高等学校试用教材

常微分方程定性理论引论

蔡燧林　钱祥征　编著

高等教育出版社

高等学校试用教材

常微分方程定性理论引论

蔡燧林　钱祥征　编著

高等教育出版社

（京）112号

内容简介

本书是根据国家教育委员会高等工科院校应用数学专业教材委员会提出的大纲编写的，并经该委员会审定，推荐出版。本书可作为高等院校应用数学专业（或数学专业）本科高年级学生及有关方向硕士研究生的选修课教材，也可作为其它理工专业、师范院校数学专业的选修课教材或参考书。

全书分六章：动力系统基本理论，平面奇点的局部结构，极限环，平面系统的全局结构，平面系统的结构稳定性，高维系统奇点、周期轨线与分支理论简介。全书各章配有习题，计算题附有答案，部分证明题有提示，书末有参考文献和名词索引，以供查阅。

高等学校试用教材

常微分方程定性理论引论

蔡燧林 钱祥征 编著

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

•

开本850×1168 1/32 印张10.875 字数280 000
1994年4月第1版 1994年 月第1次印刷
印数0001—1 190
ISBN 7-04-004106-5/O•1184
定价 4.15 元

前　言

本书是根据国家教育委员会高等工科院校应用数学专业教材委员会提出的大纲，在80年代多次使用过的讲义或讲稿的基础上重新改写而成的。它可作为高等院校应用数学专业（或数学专业）本科高年级学生及有关方向硕士研究生的选修课教材，也可作为其它理工专业、师范院校数学专业的选修课教材或参考书。

全书分六章，重点讲述二维动力系统的相平面分析，同时也包含了R^n空间中动力系统的一些重要概念、理论和方法。第一章是动力系统的基本理论，介绍了R^n上动力系统的一些最基本的概念及性质之后，主要是介绍平面动力系统的Poincaré-Bendixson 理论。它是以后几章的主要基础之一。第二章中较全面地、详细地讨论了平面奇点的局部结构，重点放在Frömmer方法及中心-焦点判定问题。第三章讲述了极限环的不存在性、存在性、唯一性、重次及稳定性等基本内容和旋转向量场理论。第四章讲述奇点的指数、无穷远奇点以及研究平面系统全局结构的方法和若干例子，并且还简单地介绍了在国际上居领先地位的我国在二次系统这一研究领域中的概貌，其中包括本书作者的工作，有些是新的成果。读者可以从中看到研究二次系统的一些重要方法和截止到80年代末的一些重要结果。这些材料可为初次进入这方面研究工作的读者指明方向。而只想了解一下二次系统目前研究概况的读者，也可以从中知道一个大概。在本章的末尾，还单独列出一节讲述化学（生化）反应方程的数学模型的建立和使用定性理论方法对Prigogine 模型进行分析的完整结果。读者将会发现，在第三、四章中，有几个定理是其它教科书上未曾见到过的。第五章介绍结构稳定性概念及其基本定理。以上五

章构成了平面定性理论的基本内容。第六章属于R^n中的动力系统部分，介绍了与此有关的一些基本内容。有空间线性系统奇点的拓扑分类，双曲奇点的Hartman-Grobman线性化定理，中心流形理论以及用它来研究稳定性问题，空间周期轨线的不存在性、存在性和轨道渐近稳定性理论，R^2和R^n中的Hopf分支理论。这些内容无论是在理论上还是在方法上近年来发展都较快，有的已深入到其它学科和应用中去了。我们较系统地介绍这些，并且尽量避免引入高深的数学工具，以期花不多的篇幅能使读者了解它们。在本章中还完整地介绍了一个三维电路振荡存在周期解的实例。除了这个例子和第四章中的生化反应的两个大型实例的详尽分析外，本书在适当的地方还安排了诸如机械振动，非线性电路，生态平衡，神经传导，钟摆运动等例子，使读者随处可见常微分方程定性理论的应用。全书各章配有适量的习题。计算题全部有答案，证明题中较难者，包括个别取自科研论文的习题，我们给出提示。书末附有78篇参考文献目录和名词索引，以供查阅。

全部讲完本书约需72学时。如果删去第六章，则56学时左右就可以了。如果学时更少，则可进一步删去第二章§5中第一判定法和第二判定法的证明，第二章§7，第四章的§4和§5，以及第五章整章，这样可供44学时左右的讲课之用。当然，根据需要，也可以只删去以上可供删节内容中的若干部分，这并不影响未删部分的讲授。

本书经国家教育委员会高等工科院校应用数学专业教材委员会审定通过。主持审稿会的是该委员会委员，华南理工大学刘永清教授。参加审稿会的有清华大学蒲富全教授，东南大学王政贤教授，福建师范大学黄启宇教授，中山大学王寿松副教授，中科院应用数学研究所俞元洪副研究员。在审稿会之前，北京大学丁同仁教授审阅了本书的初稿。以上诸位先生对本书的初稿或修改稿进行了精心的审阅，并提出了许多宝贵的意见，作者对他们表

示衷心的感谢．高等教育出版社为本书的出版给予了大力的支持，并为此付出了辛勤的劳动，作者在此也向他们表示感谢。

本书第一至第三章由钱祥征执笔，第四至第六章由蔡燧林执笔，并且最后由我们两人多次讨论、修改、共同定稿．书中不足和错误之处，恳切地希望读者批评指正。

编著者

1990年12月

目　录

第一章　动力系统基本理论

本章介绍动力系统的基本概念及某些重要的性质，重点放在平面动力系统上。这些内容是以后几章的重要理论基础之一，同时（特别是平面动力系统的 Poincaré-Bendixson 理论）也具有一定的相对独立性。

§1　R^n 上动力系统的基本概念及性质

现实中的许多问题可化为研究**自治系统**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x), \tag{1.1}$$

其中$x\in D\subset \boldsymbol{R}^n$，$F(x)\in C(D)$，$D$ 是$\boldsymbol{R}^n$中的一个区域。所谓自治系统，就是右端函数不显含自变量t的微分方程组(1.1)。

我们对系统(1.1)作一个动力学解释：把 t 看作时间，x看作$\boldsymbol{R}^n$中的点，那么系统 (1.1) 在$D\subset \boldsymbol{R}^n$ 中确定了一个速度场 $F(x)$，它的一个解$x=x(t;\ t_0,x_0)$代表了 R^n 中的一个运动，运动的轨迹是(1.1)在 R^{n+1} 空间(t,x) 中的积分曲线(沿t轴)对空间 R^n上的投影。

现在把这些概念进一步抽象．我们称空间 $\boldsymbol{R}^n$为**相空间**(或称**状态空间**)，系统(1.1)在相空间$\boldsymbol{R}^n$ 的区域D 中定义了一个**向量场**，以t增加的方向作为向量场中向量的指向．(1.1) 的解 $x=x(t;t_0,x_0)$，当把t看作时间参数时，在相空间$\boldsymbol{R}^n$描出的轨迹（图形）称为(1.1)的一条**轨线**。使$F(\bar{x})=0$的点 $\bar{x}\in D$称为系统(1.1)的**奇点**(或称**静止点**、**平衡点**)。奇点处向量场的向量是零向量，它的指向是不确定的。

以后我们还要用到**线素场**这一术语，它是将向量场中的向量

去掉指向，仅用一小段直线段来表示该点上的线素而构成的场。在今后的讨论中，请读者注意向量场与线素场的区别。

设在D上$F(x)$连续，且满足局部Lipschitz条件：对任给点$x_0\in D$，存在它的一个邻域$S(x_0,a)$，使任何x，$\bar{x}\in D\cap S(x_0,a)$时，都有

$$\|F(x)-F(\bar{x})\|\leqslant L_{x_0}\|x-\bar{x}\|,$$

其中L_{x_0}是与点x_0有关的正常数，则Cauchy问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x),\\ x(t_0)=x_0,\ \ t_0\in \boldsymbol{R},\ \ x_0\in D\end{cases} \tag{1.2}$$

的解是存在唯一的。我们容易证明，(1.1)的轨线有如下性质(作为习题，请读者自己证明)：

性质1（对t的平移性） 若$x=x(t)$是(1.1)的一个解，则对任意常数τ，$x=x(t+\tau)$也是(1.1)的解，它们在相空间$\boldsymbol{R}^n$上对应了同一条轨线。

性质2（唯一性） 过相空间中的每一点$x_0\in D$，(1.1)有且只有一条轨线。

性质3（点轨线） 奇点$\bar{x}\in D$是由相空间中一个点$\bar{x}$所构成的轨线，任何其它的轨线不可能在有限时间内到达$\bar{x}$。

性质4（对t的可加性） 若$t=0$时自点x_0出发的解在$t=t_1$时到达点x_1，又$t=0$时自点x_1出发的解在$t=t_2$时到达点x_2，则$t=0$时自点x_0出发的解在$t=t_1+t_2$时也到达点x_2。对轨线而言，这个性质可表达为：自x_0出发的轨线，若经t_1到达点x_1，又经t_2到达点x_2，则自x_0出发的轨线经t_1+t_2也到达点x_2。它们可表为

$$x(t_2;\ 0,x(t_1;0,x_0))=x(t_1+t_2;\ 0,\ x_0),$$

在几何上可分别示意为图1.1的左图和右图。

设(1.1)的一切解均在区间$(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}$上存在，用记号$f(p,t)$表示(1.1)在$t=0$时过点$p$的解，则对任意固定的$t\in\boldsymbol{R}$，$f(p,t)$定义了$D$到$D$的单参数变换

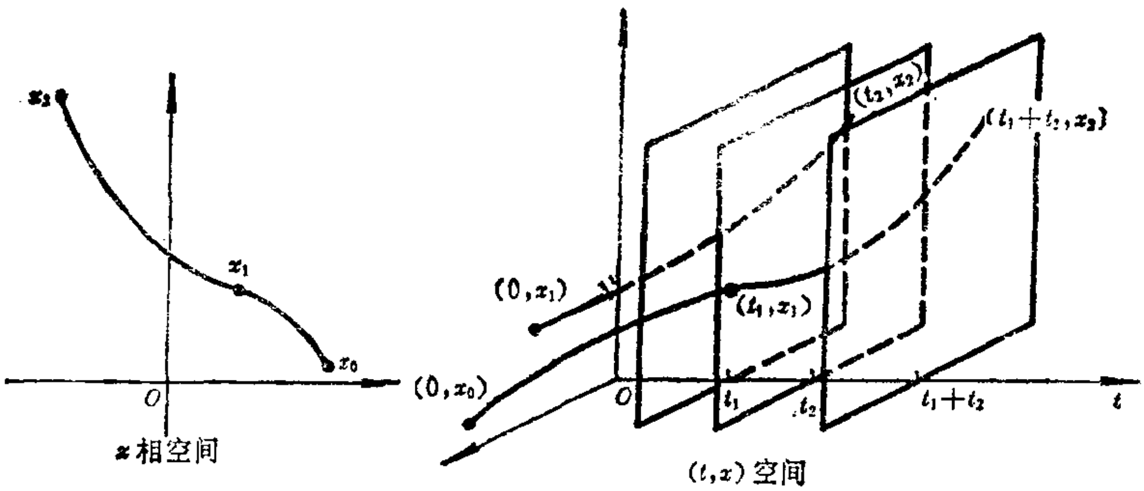

图 1.1

$$f(\cdot,t): D\to D,\ D\subset \mathbb{R}^n.$$

在我们对(1.1)所作的假设下，容易看出变换族

$$\{f(\cdot,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

具有下述性质：

（i） $f(p,0)=p$， （恒同变换）

（ii） $f(p,t)$对p，t连续， （连续性）

（iii） $f(f(p,t_1),t_2)=f(p,t_1+t_2)$，（对参数$t$的可加性）

性质(i)说明变换族存在单位元素；性质(iii)来自上面的性质4，说明变换族对t满足加法性质；(i)和(iii)一起可推出每个变换$f(\cdot,t_1)$存在逆变换$f(\cdot,-t_1)$。因此，变换族$\{f(\cdot,t)\,|\,t\in\mathbf{R}\}$构成了由$D\to D$的单参数连续变换群，称为由(1.1)对应的**动力系统**。

现在我们引入一个关于解的整体存在的结论(证明请参阅[3]的p.23定理3.1)：设$F(x)\in C(D)$，$D\subset\mathbf{R}^n$，且在D上满足局部Lipschitz条件，则(1.1)在D上至少存在一个等价的系统，该系统的一切解均在$(-\infty,+\infty)$上存在。这里说的**等价系统**的概念是，两个系统右端函数可能相差一个大于零的非常数因子，但两者的轨线却是相同的，这样的两个系统称为是等价的。

定性理论的任务是研究系统的轨线结构，因此我们不妨认为，在前述的基本假设下，(1.1)总构成一个动力系统。

下面给出动力系统中的一些名称．对固定的p点，$f(p,t)$ 称为过p的**运动**．集合

$$f(p,R)\triangleq\{f(p,t)\,|\,t\in R\}$$

称为过p的**轨线**，也常记为L_p．同样，过p的**正半轨**是

$$L_p^+\triangleq f(p,\ R^+)\triangleq\{f(p,t)\,|\,t\in R^+\};$$

负半轨是

$$L_p^-\triangleq f\ (p,\ R^-)\ \triangleq\{f(p,t)\,|\,t\in R^-\}.$$

若存在常数$T>0$，使对一切t有

$$f(p,t+T)=f(p,t),$$

则称$f(p,t)$为**周期运动**．满足上式的最小正数T，称为它的**周期**．易知周期运动对应的轨线是R^n中的**闭轨线**．

定义1.1　若存在序列 $\{t_n\}$，当 $n\to+\infty$时 $t_n\to+\infty(-\infty)$，使

$$\lim_{n\to+\infty}f(p,t_n)=q\in D,$$

则称点q为$f(p,t)$的**ω极限点（α极限点）**，也称为L_p^+的极限点（L_p^-的极限点）．$f(p,t)$的所有$\omega(\alpha)$极限点的全体称为$f(p,t)$的**$\omega(\alpha)$极限集**，记作$\Omega_p(A_p)$．

容易证明，q是$f(p,t)$的ω极限点，当且仅当对任意小的$\varepsilon>0$和任意大的$T>0$，总存在$t>T$，使$f(p,t)$与q的距离

$$d(f(p,t),\ q)<\varepsilon.$$

若p是奇点时，或$f(p,t)$是周期运动时，显然有

$$\Omega_p=A_p=L_p.$$

设点集 $A\subset D$，记$f(A,t)\triangleq\{f(p,t)\,|\,p\in A\}$．

定义1.2　若$\{f(A,t)\,|\,t\in R\}=A$，则称A为该动力系统的**不变集**．

因此，由轨线的定义知：任何一条轨线都是$\{f(\cdot,t)\,|\,t\in R\}$的不变集，反之，$\{f(\cdot,t)\,|\,t\in R\}$的不变集都是由整条整条的轨线

构成的。下面的定理说明了$\Omega_p(A_p)$的重要性质。

定理1.1 若$L_p^+(L_p^-)$有界，则$\Omega_p(A_p)$ 是一个非空、不变、连通的有界闭集，它是由系统的整条整条轨线构成的。

证明 我们只对关于L_p^+的结论 给予证明. 又注意到，当L_p^+有界，由Bolzano-Weierstrass聚点存在定理，易知Ω_p非空且有界. 以下证明Ω_p是闭集、是不变集，且是连通的.

1. 证明Ω_p是闭集. 这只要证明，若$\{q_n\}\subset\Omega_p$，$\lim\limits_{n\to\infty}q_n=q$，则有$q\in\Omega_p$. 事实上，对任意给定的$\varepsilon>0$,必存在$m>0$使$d(q_m,q)<\varepsilon/2$. 又$q_m\in\Omega_A$，按$\omega$极限点的等价定义，对于$T>0$，每个$q_m$必存在$t_m>T$，使$d(f(p,t_m),q_m)<\varepsilon/2$. 从而有

$$d(f(p,t_m),q)\leqslant d(f(p,t_m),q_m)+d(q_m,q)<\varepsilon.$$

这就说明$q\in\Omega_p$.

2. 证明Ω_p是不变集. 即要证$\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=\Omega_p$，这等价于分别证明$\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\subset\Omega_p$和$\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\supset\Omega_p$都成立.

事实上，设$q\in\Omega_p$，则存在$\{t_n\}$，当$n\to+\infty$时$t_n\to\infty$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(p,t_n)=q$. 对于任意固定的$t\in\mathbb{R}$，考察$f(p,t_n+t)$，有

$$\lim_{n\to+\infty}f(p,t_n+t)=\lim_{n\to+\infty}f(f(p,t_n),t)=f(q,t),$$

最后一个等式是由$f(\cdot,t)$的连续性及上面的事实得到的. 这就说明$f(q,t)\in\Omega_p$，从而$\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\subset\Omega_p$.

另一方面，对任意固定的$t\in\mathbb{R}$有

$$\Omega_p=f(f(\Omega_p,t),-t)\subset f(\Omega_p,-t),$$

而$\{f(\Omega_p,-t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$，于是得$\Omega_p\subset\{f(\Omega_p,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

3. 证明Ω_p是连通集. 采用反证法. 设若Ω_p不是连通的，我们来导出矛盾. Ω_p不连通，即存在闭的$\Omega_p^{(1)},\Omega_p^{(2)}$：$\Omega_p^{(1)}\cup\Omega_p^{(2)}=\Omega_p$，$\Omega_p^{(1)}\cap\Omega_p^{(2)}=\varnothing$. 令$d(\Omega_p^{(1)},\Omega_p^{(2)})=d>0$，作互不相交的两个邻域$S(\Omega_p^{(i)},d/3)$，$i=1,2$. 则由$\omega$极限集的定义，分别存在

$\{t_n^{(i)}\}$，$i=1,2$，满足$n\to+\infty$时$t_n^{(i)}\to+\infty$，使

$$f(p,t_n^{(i)})\in S(\Omega_p^{(i)},\ d/3),\ i=1,\ 2,$$

且可选择$\{t_n^{(i)}\}$满足

$$0<t_1^{(1)}<t_1^{(2)}<t_2^{(1)}<t_2^{(2)}<\cdots\cdots<t_n^{(1)}<t_n^{(2)}<\cdots\cdots.$$

这样，一定可取到$\{\bar{t}_n\}$满足：$\bar{t}_n\in(t_n^{(1)},t_n^{(2)})$，当$n\to+\infty$时$\bar{t}_n\to+\infty$，并且使

$$f(p,\bar{t}_n)\overline{\in}S(\Omega_p^{(1)},\ d/3)\cup S(\Omega_p^{(2)},\ d/3). \tag{1.3}$$

由L_p^+的有界性，可在$\{f(p,\bar{t}_n)\}$中选出收敛的子列$\{f(p,\bar{t}_{n_i})\}$，当$i\to+\infty$时$f(p,\bar{t}_{n_i})\to q$。按ω极限点定义，这个q应属于Ω_p，但按(1.3)却应有$q\overline{\in}\Omega_p$，这是个矛盾。证毕。

§2 R^2上的Poincaré-Bendixson理论

本节我们转入对R^2上动力系统的讨论。由于R^2上有著名的Jordan定理：“R^2上任意的单闭曲线L，能将R^2分两个部分，使从一个部分到另一个部分的连续曲线一定会与L相交”，从而使得R^2上动力系统的轨线具有许多特有的性质。这些性质最早是由H.Poincaré和I. Bendixson研究并获得的，故通常把这部分内容称为Poincaré-Bendixson理论，简称P-B理论，它是平面定性理论的重要基础之一。

2.1 无切线段与其上的平行轨线矩形

考虑R^2上的自治系统

$$\dot{x}=X(x,\ y),\ \dot{y}=Y(x,\ y), \tag{1.4}$$

其中$\dot{x}\triangleq\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dot{y}\triangleq\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$X(x,y)$，$Y(x,y)\in C(D)$，区域$D\subset R^2$，且对$x$，$y$满足Lipschitz条件。因此，(1.4)是$D$上的一个动力系统。

定义1.3 直线段$\overline{N_1N_2}\subset D$，若其上(包括端点)没有(1.4)的奇点和轨线的切点，则称$\overline{N_1N_2}$为系统(1.4)的**无切线段**。

定义1.4 设$\overline{N_1N_2}$是(1.4)的无切线段，$\widehat{BC}$和$\widehat{AD}$是(1.4)的分别过$\overline{N_1N_2}$两端点的两条轨线段，$\overline{AB}$和$\overline{DC}$是直线段，并且$\overline{AB}/\!/\overline{N_1N_2}/\!/\overline{DC}$，它们构成的曲边矩形$ABCD$，若满足：其内任一点出发的轨线

（i）当t增加(或减少)时必同向穿过$\overline{N_1N_2}$，

（ii）当t增加和减少时分别与$\overline{AB}$，$\overline{CD}$交且仅交一次，则称曲边矩形$ABCD$为(1.4)在$\overline{N_1N_2}$上的**平行轨线矩形**(简称**轨线矩形**)，记为$\square\overline{N_1N_2}$（见图1.2)。

下面是无切线段及其上的轨线矩形的主要性质。

性质1（存在性） 设P_0是(1.4)的常点，则必存在过P_0的无切线段$\overline{N_1N_2}$及$\overline{N_1N_2}$上的平行轨线矩形$\square\overline{N_1N_2}$。

性质2（相交依时性） 设$\overline{N_1N_2}$是(1.4)的无切线段，$\square\overline{N_1N_2}$为其上的轨线矩形。若(1.4)的轨线L_p^+(或L_p^-)与$\overline{N_1N_2}$按时间顺序相交于点M_1，M_2，M_3，则点M_2在$\overline{N_1N_2}$上的位置必在M_1与M_3之间。

性质1的证明 由$X(x,y)$，$Y(x,y)$的连续性，容易证明(1.4)的奇点集合是一个闭集。故若P_0是常点，则总可取到邻域$S(P_0,\varepsilon)$，当$\varepsilon>0$充分小时其内部无奇点。在该邻域内，作过点$P_0(x_0,y_0)$的轨线，则在P_0上，轨线的法线段$\overline{N_1N_2}$的方程为

$$X(x_0,y_0)\ (x-x_0)+Y(x_0,y_0)\ (y-y_0)=0,$$

而$S(P_0,\varepsilon)$内平行于$\overline{N_1N_2}$的直线族是

$$\lambda(x,y)\triangleq X(x_0,y_0)(x-x_0)+Y(x_0,y_0)(y-y_0)=c.$$

将函数$\lambda(x,y)$沿(1.4)的轨线对t求全导数，得

$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1.4)}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\dot{y}$$

$$=X(x_0,y_0)X(x,y)+Y(x_0,y_0)Y(x,y).$$

由$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(x_0,y_0)}=X^2(x_0,y_0)+Y^2(x_0,y_0)>0$及其连续性知，存

在$\delta \in (0,\varepsilon)$，使当$(x,y) \in S(P_0,\delta)$时$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1.4)} > 0$。这说明(1.4)的轨线在$S(P_0,\delta)$内的部分，当$t$增加时沿着$c$增加的方向与平行直线族$\lambda(x,y)=c$相交且相交一次.再取$\overline{N_1N_2}$，$\overline{AB}$，$\overline{CD} \subset S(P_0,\delta)$，则$\overline{N_1N_2}$就是过点$P_0$的无切线段，曲边矩形$ABCD$就是$\overline{N_1N_2}$上的轨线矩形$\square \overline{N_1N_2}$（见图1.2）．由$X,Y$的连续性及$\delta$可以取得足够小，使$\square \overline{N_1N_2}$内向量场的诸向量近似于同向平行分布．这就是$\square \overline{N_1N_2}$的名称中冠以“平行”两字的涵义．证毕．

性质2的证明 只对L_p^+给出证明。易知L_p^+与$\overline{N_1N_2}$按时间顺序交于M_1和M_2两点时，只有图1.3所列(甲)、(乙)两种情形.不论是哪一种情形，均可看到当L_p^+与$\overline{N_1N_2}$相交于M_2后，再不可能离开(或进入)轨线弧$\overset{\frown}{M_1SM_2}$与无切线段$\overline{M_2M_1}$所围成的区域．这是因为轨线与轨线不能相交及$\overline{N_1N_2}$上的同向穿过性质所决定的。因此，第三点$M_3$不可能落在$M_1$，$M_2$之间。证毕．

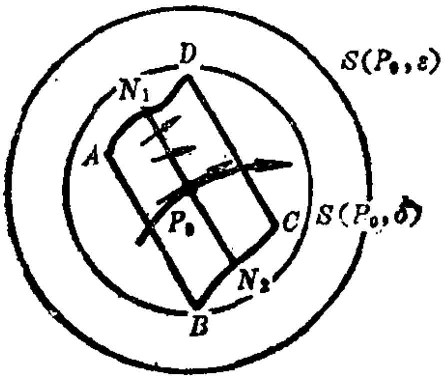

图 1.2

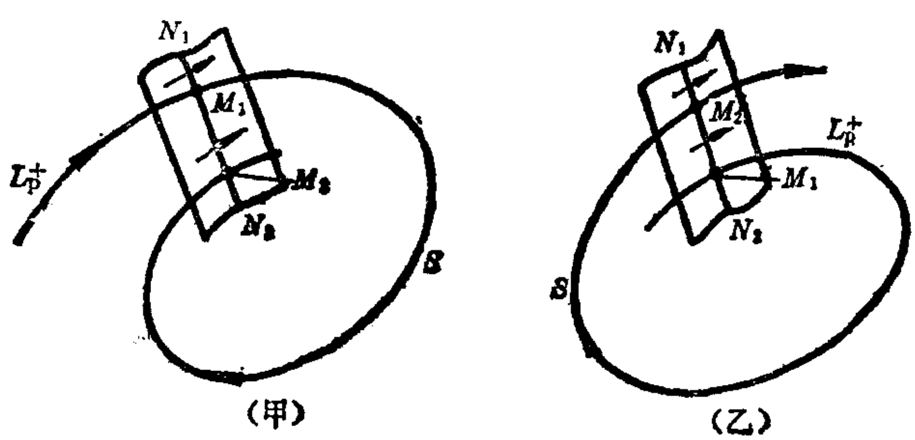

图 1.3

2.2 Poincaré-Bendixson定理

平面上的轨线，除了与周期运动对应的闭轨线外，不是闭的

轨线称为**开轨线**．奇点是个例外，它是既可认为是闭轨线，又可认为是开轨线的**点轨线**．但是我们宁愿把奇点单独列为一类．这样一来，平面轨线可以分为三类：闭轨线、开轨线和奇点．下面为建立P-B定理先证明两个引理．

引理1.1　若半轨$L_p^+(L_p^-)$与自己的$\omega(\alpha)$极限集有交，则L_p或者本身是奇点，或者本身是闭轨．

证明　只证关于L_p^+的结论．设点$M_1\in\Omega_p$且$M_1\in L_p^+$．若M_1是奇点，则$L_p=M_1$，从而$\Omega_p=L_p=M_1$，即定理的第一个结论成立．若M_1是常点，过M_1作无切线段$\overline{N_1N_2}$及轨线矩形$\square\overline{N_1N_2}$，因$M_1\in\Omega_p$，故L_p^+在点M_1之后经过有限时刻会再次进入$\square\overline{N_1N_2}$，按$\overline{N_1N_2}$上轨线的同向穿过性知，当L_p^+继续延伸时必与$\overline{N_1N_2}$再交于M_2，这时M_1，M_2在$\overline{N_1N_2}$上的相关位置只能有图1.3所示(甲)，(乙)及M_1与M_2重合三种．前两种，按"相交依时性"(性质2)，将引出与$M_1\in\Omega_p$相矛盾的结论，因此必有M_1与M_2相重合的唯一结论，即L_p是闭轨．证毕．

引理1.2　若半轨$L_p^+(L_p^-)$为开轨线，且$\Omega_p(A_p)$中含有常点，则$L_p^+(L_p^-)$不能包含于任何轨线的$\omega(\alpha)$极限集之中．

证明　只证关于L_p^+的结论．设常点$M\in\Omega_p$，则$L_M\subset\Omega_p$．取常点$R\in L_M$，作过R的无切线段$\overline{N_1N_2}$及矩线矩形$\square\overline{N_1N_2}$，因$R\in\Omega_p$，因此L_p^+必将进入$\square\overline{N_1N_2}$，再延伸时与$\overline{N_1N_2}$相交，继而走出$\square\overline{N_1N_2}$．过一定时刻后，L_p^+将再次进入$\square\overline{N_1N_2}$，再与$\overline{N_1N_2}$相交．因已设L_p^+为开轨线，故L_p^+必与$\overline{N_1N_2}$有无穷多个交点．设p_1，p_2，p_3是L_p^+与$\overline{N_1N_2}$的按时间顺序排列的三个交点(图1.4)，以下用反证法来导出矛盾．设引理结论不真，即L_p^+包含于某条轨线L_q的ω极限集Ω_q中，则因$p_2\in L_p^+$，点p_2也是L_q^+的ω点．但这是不可能的，因为L_q^+一旦进入$\widehat{p_2Sp_3}$及$\overline{p_3p_2}$所围成的区域(见图1.4)后，再也出不来了．证毕．

推论　任何有界开轨线是不能作为自身的极限集的．

定理1.2 (Poincaré-Bendixson定理)　若半轨$L_p^+(L_p^-)$有