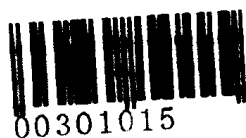


重磁异常场及其高阶导数的 正演公式与程序

侯重初 刘奎俊 著

地质出版社

45579



重磁异常场及其高阶导数的 正演公式与程序

SY26/05

侯重初 刘奎俊 著



45579



200401305

地质出版社

内 容 提 要

根据重磁资料解释的需要及发展趋势,作者推导出了场源以外任意位置的重、磁位场及其一、二、(三)阶导数的正演公式,涉及的场源包括任意形体和常用的二十种规则形体,并给出了这些公式的 BASIC 或 FORTRAN 语言的计算程序。本书可供重、磁方法的工作人员及院校的师生使用。

重磁异常场及其高阶导数的正演公式与程序

侯重初 刘奎俊 著

责任编辑:陈军中

地质出版社 出版发行

(北京和平里)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所经销

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ 印张: 15.25 字数: 353000

1990年7月北京第一版·1990年7月北京第一次印刷

印数: 1—780册 国内定价: 9.85元

ISBN7-116-00650-8/P·554

序 言

重磁资料在地质找矿勘探、深部地质以及地球物理研究方面得到了愈来愈广泛的应用。为了达到反演目的以及检验各种定量推断解释方法的正确性等等,许多情况下正演计算是必不可少的。已有的计算平面上少数场分量的正演计算已远远不能满足当前的实际需要了,因此近年来有不少从事重、磁资料解释的同行建议我们出一本带有计算机程序的正演计算工具书。基于这一建议,考虑到我国特有的地理条件及观测手段与解释方法的新发展,我们决定完成这项工作,并使这本书具有以下特点:

一、为适应我国山区和丘陵面积大的特点,提供了可计算场源以外任意点位场及导数的正演公式与计算程序。所提供的正演方法不仅可以解决复杂地形条件下的正演,亦可用于井中测量解释。

二、针对利用高阶导数进行解释的优越性以及正在发展起来的梯度测量,在重力正演方面提供了可计算引力位一、二、三阶导数的公式,即可计算出 V_x 、 V_y 、 V_z 、 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{zz} 、 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{xy} 、 V_{Δ} 、 V_{zzz} 等物理量;在磁性体的正演方面提供了可计算场分量及其一、二阶导数的公式,即可计算出 X_a 、 Y_a 、 Z_a 、 ΔT 、 $\frac{\partial X_a}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial Y_a}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial Z_a}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial^2 X_a}{\partial z^2}$ 、 $\frac{\partial^2 Y_a}{\partial z^2}$ 、 $\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$ 等物理量。

三、为更精确地模拟复杂形状的真实场源,需有任意形体的正演计算方法。本书从经典场论中密度体的引力位出发,导出了可以计算任意形体引力位一、二、三阶导数的二重积分形式的表达式,进而借助于泊松公式导出磁场及一、二阶导数的二重积分形式的表达式,从而可采用常规数值积分方法实现计算。

四、本书导出了二十种规则形体的上述各物理量的解析式并给出计算程序。值得特别一提的是在 § 4.12、§ 4.13 与 § 7.12、§ 7.13 中给出了具有两个有限垂直边的倾斜板状体以及上顶为倾斜的无限延深垂直板状体的解析式和计算程序,这不仅是因为实际中需要此二种形体,还因为利用它们可以方便地组合成其它形体,例如背斜、截面为任意多边形的水平柱体等。

五、各公式的计算程序是针对目前国内地质系统已广泛应用的 PC-1500 袖珍机与 DUAL-68000 微型机而采用 BASIC 或 FORTRAN-77 语言编制的。对这些程序做少许修改,就可适用于其它的微型机及大、中、小型计算机。为方便读者使用,每个程序均配有计算框图及使用说明〔注〕。

对于二十种规则形体,我们只给出了各物理量的解析式;但对于任意形体,考虑到是第一次提出的方法,为了便于读者理解和使用,我们列出了任意形体解析式的二重积分形式表达式的推导过程。书中只给出无限走向任意形体的 Fortran 语言计算程序。

在书中我们把符号 ΔT 不仅表示为一般所指的场源引起的磁场矢量沿正常地磁场方向上的分量,而且将它推广为沿任意方向的分量。这样的话,如果需要计算在直角坐标系中任意置放的规则形体产生的各个磁参量,可在书中为直立或水平置放的规则形状场源提供

的公式与计算程序的基础上进一步合成。同理，若要计算同样情况下的引力位各阶导数，亦可通过这种途径合成。

参加本书工作的还有地质矿产部北京计算中心的徐瑾同志。余庆利和李燕同志帮助调试了部分 FORTRAN 语言程序，戴洪涛和孙历同志帮助调试了部分 BASIC 语言程序。

在 FORTRAN 语言程序结构的设计方面，曾华霖、温璐丽和陈维雄同志曾提出了许多宝贵意见。此外，地质矿产部北京计算中心的有关领导和部门对本书的工作给予了大力支持与协助，特在此致谢。

本书由申宁华和孙文珂同志审阅，他们为此付出了大量的劳动，提出了宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢。

作 者

〔注〕：由于出版字数太多，删去三度体的程序，其余的均保留一种语言程序，在此向读者致以歉意。 作者1990·4

目 录

主要符号及单位说明

第一部分 引力位一、二、三阶导数的表达式与计算程序

第一章 任意形体引力位一、二阶导数的积分形式的一般表达式	1
§ 1.1 有限水平尺寸密度体	1
一、引力位的一阶导数	2
二、引力位的二阶导数	2
§ 1.2 无限走向密度体	3
一、引力位的一阶导数	3
二、引力位的二阶导数	4
§ 1.3 关于应用积分形式表达式的说明	4
第二章 任意形体引力位一、二、三阶导数的表达式与计算程序	6
§ 2.1 有限水平尺寸密度体	6
一、任意形状三度体的二重积分形式表达式	6
二、上顶为任意曲面向下无限延深的垂直柱体的二重积分形式表达式	7
§ 2.2 无限走向密度体	8
一、任意截面形状二度体的积分形式表达式	8
二、截面上顶为任意曲线向下无限延深的板状体的积分形式表达式	8
三、FORTRAN 语言计算程序	8
第三章 有限水平尺寸规则形体引力位一、二、三阶导数的解析式与计算程序	26
§ 3.1 球体 (质点)	26
一、解析式	26
二、FORTRAN 语言程序说明	27
§ 3.2 直立长方体	31
一、解析式	31
二、FORTRAN 语言程序说明	32
第四章 无限走向规则形体引力位一、二、三阶导数的解析式与计算程序	33
§ 4.1 水平圆柱体 (水平物质线)	33
一、解析式	33
二、BASIC 语言程序说明	33
三、FORTRAN 语言程序说明	40
§ 4.2 上、下底均为水平的垂直板状体 (上、下底均为水平的矩形柱体)	44
一、解析式	44
二、BASIC 语言程序	45
三、FORTRAN 语言程序说明	46
§ 4.3 上顶为水平的无限延深垂直板状体	47

一、解析式.....	47
二、BASIC 语言计算程序.....	48
三、FORTRAN 语言程序说明.....	49
§ 4.4 有限宽度的水平薄板 (水平物质带)	50
一、解析式.....	50
二、BASIC 语言计算程序	51
三、FORTRAN 语言程序说明	52
§ 4.5 半无限水平薄板 (水平半物质面)	52
一、解析式.....	52
二、BASIC 语言计算程序.....	53
三、FORTRAN 语言程序说明	54
§ 4.6 有限延深的垂直薄板 (垂直物质带)	54
一、解析式	54
二、BASIC 语言计算程序.....	55
三、FORTRAN 语言程序说明.....	56
§ 4.7 无限延深的垂直薄板 (垂直半物质面)	57
一、解析式	57
二、BASIC 语言计算程序.....	57
三、FORTRAN 语言程序说明	58
§ 4.8 有限延深的倾斜薄板 (倾斜物质带)	59
一、解析式.....	59
二、BASIC 语言计算程序.....	60
三、FORTRAN 语言程序说明	61
§ 4.9 无限延深的倾斜薄板 (倾斜半物质面)	62
一、解析式.....	62
二、BASIC 语言计算程序.....	62
三、FORTRAN 语言程序说明	64
§ 4.10 上、下底均为水平的倾斜板状体 (上、下底均为水平的平行四边形柱体)	64
一、解析式	65
二、BASIC 语言计算程序.....	67
三、FORTRAN 语言程序说明	68
§ 4.11 上顶为水平的无限延深倾斜板状体.....	69
一、解析式.....	69
二、BASIC 语言计算程序.....	70
三、FORTRAN 语言程序说明.....	71
§ 4.12 具两个有限垂直边的倾斜板状体 (具两个垂直边的平行四边形柱体)	72
一、解析式	72
二、BASIC 语言程序说明.....	74
三、FORTRAN 语言程序说明.....	75
§ 4.13 上顶为倾斜的无限延深垂直板状体.....	76

一、解析式	76
二、BASIC 语言程序说明	77
三、FORTRAN 语言程序说明	79
§ 4.14 具倾斜接触面的半无限水平密度层与断层	80
一、右侧无限延伸密度层的解析式	80
二、左侧无限延伸密度层的解析式	81
三、断层的表达式	82
四、BASIC 语言综合计算程序	82
五、FORTRAN 语言综合程序说明	91
§ 4.15 具下水平边的三角柱体	96
一、解析式	96
二、BASIC 语言计算程序	97
三、FORTRAN 语言程序说明	99
§ 4.16 具上水平边的三角柱体	100
一、解析式	100
二、BASIC 语言计算程序	102
三、FORTRAN 语言程序说明	103
§ 4.17 下底大于上底的梯形柱体	104
一、解析式	104
二、BASIC 语言计算程序	107
三、FORTRAN 语言程序说明	108
§ 4.18 上底大于下底的梯形柱体	109
一、解析式	109
二、BASIC 语言计算程序	111
三、FORTRAN 语言程序说明	113
 第二部分 磁场分量及其一、二阶导数的表达式与计算程序	
第五章 任意形体磁场分量及其一、二阶导数的表达式与计算程序	114
§ 5.1 有限水平尺寸磁性体	114
一、任意形状三度体的二重积分形式表达式	114
二、上顶为任意曲面向下无限延深的垂直柱体的二重积分形式表达式	116
§ 5.2 无限走向磁性体	118
一、任意截面形状二度体的积分形式表达式	118
二、截面上顶为任意曲线向下无限延深的板状体的积分形式表达式	119
三、FORTRAN 语言计算程序	120
第六章 有限水平尺寸规则形体磁场分量及其一、二阶导数的解析式与计算程序	146
§ 6.1 球体 (偶极)	146
一、解析式	146
二、FORTRAN 语言程序说明	147
§ 6.2 直立长方体	152
一、解析式	152
二、FORTRAN 语言程序说明	153

第七章 无限走向规则形体磁场分量及其一、二阶导数的解析式与计算程序	154
§ 7.1 水平圆柱体 (水平偶极线)	154
一、解析式	154
二、BASIC 语言计算程序	155
三、FORTRAN 语言程序说明	163
§ 7.2 上、下底均为水平的垂直板状体 (上、下底均为水平的矩形柱体)	167
一、解析式	167
二、BASIC 语言计算程序	168
三、FORTRAN 语言程序说明	170
§ 7.3 上顶为水平的无限延深垂直板状体	170
一、解析式	170
二、BASIC 语言计算程序	171
三、FORTRAN 语言程序说明	173
§ 7.4 有限宽度的水平薄板 (水平偶极带及其两侧的异号极线)	173
一、解析式	173
二、BASIC 语言计算程序	174
三、FORTRAN 语言程序说明	175
§ 7.5 半无限水平薄板 (水平半偶极面及其一侧的极线)	176
一、解析式	176
二、BASIC 语言计算程序	176
三、FORTRAN 语言程序说明	178
§ 7.6 有限延深的垂直薄板 (垂直偶极带及其上、下两端的异号极线)	178
一、解析式	179
二、BASIC 语言计算程序	179
三、FORTRAN 语言程序说明	181
§ 7.7 无限延深的垂直薄板 (垂直半偶极面及其上端的极线)	181
一、解析式	181
二、BASIC 语言计算程序	182
三、FORTRAN 语言程序说明	183
§ 7.8 有限延深的倾斜薄板 (倾斜偶极带及其上、下两端的异号极线)	184
一、解析式	184
二、BASIC 语言计算程序	184
三、FORTRAN 语言程序说明	186
§ 7.9 无限延深的倾斜薄板 (倾斜半偶极面及其上端的极线)	187
一、解析式	187
二、BASIC 语言计算程序	187
三、FORTRAN 语言程序说明	189
§ 7.10 上、下底均为水平的倾斜板状体 (上、下底均为水平的平行四边形柱体)	189
一、解析式	189
二、BASIC 语言计算程序	190

三、FORTRAN 语言程序说明·····	192
§ 7.11 上顶为水平的无限延深倾斜板状体·····	193
一、解析式·····	193
二、BASIC 语言计算程序·····	193
三、FORTRAN 语言程序说明·····	195
§ 7.12 具两个有限垂直边的倾斜板状体 (具两个垂直边的平行四边形柱体)·····	196
一、解析式·····	196
二、BASIC 语言计算程序·····	196
三、FORTRAN 语言程序说明·····	198
§ 7.13 上顶为倾斜的无限延深垂直板状体·····	199
一、解析式·····	199
二、BASIC 语言计算程序·····	199
三、FORTRAN 语言程序说明·····	201
§ 7.14 具倾斜接触面的半无限水平磁性层与断层·····	202
一、右侧无限延伸的磁性层的解析式·····	202
二、左侧无限延伸的磁性层的解析式·····	202
三、断层的表达式·····	203
四、BASIC 语言综合计算程序·····	203
五、FORTRAN 语言综合程序说明·····	211
§ 7.15 具下水平边的三角柱体·····	216
一、解析式·····	216
二、BASIC 语言计算程序·····	217
三、FORTRAN 语言程序说明·····	219
§ 7.16 具上水平边的三角柱体·····	220
一、解析式·····	220
二、BASIC 语言计算程序·····	221
三、FORTRAN 语言程序说明·····	223
§ 7.17 下底大于上底的梯形柱体·····	223
一、解析式·····	223
二、BASIC 语言计算程序·····	224
三、FORTRAN 语言程序说明·····	226
§ 7.18 上底大于下底的梯形柱体·····	227
一、解析式·····	227
二、BASIC 语言计算程序·····	228
三、FORTRAN 语言程序说明·····	230
主要参考文献·····	231

第一部分 引力位一、二、三阶 导数的表达式与计算程序

第一章 任意形体引力位一、二阶导数的 积分形式的一般表达式

§ 1.1 有限水平尺寸密度体

图1.1所示的任意形状三度体 Ω 在空间任一点 p 产生的引力位为

$$V(p) = f \iiint_{\Omega} \rho \frac{1}{r} d\Omega$$

式中 f 为万有引力常数, ρ 为物体的密度, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ 。

引力场强矢量 $\vec{G}$ 是引力位的总梯度, 故有

$$\vec{G}(p) = \text{grad}_p V(p) = f \iiint_{\Omega} \rho \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (1.1)$$

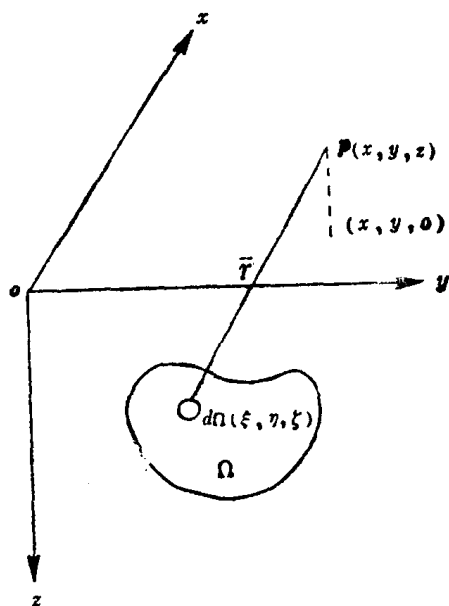


图 1.1

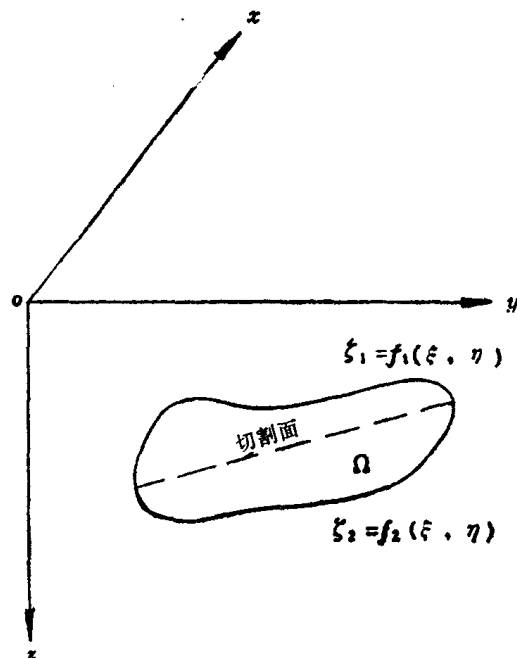


图 1.2

式中 $\text{grad}_p = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$, $\vec{r} = (\xi - x) \vec{i} + (\eta - y) \vec{j} + (\zeta - z) \vec{k}$

一、引力位的一阶导数

设 $\vec{u}_1$ 为任意方向的单位矢量, $\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} + \gamma_1 \vec{k}$, 则由 (1.1) 式可知, 引力场强矢量 $\vec{G}$ 在 $\vec{u}_1$ 方向上的分量为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(p)}{\partial u_1} &= \vec{u}_1 \cdot \vec{G}(p) = f \iiint_{\Omega} \rho \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_1}{r^3} d\Omega \\ &= f \iiint_{\Omega} \rho \frac{(\xi - x) \alpha_1 + (\eta - y) \beta_1 + (\zeta - z) \gamma_1}{r^3} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.2)$$

现将 (1.2) 式化为二重积分形式。如图 1.2 所示, 用一个称为“分割面”的平面将物体 Ω 切割为上、下两部分。记上部的边界曲面为 $\zeta_1 = f_1(\xi, \eta)$, 下部的边界曲面为 $\zeta_2 = f_2(\xi, \eta)$, 并规定它们满足以下条件: 任一条铅垂线与这两个曲面的每一个只交于一点, 亦即 ζ_1 与 ζ_2 是 ξ 与 η 的单值函数。因此, “分割面”可能是水平的, 亦可能是倾斜的。

以下的讨论都在物体密度 ρ 是均匀的假设条件下进行。

将两个边界曲面 $\zeta_2 = f_2(\xi, \eta)$ 与 $\zeta_1 = f_1(\xi, \eta)$ 作为积分上、下限, 再对 (1.2) 式的变量 ζ 积分, 从而有

$$\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{(\xi - x) \alpha_1 + (\eta - y) \beta_1 + (\zeta - z) \gamma_1}{[a^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} d\zeta \right] d\xi d\eta \quad (1.3)$$

计算出 (1.3) 式方括号内的积分, 便得到 $\frac{\partial V(p)}{\partial u_1}$ 的二重积分形式一般表达式

$$\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{[(\xi - x) \alpha_1 + (\eta - y) \beta_1](\zeta_1 - z) - a^2 \gamma_1}{a^2 [a^2 + (\zeta_1 - z)^2]^{1/2}} \right\} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\xi d\eta \quad (1.4)$$

式中 $a^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$ 。

若令 (1.3) 式中的积分上限 $\zeta_2 \rightarrow \infty$, 即物体的上顶为任意曲面而向下无限延深, 这时 $\frac{\partial V(p)}{\partial u_1}$ 的二重积分形式一般表达式为

$$\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\xi - x) \alpha_1 + (\eta - y) \beta_1}{a^2} - \frac{[(\xi - x) \alpha_1 + (\eta - y) \beta_1](\zeta_1 - z) - a^2 \gamma_1}{a^2 [a^2 + (\zeta_1 - z)^2]^{1/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (1.5)$$

二、引力位的二阶导数

设 $\vec{u}_2$ 为另一任意方向的单位矢量, $\vec{u}_2 = \alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \gamma_2 \vec{k}$ 。根据 (1.2) 式可得物体 Ω 的引力位沿 $\vec{u}_1$ 与 $\vec{u}_2$ 方向上的二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(p)}{\partial u_1 \partial u_2} &= \vec{u}_2 \cdot \text{grad}_p \left[\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} \right] = \vec{u}_2 \cdot f\rho \iiint_{\Omega} \text{grad}_p \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_1}{r^3} \right) d\Omega \\ &= f\rho \iiint_{\Omega} \left[3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u}_1)(\vec{r} \cdot \vec{u}_2)}{r^5} - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{r^3} \right] d\Omega \end{aligned}$$

$$= f\rho \iiint_Q 3 \left\{ \frac{[(\xi-x)\alpha_1 + (\eta-y)\beta_1 + (\zeta-z)\gamma_1][(\xi-x)\alpha_2 + (\eta-y)\beta_2 + (\zeta-z)\gamma_2] - \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{r^5} \right\} d\xi d\eta d\zeta \quad (1.6)$$

与一阶导数异常表达式的处理方法一样，将曲面 $\zeta_2 = f_2(\xi, \eta)$ 与 $\zeta_1 = f_1(\xi, \eta)$ 作为积分的上、下限，再对 (1.6) 式的变量 ζ 积分，则有

$$\frac{\partial^2 V(p)}{\partial u_1 \partial u_2} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{1}{a^4} \left\{ \frac{AB(\zeta-z)[3a^2 + 2(\zeta-z)^2] - a^2\delta(\zeta-z)[a^2 + (\zeta-z)^2] + a^2\gamma_1\gamma_2(\zeta-z) - z^3 - a^4(A\gamma_2 + B\gamma_1)}{[a^2 + (\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\xi d\eta \quad (1.7)$$

式中 $A = (\xi-x)\alpha_1 + (\eta-y)\beta_1$, $B = (\xi-x)\alpha_2 + (\eta-y)\beta_2$, $\delta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$ 。

当 (1.6) 式中对 ζ 的积分上限 $\zeta_2 \rightarrow \infty$ 时，便有向下无限延深柱体的二阶导数

$$\frac{\partial^2 V(p)}{\partial u_1 \partial u_2} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{1}{a^4} \left\{ 2AB - a^2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) - \frac{AB(\zeta_1-z)[3a^2 + 2(\zeta_1-z)^2] + a^2(\zeta_1-z)^3\gamma_1\gamma_2 - a^2\delta(\zeta_1-z)[a^2 + (\zeta_1-z)^2] - a^4(A\gamma_2 + B\gamma_1)}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (1.8)$$

§ 1.2 无限走向密度体

截面 S 为任意形状的二度体在空间任一点 p 产生的引力位为

$$V(p) = 2f \iint_S \rho \ln \left(\frac{1}{r} \right) ds$$

式中 $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2}$ 。

由上式可得引力场强矢量 $\vec{G}$ 为

$$\vec{G}(p) = \text{grad}_p V(p) = 2f \iint_S \rho \frac{\vec{r}}{r^2} ds \quad (1.9)$$

式中 $\text{grad}_p = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$, $\vec{r} = (\xi-x)\vec{i} + (\zeta-z)\vec{k}$ 。

一、引力位的一阶导数

设任意方向的单位矢量 $\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{i} + \gamma_1 \vec{k}$ ，则由 (1.9) 式可知任意截面形状二度体引力位沿 $\vec{u}_1$ 方向的一阶导数为

$$\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} = \vec{u}_1 \cdot \vec{G}(p) = 2f \iint_S \rho \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_1}{r^2} ds$$

$$= 2f \iint_S \rho \frac{(\xi-x)\alpha_1 + (\zeta-z)\gamma_1}{r_2} d\xi d\zeta \quad (1.10)$$

与处理三度体异常表达式的方法类似，用一条“分割线”将截面 \$S\$ 分割为上、下两部分，记上部的边界曲线为 \$\zeta_1=f_1(\xi)\$，下部的边界曲线为 \$\zeta_2=f_2(\xi)\$，规定它们满足以下条件：任一条铅垂线与这两条曲线中的每一条只交于一点，即 \$\zeta_1\$ 与 \$\zeta_2\$ 都是 \$\xi\$ 的单值函数。“分割线”可能是水平的，也可能是倾斜的。

以下讨论都是在面密度 \$\rho\$ 是均匀的前提下进行。

以 \$\zeta_2\$ 和 \$\zeta_1\$ 为积分上、下限，再对 (1.10) 式的变量 \$\zeta\$ 积分，便得到 \$\frac{\partial V(p)}{\partial u_1}\$ 的积分形式一般表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(p)}{\partial u_1} = 2f\rho \int_l \left[\alpha_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{\zeta_2-z}{\xi-x} - \operatorname{arctg} \frac{\zeta_1-z}{\xi-x} \right) \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1}{2} \ln \frac{(\xi-x)^2 + (\zeta_2-z)^2}{(\xi-x)^2 + (\zeta_1-z)^2} \right] d\xi \end{aligned} \quad (1.11)$$

二、引力位的二阶导数

设另一任意方向的单位矢量为 \$\vec{u}_2 = \alpha_2 \vec{i} + \gamma_2 \vec{k}\$，则根据 (1.10) 式有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} = \vec{u}_2 \cdot \operatorname{grad}_p \left[\frac{\partial V(p)}{\partial u_1} \right] = \vec{u}_2 \cdot 2f\rho \iint_S \operatorname{grad}_p \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_1}{r^2} \right) ds \\ = 2f\rho \iint_S \left[2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u}_1)(\vec{r} \cdot \vec{u}_2)}{r^4} - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{r^2} \right] ds \\ = 2f\rho \iint_S \left\{ 2 \frac{[(\xi-x)\alpha_1 + (\zeta-z)\gamma_1][(\xi-x)\alpha_2 + (\zeta-z)\gamma_2]}{r^4} \right. \\ \left. - \frac{\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2}{r^2} \right\} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (1.12)$$

从而可得任意截面形状二度体引力位的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 V(p)}{\partial u_1 \partial u_2} = 2f\rho \int_l \frac{(\zeta-z)(\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2) - (\xi-x)(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)}{(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\xi \quad (1.13)$$

截面上顶为任意曲线，向下无限延深板状体引力位二阶导数的积分形式一般表达式为

$$\frac{\partial^2 V(p)}{\partial u_1 \partial u_2} = 2f\rho \int_l \frac{(\xi-x)(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) - (\zeta_1-z)(\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2)}{(\xi-x)^2 + (\zeta_1-z)^2} d\xi \quad (1.14)$$

§ 1.3 关于应用积分形式表达式的说明

一、当场源的形状非常复杂以至于一个“分割面(线)”分割出来的上、下部边界曲面

(线)不能满足 § 1.1 与 § 1.2 中所述条件时, 即 ζ_1 与 ζ_2 为非单值函数时, 我们总能把这种形状的物体分解为若干个, 使其中每一个都可满足该条件, 从而可分别对它们进行计算, 然后求其总和。一般是不需做这种分解的, 若场源确是复杂, 也只需分解成二、三个能满足前述条件的形体就可以了。

二、在对某一形状的场源计算其异常时, 首先要确定水平坐标 (ξ, η) 值及其对应的垂直坐标 ζ_1 与 ζ_2 值。根据曲面(线)的形状可以用不相等的水平间距取 (ξ, η) 值, 即当曲面(线)变化比较平缓时, 水平间距可以取得大些, 反之则密些。对于上、下部边界曲面(线)取 (ξ, η) 值的水平间距可以不一致, 这时则将 § 1.1 与 § 1.2 中所述的各积分形式表达式分为两个积分(上部与下部)分别计算, 然后取二者的代数和。这样做可以节约计算机时间。

三、所提供的方法亦可供起伏界面的正演计算之用。

第二章 任意形体引力位一、二、三阶导数的表达式与计算程序

§ 2.1 有限水平尺寸密度体

一、任意形状三度体的二重积分形式表达式

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{a^2[a^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$V_y = \frac{\partial V}{\partial y} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\eta-y)(\zeta-z)}{a^2[a^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.2)$$

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{1}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.3)$$

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\zeta-z)\{2(\xi-x)^4 + (\xi-x)^2(\eta-y)^2 - (\eta-y)^4 + (\zeta-z)^2\}}{a^4[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \rightarrow \right. \\ \left. \leftarrow \frac{[(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2]}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.4)$$

$$V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\zeta-z)\{2(\eta-y)^4 + (\xi-x)^2(\eta-y)^2 - (\xi-x)^4 + (\zeta-z)^2\}}{a^4[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \rightarrow \right. \\ \left. \leftarrow \frac{[(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2]}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.5)$$

$$V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{\zeta-z}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.6)$$

$$V_{xz} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = -f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{\xi-x}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

$$V_{yz} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = -f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{\eta-y}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.8)$$

$$V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\xi-x)(\eta-y)(\zeta-z)[3a^2+2(\zeta-z)^2]}{a^4[a^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

$$V_{\Delta} = V_{yy} - V_{xx} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{(\zeta-z)[(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2][3a^2 + 2(\xi-z)^2]}{a^4[a^2 + (\zeta-z)^2]^{3/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (2.10)$$

$$V_{zzz} = \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{a^2 - 2(\xi-z)^2}{[a^2 + (\xi-z)^2]^{5/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (2.11)$$

二、上顶为任意曲面向下无限延深的垂直柱体的二重积分形式表达式

$$V_x = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{\xi-x}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\zeta_1-z}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{1/2}} \right\} \right\} d\xi d\eta \quad (2.12)$$

$$V_y = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{\eta-y}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\zeta_1-z}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{1/2}} \right\} \right\} d\xi d\eta \quad (2.13)$$

$$V_z = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{1}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{1/2}} d\xi d\eta \quad (2.14)$$

$$V_{xx} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{1}{a^4} \left\{ [(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2] - \frac{(\zeta_1-z)[2(\xi-x)^4 + (\xi-x)^2(\eta-y)^2 - (\eta-y)^4] + (\zeta_1-z)^3[(\xi-x)^2 - (\eta-y)^2]}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} \right\} \right\} d\xi d\eta \quad (2.15)$$

$$V_{yy} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \left\{ \frac{1}{a^4} \left\{ [(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2] - \frac{(\zeta_1-z)[2(\eta-y)^4 + (\xi-x)^2(\eta-y)^2 - (\xi-x)^4] + (\zeta_1-z)^3[(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2]}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} \right\} \right\} d\xi d\eta \quad (2.16)$$

$$V_{zz} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{\zeta_1-z}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (2.17)$$

$$V_{xx} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{\xi-x}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (2.18)$$

$$V_{yy} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{\eta-y}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (2.19)$$

$$V_{xy} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{a^4} \left\{ 2 - \frac{(\zeta_1-z)[3a^2 + 2(\zeta_1-z)^2]}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (2.20)$$

$$V_{\Delta} = f\rho \iint_{S_{\xi\eta}} \frac{(\eta-y)^2 - (\xi-x)^2}{a^4} \left\{ 2 - \frac{(\zeta_1-z)[3a^2 + 2(\zeta_1-z)^2]}{[a^2 + (\zeta_1-z)^2]^{3/2}} \right\} d\xi d\eta \quad (2.21)$$