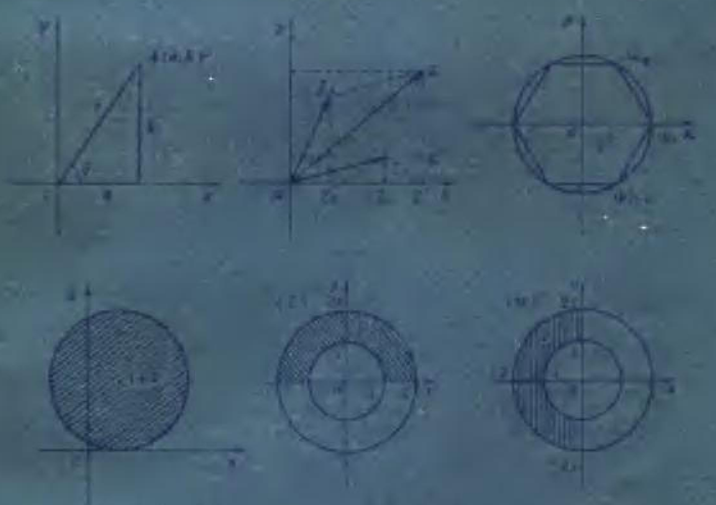
初等数学疑难问题讲解

复数与初等数学

王淑媛



FUSHU YU CHUDENG SHUXUE

内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

复数与初等数学

王　淑　媛

内蒙古人民出版社

一九八二年九月一日

初等数学疑难问题讲解
复数与初等数学
王淑媛
*
内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行
通辽教育印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：5　字数：103千
1982年11月第一版　1983年4月第1次印刷
印数：1—7,000册
统一书号：7089·310　每册：0.51元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题思路与解题技巧》、《容易错的概念，容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法，同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社
一九八二年九月一日

前　　言

数的概念扩充到复数以后，由于在复数范围里所有的数学基本运算（四则运算，开方运算、极限运算等）都能施行。因此，在复数范围内考虑数学问题是很方便的。所以复数概念和复数理论在数学当中有着广泛的应用，对数学本身的发展起了重要的作用。

《复数与初等数学》这本小册子从掌握复数基本知识和它在初等数学中的应用出发，将中学代数中的“复数”内容做了进一步的扩充和阐明，并着重介绍复数在平面几何、平面三角、初等函数等初等数学方面的联系与应用。通过较多的例题对复数本身的某些疑难问题作了一些讲解，提供了一些解题方法，以期对高中学生和补习自学的青年同志在学习、掌握、加深理解“复数”这一内容上有所帮助；同时对中学数学教师在“复数”内容的教学中亦将有一定的参考价值。

在编写本书的过程中，得到了内蒙师范学院邹松林、那音太两位老师的指导和帮助，那音太同志还对“复数与初等函数”这一章的内容作了补充。编者在此一并表示谢意。

本书由于编者的水平有限，缺点与不当之处在所难免，敬请读者提出批评指正。

编　者

于内蒙古师范大学附中

一九八二年四月一日

目　　录

第一章　复数的基本知识

一、复数的概念

二、复数的运算

三、若干复数关系式

四、复数的其它概念

第二章　复数与初等数学

一、复数与平面几何

第三章　复数与初等函数

第一章　复数的基本知识

一、复数的概念

数的概念的发展与解方程有着密切的联系。例如方程 $2x=1$，在整数集里没有解，而在有理数集里有解。方程 $x^2=2$，在有理数集里无解，但在实数集里有解，由此促使数的概念由整数扩充到有理数，又由有理数扩充到实数，从而解决了在原有数集里某种运算不是永远可以实施的矛盾，因此，数的每一次扩充都给数学解决实际问题提供了新的工具。

数扩充到实数集以后，方程 $x^2=-1$ 还是无解，即开方运算在实数集合不是永远可以实施的。因此，实数集还需要进一步扩充。我们希望在扩充以后的数集之内，至少应当包含着平方为 -1 的数，并希望任何一个代数方程在这个新的数集里都是有解的（至少有一个解）。

所以我们引入一个新数，这个新数用符号 i 来表示，它满足以下的条件：

(1) $i^2=-1$

(2) i 可以和实数一起按照已知的运算律进行四则运算。

这里称 i 为虚数单位。显然它是方程 $x^2+1=0$ 的一个根。

1. **复数** 对于任二实数a,b，形如$a+bi$的数叫做复数．一般用一个字母A表示，即 $A=a+bi$．复数的这种表示法叫做代数表示法．其中a叫复数$a+bi$的实部，记为$R(A)$；bi叫复数$a+bi$的虚部，b叫虚部的系数，记为$I(A)$、全体复数所构成的集合记为K，叫做复数集．

复数$a+bi$，当$b=0$时，我们称它为实数a，所以实数是包含在复数集内的；也就是说实数集是复数集的真子集．复数$a+bi$当$b\neq0$时称它为虚数，当$a=0$且$b\neq0$时称复数$a+bi$为纯虚数．复数集与实数集的关系可用下表列出：

$$\begin{array}{c}\text{复数}(a+bi)\\(a、b\text{为实数})\end{array}\begin{cases}\text{实数}(b=0)；\\ \text{虚数}(b\neq0)\text{—纯虚数}(a=0，b\neq0)。\end{cases}$$

例1 实数m取什么值时，复数

$(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$是

(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数；(4)零．

解 令$m^2-3m+2=0$

解得 $m=1$， $m=2$

所以当$m=1$，2时 复数

$(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$是实数．

(2)当 $m^2-3m+2\neq0$

即 $m\neq1$且$m\neq2$的一切实数时，复数

$(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$是虚数．

(3) 令$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2\neq0.\end{cases}$

即当 $m=-\dfrac{1}{2}$时，复数

$(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$是纯虚数．

(4) 令$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2=0.\end{cases}$

解得　$m=2$,

所以复数 $(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$　当$m=2$时是零.

由复数的定义我们可以看出，复数的概念是和实数有着密切的联系的，或者说，复数是在实数的基础上引进的，只要给定了两个实数 a，b，就确定了一个复数$a+bi$，一对有序实数$(a、b)$在平面（称为复平面）上确定了以a为横坐标，b为纵坐标的点$A(a, b)$，所以，复数 $a+bi$ 与复平面上的点(a, b)可以建立对应关系，如图1·1

2. 复数的模和幅角　点$A(a, b)$给定以后，连接原点O与A点，则确定一个平面向量$\vec{OA}$，于是复数$a+bi$与点$A(a,b)$及向量$\vec{OA}$彼此可以建立一一对应的关系.(复数的几何意义详见第二章).

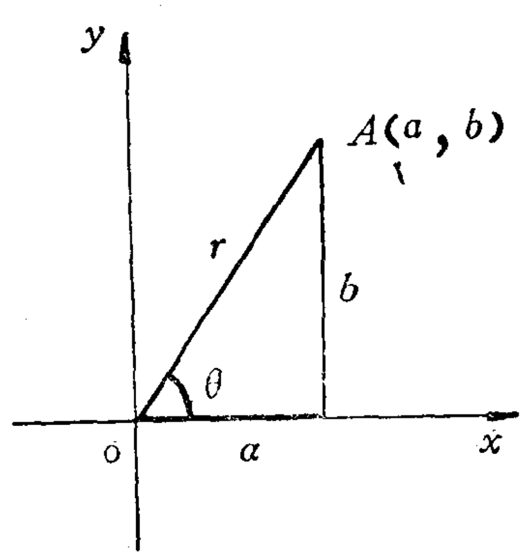


图　1·1

向量$\vec{OA}$与x轴正向的张角θ叫做复数 $A=a+bi$ 的幅角，记为 $argA$.

向量 $\vec{OA}$ 的长度，叫做复数$A=a+bi$的模（或绝对值）. 记为$|A|$或$|a+bi|$.

从图1·1可以看出，当$0\leqslant\theta<2\pi$时，

$$|A|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \theta=argA$$

（1）当A在第一象限时：

$\theta = \arg A = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$（$a>0$，$b>0$）。

（2）当A在第二象限时：

$\theta = \arg A = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$，（$a<0$，$b>0$）

（3）当A在第三象限时：

$\theta = \arg A = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$，（$a<0$，$b<0$）

（4）当A在第四象限时：

$\theta = \arg A = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$。（$a>0$，$b<0$）

以上就是计算一个复数的模和幅角的公式。

例2 求复数$2-2i$的模及幅角。

解 $|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$。

$\because$ $a>0$，$b<0$，A在第四象限，

$\therefore$ $\arg(2-2i) = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{2}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$。

例3 已知复数的模为3，实部为$\sqrt{2}$，求这个复数。

解 设这个复数$A = a+bi$。

由题意，有

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=3,\\ a=\sqrt{2}.\end{cases}$$

解得。$b = \pm\sqrt{7}$

$\therefore$ 所求复数有两个：

$A_1 = \sqrt{2}+\sqrt{7}i$；$A_2 = \sqrt{2}-\sqrt{7}i$。

根据复数的幅角的概念，由图1·1可知：$\theta+2\pi$，$\theta+4\pi$，$\theta-2\pi$，…也都是复数$a+bi$的幅角．可见一个复数的幅角有无穷多个．

通常没有必要求出一个复数的所有幅角，而只要求出满足$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角即可．于是，我们把满足$0\leqslant\theta<2\pi$的角θ，叫做复数$A=a+bi$的幅角的主值，记为 $argA$．而用 $ArgA$表示复数 A的一般幅角，或称为幅角的通值，幅角的通值与主值显然有下面的关系式：

$$ArgA=2n\pi+argA．(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)．$$

当 $A=0$时，$|A|=0$，其幅角不确定，故复数0是唯一没有幅角或幅角不定的复数．

二　复数的运算

建立了复数概念以后，很重要的问题就是建立复数集里的各种运算．由于实数是复数的一部分，所以建立复数运算时，应当遵循的一个原则是做为复数的实数，在复数集里运算时和在实数集里的运算应当是一致的．

1．两复数相等的规定：

二复数a_1+b_1i与a_2+b_2i当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$时规定为$a_1+b_1i=a_2+b_2i$，由此可知：若二复数相等，则二复数的实部相等且虚部的系数也相等．反之，若二复数相应的实部，虚部系数分别相等，则此二复数相等．

2．共轭复数、我们把实部相等，虚部的系数绝对值相等，符号相反的两个复数$a+bi$与$a-bi$称为共轭复数．即$a-bi$是与$a+bi$共轭的复数．或称$a-bi$是$a+bi$的共轭复数，

显然，$a+bi$也是$a-bi$的共轭复数、复数$Z=a+bi$的共轭复数记为$\overline{Z}$，即$\overline{Z}=a-bi$，那么显然有$\overline{\overline{Z}}=Z$。

例4 复数$(2x^2-5x+2)+(y^2+y-2)i=0$，求实数x,y的值。

解 根据复数相等的定义得：

$$\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ y^2+y-2=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2},\\ y_1=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2},\\ y_2=-2;\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}$

或$\begin{cases}x=2\quad,\\ y=-2.\end{cases}$

例5 在复平面上，求满足下列条件的复数Z的对应点的集合：

(1) $Z\overline{Z}+Z+\overline{Z}=3$； (2) $Z\overline{Z}+Z-\overline{Z}=3$。

解 设复数$Z=a+bi$ （a、b为实数）。

(1) 由$Z\overline{Z}+Z+\overline{Z}=3$ 有

$$a^2+b^2+a+bi+a-bi=3,$$

得 $a^2+b^2+2a=3$,

即 $(a+1)^2+b^2=4$。

故复数Z的对应点的集合是一个圆（图1·2）。

(2)由$Z\overline{Z}+Z-\overline{Z}=3$ 有

$$a^2+b^2+a+bi-(a-bi)=3,$$

即 $a^2+b^2+2bi=3$,

则有$\begin{cases}a^2+b^2=3,\\ 2b=0.\end{cases}$

解得　$b=0$，$a=\pm\sqrt{3}$。

故得点$(\sqrt{3}, 0)$、$(-\sqrt{3}, 0)$。

所以复数Z所对应点的集合是：$\{(\sqrt{3},0)、(-\sqrt{3},0)\}$。（图1·3）

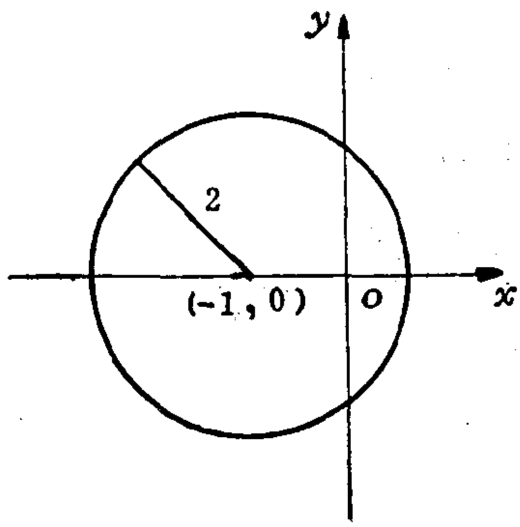


图　1·2

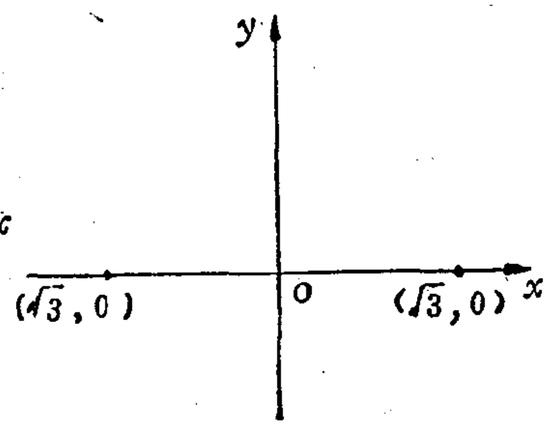


图　1·3

3．复数的加法与减法　下面介绍两个定义：

定义1　复数$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$叫做复数a_1+b_1i与a_2+b_2i的和，记为：

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

求复数和的运算叫做加法运算。

定义2　复数$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$叫做复数a_1+b_1i与a_2+b_2i的差。记为：

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

求二复数差的运算叫做减法运算。

4．复数的乘法与除法　其定义分别如下：

定义1．复数$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$叫做复数

a_1+b_1i与a_2+b_2i的积，记为：

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

求二复数之积的运算叫做乘法运算。

定义2 复数 $\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

叫做复数a_1+b_1i与a_2+b_2i的商。记为：

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}(a_2+b_2i\neq 0).$$

求二复数的商的运算叫做除法运算。

关于复数的加法、乘法运算满足基本运算律（交换律、结合律、乘法对加法的分配律）这一事实，读者不难验证。只要利用"相等"、"加法"、"乘法"的定义和实数的加法、乘法均满足运算律即可。

附注1：定义复数时，$a+bi$不能理解为a与bi的和，因为当时复数的运算尚未定义。现在，有了复数加法、乘法定义以后，$a+bi$可以看做是a和b与i的积之和。

事实上：

1)．$b=b+0i$，　$i=0+i$，

$bi=(b+0i)(0+i)=0+bi$.

2)．$a=a+0i$，

所以$(a+0i)+(0+bi)=a+bi$.

附注2：在定义复数之前，我们引进一个新数i，（虚数单位）它满足$i^2=-1$，事实上，按复数的乘法运算有：

$$i^2=i\cdot i=(0+i)\cdot(0+i)=(0-1)+(0\times 1+1\times 0)i$$
$$=-1+0i=-1.$$

附注3：关于复数的减法，除法运算能在复数集内永远

可以施行的问题，可以不采用定义的方式，将减法做为加法的逆运算、除法做为乘法的逆运算，可以证明减法、除法在复数集内可以实施。

例如，对除法来讲，复数$Z_1=a_1+b_1i$，与$Z_2=a_2+b_2i\neq0$的商是指存在一个复数$Z=x+yi$，满足条件$Z_1=Z_2Z$，那么这样的复数Z是否存在呢？

事实上，由条件：

$$\begin{aligned}a_1+b_1i&=(a_2+b_2i)(x+yi)\\&=(a_2x-b_2y)+(b_2x+a_2y)i.\end{aligned}$$

根据二复数相等的规定得：

$$\begin{cases}a_2x-b_2y=a_1,\\b_2x+a_2y=b_1.\end{cases}$$

这个二元一次方程组，其系数行列式

$$\begin{vmatrix}a_2 & -b_2\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}=a_2^2+b_2^2\neq0\quad(\because\quad a_2+b_2i\neq0).$$

$\therefore$　这个方程组有唯一的一组解：

$$\begin{cases}x=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.\\[2ex] y=\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad z=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

这就是复数a_1+b_1i除a_1+b_2i的商。

所以，做为乘法的逆运算——除法，在复数内可以实施。

在实际计算中，为了求商$\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$，只要将除数与被除

数都乘以除数的共轭复数a_2-b_2i 即可。

实际上

$$z=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

例6 计算 $\frac{2+i}{3-2i}$。

解 $$\frac{2+i}{3-2i}=\frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$=\frac{4+7i}{13}=\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i.$$

例7 求一个复数Z，使得$Z+\frac{4}{Z}$为实数，且$|Z-2|=2$。

解 设$Z=x+yi$ （x，y是实数）。

$$Z+\frac{4}{Z}=x+yi+\frac{4}{x+yi}$$

$$=x+yi+\frac{4x-4yi}{x^2+y^2}$$

$$=\left(x+\frac{4x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\frac{4y}{x^2+y^2}\right)i.$$

$Z+\frac{4}{Z}$为实数的条件是：