（2）$(ab)x=a(bx)$，　$\forall a,b\in R$；

（3）$1\cdot x=x$，

则称 M 是环 R 的左模，记为 ${}_RM$。若乘法改为 xa，且相应地有

（1'）$(x+y)a=xa+ya$；

（2'）$x(ab)=(xa)b$；

（3'）$x\cdot 1=x$，

则称 M 是环 R 上的右模，记为 M_R。

设给了环 R 上的右模 M_R 和左模 ${}_RN$，让我们来定义 M_R 和 ${}_RN$ 的张量积。为此我们先构作一个以 $M\times N$ 中元素 (x,y) 为基构成的群 F，其元素为

$$n_1(x_1,y_1)+n_2(x_2,y_2)+\cdots+n_r(x_r,y_r),$$

这里 $x_i\in M$，$y_i\in N$，n_i 为整数。

上式中若 $(x_i,y_i)\neq(x_j,y_j)$，$i\neq j$，则它为 0 的充要条件是所有 $n_i=0$。令 G 是 F 的子群，其元素由形如

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),\quad (x,y+y')-(x,y)-(x,y'),$$

$(xa,y)-(x,ay)$ 的元素所生成，现在定义

$$M\otimes_R N=F/G,\quad x\otimes y=(x,y)+G\in M\otimes_R N。$$

我们验证：$\otimes$ 是一个双线性映射，事实上

$$\begin{aligned}&(x+x')\otimes y-x\otimes y-x'\otimes y\\ &=((x+x',y)+G)-((x,y)+G)-((x,y')+G))\\ &=((x+x',y)-(x,y)-(x',y))+G=G=0,\end{aligned}$$

其中 0 为 F/G 中零元。同样可知

$$x\otimes(y+y')=x\otimes y+x\otimes y',\quad xa\otimes y=x\otimes ay。$$

$M\otimes_R N$ 称为 M_R 和 ${}_RN$ 的代数张量积。

二、Banach 空间的张量积

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，它们是线性空间，当然可看作既是数域的左模又是数域的右模。按照 2.1 段可以定义 $x\otimes y$。$X\otimes Y$ 作为代数张量积，由形如 $x\otimes y$ 的有限线性组合所构成。$X\otimes Y$ 上可定义多种范数，常见有：

$$\|w\|=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\|x_i\|\|y_i\|:\ \sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i=w\right\},\tag{1.1}$$

$$\|w\|=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n\varphi(x_i)\psi(y_i)\right|:\ x_1,\cdots,x_n\in X,y_1,\cdots,y_n\in Y,\ \varphi\in X^*,\psi\in Y^*,\|\varphi\|\leqslant1,\|\psi\|\leqslant1;\ w=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right\}。\tag{1.2}$$

容易验证，这确实是一个范数。

将 $X\otimes Y$ 依此范数完备化，得到一个 Banach 空间，称为 Banach 空间 X 和 Y 的张量积，记为 $X\hat{\otimes}Y$。

如果 H 和 K 是两个 Hilbert 空间，$H\otimes K$ 表示代数张量积，其中的元素如 $\sum_{i=1}^{m} h_i\otimes k_i$，$h_i\in H$，$k_i\in K$，在 $H\otimes K$ 上定义内积：

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} h_i\otimes k_i,\ \sum_{i=1}^{n} h'_i\otimes k'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} \langle h_i, h'_j\rangle\langle k_i, k'_j\rangle,$$

这确实是一个内积，而且是上述 Banach 空间张量积定义中所给范数的特殊情形，将它完备化，即得 H 和 K 的张量积空间，记为 $H\hat{\otimes}K$。显然，如果 $\{e_\alpha\}$，$\{f_\beta\}$ 分别是 H 和 K 的正交基，则 $\{e_\alpha\otimes f_\beta\}$ 为 $H\hat{\otimes}K$ 的正交基。

§3 同调代数（参见 [89] ）

设 A 是具有单位元 1 的复数域 C 上的代数，有一个序列 $\{K_p,\partial_p\}_{p\in Z}$，其中 K_p 是左 A 模，∂_p 是 A 模同态。$K_p\to K_{p-1}$，Z 表示整数环，即存在如下的序列：

$$\cdots\to K_{p+1}\xrightarrow{\partial_{p+1}}K_p\xrightarrow{\partial_p}K_{p-1}\xrightarrow{\partial_{p-1}}\cdots,$$

如果上述序列满足 $\partial_p\circ\partial_{p-1}=0$，$p=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则称 $\{K_p,\partial_p\}$（简记 K 或 (K,∂)）是一个复形，∂_p 称为边界算子。

每个复形都有其同调序列，它是一列商 A 模：

$H_p(K)=H_p(K,\partial)=N(\partial_{p-1})/R(\partial_p)$，

这里 $N(\partial_{p-1})$ 是 ∂_{p-1} 的零空间，有时也记为 $\mathrm{Ker}\partial_p$，$R(\partial_p)$ 是 ∂_p 的值域，有时也记为 $\mathrm{Im}\partial_p$。一个复形称为正合，是指对任意 $p\in Z$，$N(\partial_{p-1})=R(\partial_p)$，即 $H_p(K)=0$。

在以上的定义中，我们假定 ∂_p 是从 K_p 到 K_{p-1}。也可以用另一种形式来定义复形 $K=\{K^p,\ \partial^p\}$，其中，∂^p 从 K^p 到 K^{p+1}，

$\delta^{p+1}\circ\delta^p=0$，相应地 $H^p(K)=N(\delta^p)/R(\delta^{p-1})$。这种复形，有时也特称为上链复形，在不致引起误会的情形下，我们都统称之为"复形"。

若 $\{K^p,\delta^p\}$ 和 $\{L^q,\alpha^q\}$ 是两个复形，如果存在一列 A 模同态 f^p：$K^p\to L^p$，使得 $\alpha^p\circ f^p=f^{p+1}\circ\delta^p$ 成立，$p\in\mathbf{Z}$，则称$\{f^p\}$是一个链同态。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\longrightarrow & K^p & \xrightarrow{\delta^p} & K^{p+1} & \longrightarrow\cdots \\
 & \downarrow{f^p} & & \downarrow{f^{p+1}} & \\
\cdots\longrightarrow & L^p & \xrightarrow{\alpha^p} & L^{p+1} & \longrightarrow\cdots
\end{array}$$

设 f 是上述的一个链同态，则可诱导出一个 A 模同态 f_*^p：将 $H^p(K)$映到 $H^p(L)$，规律是对所有的 $k\in N(\delta^p)$有：

$f_*^p(k+R(\delta^{p-1}))=f^p(k)+R(\alpha^{p-1})$。

下面还要定义复形之间的正合关系。

设 $\{K^p,\delta^p\}$，$\{L^q,\alpha^q\}$，$\{M^r,\beta^r\}$ 是三个复形，$\{f^p\}$ 和 $\{g^q\}$ 分别是 $K^p\to L^p$ 和 $L^p\to M^p$ ($p\in\mathbf{Z}$)的链同态。如果对每个 $p\in Z$，

$$0\longrightarrow K^p\xrightarrow{f^p}L^p\xrightarrow{g^p}M^p\to 0$$

是正合的，即 $N(f^p)=0$，$R(f^p)=N(g^p)$，$R(g^p)=M^p$，则称

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}L\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0 \qquad (*)$$

是正合的。

我们有如下重要定理：

定理 3.1 若($*$)是正合的，则存在一列同态$\{\theta^p\}$，使得

$$\cdots\longrightarrow H^{p-1}(M)\xrightarrow{\theta^{p-1}}H^p(K)\xrightarrow{f_*^p}H^p(L)$$
$$\xrightarrow{g_*^p}H^p(M)\xrightarrow{\theta^p}H^{p+1}(K)\longrightarrow\cdots \qquad (**)$$

也是正合的。

这个定理是说由短正合列(＊)可导出长正合列(＊＊)。证明可见 Jacobson[89]定理 6.3,p.334。这时的 θ 可以定义为

$$\theta^p(m+R(\beta^{p-1}))=k+R(\delta^p),$$

这里 $m\in N(\beta^p)$, $k\in N(\delta^{p+1})$, $f^{p+1}(k)=\alpha^p(l)$, $g^p(l)=m$, l 是 L^p 中某元素。

§4 泛函分析方面的若干预备知识

本书涉及的泛函分析知识是多方面的，我们不可能在此一一列举。我们假定读者已具备夏道行等编著的《实变函数论与泛函分析》（下册）的知识。单个算子理论的知识可以参考哈尔莫斯的名著《希耳伯特空间问题集》（林辰译，1984 年，上海科技出版社），有关的定义和定理大都可在该书内找到。有些章节还须阅读其它专著，如第四章的非正常算子组就需要夏道行的《线性算子谱理论》(I) 的若干基本事实作为基础。

这里我们补充一些在上述夏道行和哈尔莫斯两本著作中没有列入但较常用到的若干基本事实。

一、无界算子理论（参见 [9]）

设 T 是定义在 Banach 空间 X 的子空间 D 上并映到 X 内的线性算子，D 称为 T 的定义域，记为 $D(T)$。若 $D(T)$ 在 X 中稠密，称 T 是稠定算子。我们称 T 是闭算子，是指如果 $x_n\in D(T)$, $x_n\to x$, $Tx_n\to y$, 则有 $x\in D(T)$, 且 $Tx=y$。

定理 4.1（逆算子定理） 若 T 是 Banach 空间 X 到 X 的线性算子，定义域为 $D(T)$，如果 T 是一对一的，而且 T 的值域充满整个空间 X，则 T^{-1} 存在而且是有界算子。

如果 T 是稠定算子，那么可以定义 T 的共轭算子 T^*，使得对任何 $f\in X^*$，有 $f(Tx)=f^*(x)=(T^*f)(x)$。

无界算子 T 的图象是指 $X\oplus X$ 中的子集 $G(T)=\{(x,Tx),$

$x\in D(T)\}$。设 T 和 S 是两个无界算子，如果 $x\in D(S)$ 时，$Sx=Tx$ 且 $G(T)\supset G(S)$，则称 T 是 S 的延拓，记为 $T\supset S$。

下面我们在Hilbert 空间上进行讨论。

定理 4.2 设 T 是稠定算子，则 T 必有闭延拓，且 T^{**} 正是 T 的闭延拓。

线性算子 T 叫做对称的，是指对 $\forall x,y\in\mathscr{D}(T)$，均有 $(x,Ty)=(Tx,y)$。如果 T 还是稠定的，对称性等价于条件 $T^*\supset T$。特别地如 $T=T^*$，则称 T 是自共轭的。

设 T 是闭的对称算子，$D(T)^{\perp}$ 和 $R(T)^{\perp}$ 称为 T 的亏子空间（记为 $(H_T^+,\ H_T^-)$，其维数分别为 m 和 n（可能是有限数也可以是无限基数）。(m,n) 称为 T 的亏指数。

定理 4.3 T 是闭对称算子，则

$$D(T^*)=D(T)\oplus H_T^+\oplus H_T^-。$$

特别地，T 是自共轭的充要条件是亏指数为（0，0）。

定理 4.4 为了对称算子 T 具有自共轭的延拓，必须而且只须它的亏指数相等。

设 T 是稠定闭算子，而且有关系 $T^*T=TT^*$，则称 T 是正常算子。它有谱分解

$$T=\int_{\sigma(T)} zdE(z)$$

$E(z)$是复平面上取值为投影算子的可列可加测度。

二、算子代数（参见［66］）

设$\mathscr{A}$是线性空间，其中定义有乘法并成为有单位元 e 的代数。如果在其中引入范数使之成为 Banach 空间，而且对此乘法有关系式：$\|f\cdot g\|\leqslant\|f\|\|g\|,(f,g\in\mathscr{A}),\|e\|=1$，则称$\mathscr{A}$是 Banach 代数。

在 Banach 代数$\mathscr{A}$中可以引入一元素的豫解集和谱的概念。设 $x\in\mathscr{A}$，令 $\rho(x)=\{\lambda\in C;\ (x-\lambda e)^{-1}\in\mathscr{A}\}$，$C\backslash\rho(x)=\sigma(x)$。

$\rho(x)$与$\sigma(x)$分别为x在$\mathscr{A}$中的豫解集和谱。

$\mathscr{A}$中的子空间M称为右（左）理想，是指对任意$x\in\mathscr{A}$，$y\in M$；总有$xy\in M(yx\in M)$。若$\mathscr{A}$中元素可换，则不区分左、右理想，简称理想。如果没有别的理想N能包含$M(N=\mathscr{A}$除外)，则称M是极大理想。

$\mathscr{A}$是Banach空间，其上有线性连续泛函。对于Banach代数来说，更重要的是可乘线性泛函，即线性泛函f还具有性质

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\ f(e)=1。$$

对于交换的Banach代数$\mathscr{A}$，极大理想和可乘线性泛函是一一对应的：可乘线性泛函的零空间是极大理想，反之亦然。

定理 4.5(Gelfand) 若$\mathscr{A}$是交换Banach代数，Δ是它的一切极大理想所成的集合，对$M\in\Delta$，相应地有可乘线性泛函h与之相应，对$x\in\mathscr{A}$，令$h(x)=x(M)$。我们将$x\to x(M)$称为x的Gelfand表示，于是成立以下结论：

(1) Δ是非空的紧空间，$x(M)$是Δ上连续函数；

(2) 将x映为$x(M)$的映射Γ是代数同态；

(3) $\|\Gamma(x)\|=\|x(M\|_\infty=\sup\limits_{M\in\Delta}|x(M)|\leqslant\|x\|$；

(4) x可逆当且仅当$\Gamma(x)$在$C(\Delta)$中可逆；

(5) $\sigma(x)=\{x(M),M\in\Delta\}$。

Banach空间上一切线性有界算子构成Banach代数。由$\{A^n\}_{n=1}^\infty$和I生成的子空间是一个交换的Banach代数。下面再介绍一些定义。

定义 4.6 设$\mathscr{A}$是Banach代数，我们说$\mathscr{A}$上可定义对合运算，是指存在一个$\mathscr{A}$上映照$T\to T^*(T\in\mathscr{A})$，使得

(1) $T^{**}=T$，$T\in\mathscr{A}$；

(2) $(\alpha S+\beta T)^*=\bar{\alpha}S^*+\bar{\beta}T^*$，其中$S,T\in\mathscr{A}$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$；

(3) $(ST)^*=T^*S^*$。

如果还成立$\|T^*T\|=\|T\|^2(T\in\mathscr{A})$，则$\mathscr{A}$称为$C^*$代数。

Hilbert 空间上一切线性有界算子的全体记为 $L(H)$ 构成 C^* 代数。若 $\mathscr{A}$ 是 $L(H)$ 的一个子代数，而且是弱闭的，则称 $\mathscr{A}$ 为 W^* 代数。

定义 4.7 若 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数，$\mathscr{A}$ 上的复线性泛函 φ 如果满足 $\varphi(A^*A)\geqslant 0$，$\varphi(e)=1$，则称 φ 是态(State)。

若 φ 是 $\mathscr{A}$ 上的态，则 $N=\{x\in\mathscr{A},\varphi(x^*x)=0\}$ 构成 $\mathscr{A}$ 的闭左理想，φ 在商空间 $\mathscr{A}/N$ 上可导出一个内积：

$(\hat{x},\hat{y})=\varphi(x^*y)$，$\hat{x},\hat{y}\in\mathscr{A}/N$，$x,y\in\mathscr{A}$ 是 $\hat{x},\hat{y}$ 的代表元素。

若 A 是 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 中的元素，则存在态 φ，使

$$\varphi(A^*A)=\|A\|。$$

C^* 代数 $\mathscr{A}$ 的所有态构成对偶空间 $\mathscr{A}^*$ 的一个弱 * 紧凸子集。这个子集中的端点称为纯态。

三、线性拓扑空间与凸集（参见［67］）

设 X 是线性空间，$K\subset X$。K 称为 X 中的凸集，是指：对任意的 $\alpha\in[0,1]$，任意的 $x,y\in K$，总有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in K。$$

凸集 K 称为是吸收的，是指：对任意的 $x\in X$，总存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|\delta|\leqslant\varepsilon$ 时，$\delta x\in K$。此时必有 $0\in K$。我们把 $\rho_K(x)=\inf\{a>0,\ a^{-1}x\in K\}$ 称为集 K 的 Minkowski 泛函。

定理 4.8（凸子集的分离定理） 设 M 和 N 是线性空间 X 中的不相交凸集，并且 M 是吸收的，则存在非零的线性泛函 f，以及常数 c，使得 $\mathrm{Re}f(M)\geqslant c$，$\mathrm{Re}f(N)\leqslant c$，即超平面 $\mathrm{Re}f=c$ 分离 M 和 N。

定义 4.9（线性拓扑空间） 设 X 是线性空间，又是一个 Hausdorff 拓扑空间。如果 X 中的加法和数乘运算关于拓扑都是连续的，则称 X 是一个线性拓扑空间。

线性拓扑空间中子集 A 的闭凸包 $\overline{\mathrm{Conv}}\,A$，是指所有包含 A