矢量分析与
数学物理方法

盛镇华编

湖南科学技术出版社

矢量分析与数学物理方法
盛镇华 编
责任编辑：刘孝纯
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1982年6月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32　印张：9.125　字数：237,000
印数：1——9,800
统一书号：13204·57　定价：1.15元

前　言

本书以编者讲授数学物理方法的讲义为基础编写，为了满足工科某些专业和在职人员进修的需要，作了适当的补充。全书内容包括矢量分析、二阶张量、解析函数、数学物理方程和特殊函数等，都是学习理论物理和技术物理所必需的数学基础知识。有些高等数学教材中虽然编有矢量分析，但较为分散，有些教材则缺少这方面的内容。编者认为，在理论力学和电动力学等课程的教学前，集中地讲授矢量分析和二阶张量是有好处的。

师范院校物理系科讲授这门课程要求简明扼要。编者在历年编写讲义和课堂教学中，对此作过一些努力，这次编写时又曾广泛征求意见，希望本书除了适合于师专物理科用作教材之外，还能供师范本科物理系学生参考，并能为在职中学数理教师、工程技术人员、电大学员和有志自学的同志提供一份简明扼要的资料。

在编写过程中，得到钱临照先生和梁昆淼先生的鼓励和帮助。初稿先后承湖南省物理学会陈积华先生、涟源师专谢树棠先生、湖南师院谢泉先生、北京大学吴崇试先生、宜昌师专王正清先生、衡阳师专黄敦穆先生、兰州大学马元鹏先生、湖南大学石任球先生、彭肇藩先生和中国科学技术大学容保粹先生等审阅。定稿前又承我省一些同行，如中南矿冶学院刘旦老师、湘潭师专彭焕章老师、郴州师专唐志刚老师、零陵师专黄昌谟老师、邵阳师专邹福元老

师、怀化师专曾岳生老师、益阳师专李楚良老师、常德师专路洪老师等提出宝贵意见，特此致谢。

编　　者

一九八二年三月

目　录

第一章　矢量函数的微分与积分

本章主要介绍矢量函数的微分与积分，认定读者已经掌握了矢量代数和微积分的基本知识。

§1—1　一元矢量函数的微分与积分

一、矢量函数

在矢量代数中，我们学过模和方向都保持不变的矢量，称为常矢量(零矢量的模等于零，方向为任意，是一个特殊的常矢量)。在物理学中，我们遇到了模和方向或者其中之一发生变化的矢量，例如质点作变速直线运动时，其速度是模不断变化的矢量；质点作匀速曲线运动时，其速度是方向不断变化的矢量；如果质点作变速曲线运动，其速度则是模和方向都在不断变化的矢量。上述这种模和方向或者其中之一不断变化的矢量称为变矢量。

为了研究变矢量与某个标量的关系，矢量分析引入矢量函数的概念，定义如下：如果对于某种标量t在其变域内的每一个可取值，都有确定的矢量$\boldsymbol{a}$与它对应，便称变矢量$\boldsymbol{a}$为自变量t的矢量函数，记为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$$

矢量函数的例子在物理学中很多，例如运动质点的位移$\boldsymbol{s}$是时间t的函数；质点作变速运动时，速度$\boldsymbol{v}$是时间t的函数；沿同一直线考察稳流时，流速$\boldsymbol{v}$是这条直线上的坐标x的函数……

以上是一元矢量函数，如果对于两个(或多个)独立标量x、y在其变域内的每一组可取值，有确定的矢量$\boldsymbol{a}$与它对应，便称变

矢量$\boldsymbol{a}$为自变量x、y(或x, y,z,…)的多元矢量函数，记为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,\ y)$$

沿同一平面考察稳流时，流速$\boldsymbol{v}$是这个平面上的坐标x、y的二元函数；在空间区域考察稳流时，流速$\boldsymbol{v}$是空间坐标x、y、z的函数；如果流动是非稳的，$\boldsymbol{v}$是空间坐标和时间x、y、z、t的四元函数。

设矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$在直角坐标轴上的投影（物理学上称它们为$\boldsymbol{a}(t)$的分量）分别为$a_x(t)$、$a_y(t)$、$a_z(t)$，则

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k} \qquad (1.1)$$

其中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为沿三个直角坐标轴正方向的单位矢量。

矢量函数的极限与标量函数的有类似的定义。以一元矢量函数为例,若对于任意给定的小正数ε，总存在正数δ，使得适合于$|t-t_0|<\delta$的一切t所对应的矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$都满足

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_0|<\varepsilon$$

则常矢量$\boldsymbol{a}_0$叫作$\boldsymbol{a}(t)$在$t\to t_0$的极限，记为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0$$

由于极限的定义完全类似，因此矢量函数有完全类似于标量函数的一些极限运算法则，不必一一列举。对(1.1)式取极限,运用这些法则可得

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0}a_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}a_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}a_z(t)\boldsymbol{k} \quad (1.2)$$

矢量函数的连续性也与标量函数的有类似的定义。仍以一元矢量函数为例，设矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0及其邻域有定义，而且$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t_0)$，则称$\boldsymbol{a}(t)$在点$t_0$连续。如果$\boldsymbol{a}(t)$在$t$的某个区间上各点都连续，则称它在这个区间上连续。

二、一元矢量函数的微商

物理学往往要研究矢量函数的变化率，例如加速度就是速度对时间的变化率。与标量函数的微商类似，矢量函数的微商是表述该变矢量对自变量的变化率的。设有矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$，当t有增量

Δt时，$\boldsymbol{a}(t)$连续地变为$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)$。将这两个矢量的起点汇到一处，以资比较，便得到图1—1。图中，

$$\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)$$

称为$\boldsymbol{a}(t)$的增量。如果$\Delta\boldsymbol{a}/\Delta t$在$\Delta t\to 0$的极限存在，这个极限定义为$\boldsymbol{a}(t)$在点$t$的微商，记为$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$或$\boldsymbol{a}'(t)$

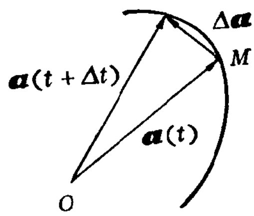

图1—1

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}\qquad(1.3)$$

矢量函数的微商也是矢量，它沿图中$\boldsymbol{a}(t)$的终点所经历的曲线在点M的切线，指向t增大时$\boldsymbol{a}(t)$的终点所移动的那一方；它的模由下面的(1.5)式表示。试看

$$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)=a_x(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+a_y(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+a_z(t+\Delta t)\boldsymbol{k}$$

此式减去(1.1)，除以Δt，令$\Delta t\to 0$，取极限得到

$$\boldsymbol{a}'(t)=a_x'(t)\boldsymbol{i}+a_y'(t)\boldsymbol{j}+a_z'(t)\boldsymbol{k}\qquad(1.4)$$

$$|\boldsymbol{a}'|=\sqrt{(a_x')^2+(a_y')^2+(a_z')^2}\qquad(1.5)$$

如果$\boldsymbol{a}'(t)$可导，再求它的微商，便得到$\boldsymbol{a}(t)$的二阶微商。还可以推广到高阶。对于二阶和高阶微商，也有类似于(1.4)的公式，例如

$$\boldsymbol{a}''(t)=a_x''(t)\boldsymbol{i}+a_y''(t)\boldsymbol{j}+a_z''(t)\boldsymbol{k}$$

关于矢量函数的微商有如下一些基本公式：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{k}=0\quad(\boldsymbol{k}\text{为常矢量})\qquad(1.6)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\qquad(1.7)$$

$$\frac{d}{dt}(c\boldsymbol{a})=c\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\quad(c\text{为常数})\qquad(1.8)$$

$$\frac{d}{dt}(u\boldsymbol{a})=u\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{du}{dt}\boldsymbol{a}\qquad(1.9)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，$u=u(t)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{du}\frac{du}{dt} \tag{1.12}$$

上列公式的证明与标量函数中与之对应的公式的证明类似。例如公式(1.11)可以这样证：

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

除以Δt，令$\Delta t\to 0$，取极限可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}\right)\\&\quad+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)\\&=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

上列公式也可以借助于(1.3)式来证明，即写出被导函数的分量表示式，然后计算它们的微商。这样的例证留给读者。

例一 证明$d\boldsymbol{a}/dt$与$\boldsymbol{a}$垂直是$\boldsymbol{a}$的模不变的充要条件。

证 若$|\boldsymbol{a}|=$常数，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\text{常数},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$$

可见条件是必要的。反之，若$\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$，则

$$\frac{d}{dt}a^2=0$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = 常数$$

可见条件是充分的。

例二 证明只受有心力作用的质点，对中心的动量矩不变。

证 作用线通过某一定点的力称为有心力，太阳对行星的引力就是有心力。以m表质点的质量，$\boldsymbol{v}$表质点运动的速度，$\boldsymbol{r}$表质点相对于力中心的矢径，质点对力中心的动量矩为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v}$$

由牛顿定律，$d(m\boldsymbol{v})/dt$等于质点所受的力$\boldsymbol{F}$，它与$\boldsymbol{r}$共线，故上式右边第一项为零；$d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$，故第二项也是零。于是 $d\boldsymbol{G}/dt = 0$，$\boldsymbol{G}$为常矢量。

三、一元矢量函数的微分

当自变量t有增量Δt时，矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$有相应的增量$\Delta\boldsymbol{a}$，

$$\Delta\boldsymbol{a} = \Delta\boldsymbol{a}_x\boldsymbol{i} + \Delta\boldsymbol{a}_y\boldsymbol{j} + \Delta\boldsymbol{a}_z\boldsymbol{k}$$

$\Delta\boldsymbol{a}_x$、$\Delta\boldsymbol{a}_y$、$\Delta\boldsymbol{a}_z$的线性主部，分别由微分$d\boldsymbol{a}_x$、$d\boldsymbol{a}_y$、$d\boldsymbol{a}_z$表示。定义矢量函数$\boldsymbol{a}(t)$的微分为

$$d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{a}_x\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{a}_y\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{a}_z\boldsymbol{k} \qquad (1.13)$$

以 $d\boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_x'(t)dt$、$d\boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_y'(t)dt$、$d\boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_z'(t)dt$ 代入上式，然后与(1·4)比较可得

$$d\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}dt \qquad (1.14)$$

由上式可知矢量函数的微分具有与微商类似的基本公式，例如

$$d(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = d\boldsymbol{a} \pm d\boldsymbol{b}$$

$$d(c\boldsymbol{a}) = cd\boldsymbol{a} \quad (c为常数)$$

$$d(u\boldsymbol{a}) = ud\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}du \quad 等等$$

例三 设$\boldsymbol{r}$为运动质点相对于原点的矢径，s为质点所走的路程，试求$|d\boldsymbol{r}|$与$|ds|$的关系。

解
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$
$$|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

质点运动的轨迹一般为曲线l，取定时间 $t=0$ 质点所在的位置作为计算l的弧长s的起点，则
$$ds=\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

于是，
$$|d\boldsymbol{r}|=|ds|$$

由于$d\boldsymbol{r}$沿曲线l的切线方向，故曲线l的单位切向矢量为
$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

因$\boldsymbol{\tau}$指向$\boldsymbol{r}$的终点移动的一方，故质点运动的速度为
$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=v\boldsymbol{\tau}$$

例四 推证运动的加速度分解公式
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$$

其中$\boldsymbol{\nu}$是$d\boldsymbol{\tau}/ds$方向的单位矢量，称为空间曲线的主法向矢量，ρ为空间曲线的曲率半径，被定义为
$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|$$

证
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$
$$=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$$

上式结果的第一项称为切向加速度，第二项称为法向加速度。

四、一元矢量函数的积分

与标量函数的不定积分一样，矢量函数的不定积分是微商的逆运算。若$d\boldsymbol{b}/dt=\boldsymbol{a}$，则称$\boldsymbol{b}(t)$为 $\boldsymbol{a}(t)$ 的一个原函数。定义$\boldsymbol{a}(t)$的原函数的全体为$\boldsymbol{a}(t)$的不定积分，记为$\int\boldsymbol{a}(t)dt$。

由矢量函数求导的性质可知，微商等于同一矢量函数的两个原函数只可能有一常矢量之差，因此得到：

若 $d\boldsymbol{b}/dt=\boldsymbol{a}$，则 $\int \boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{c}$ （$\boldsymbol{c}$为任意常矢量）

由于矢量函数的不定积分与标量函数的不定积分有完全类似的定义，因此矢量函数的不定积分具有与标量函数的不定积分类似的性质。例如有限个矢量函数的和的积分等于各个矢量函数的积分的和，被积函数中不为零的常因子可以移到积分号以外，等等。

由(1.3)式和上列性质可知，矢量函数的不定积分可表为三个普通积分

$$\int \boldsymbol{a}dt=\left(\int a_x dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int a_y dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int a_z dt\right)\boldsymbol{k} \qquad (1.15)$$

上面讲了不定积分，现在介绍定积分。设矢量函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在区间$[T_1, T_2]$上连续，定义$\boldsymbol{a}$在$[T_1, T_2]$上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta t_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}(\tau_i)\Delta t_i \qquad (1.16)$$

其中 $T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，$\tau_i$ 为 $[t_{i-1}, t_i]$ 上一点，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$。

将(1.3)代入上式右边可得

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}dt=\left(\int_{T_1}^{T_2} a_x dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_{T_1}^{T_2} a_y dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int_{T_1}^{T_2} a_z dt\right)\boldsymbol{k} \qquad (1.17)$$

对上式右边各个定积分运用牛顿-莱比尼兹公式，可得到矢量函数的定积分与不定积分的联系，即如果$\boldsymbol{b}(t)$是$\boldsymbol{a}(t)$在$[T_1, T_2]$上的原函数，则

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}dt=\boldsymbol{b}(T_2)-\boldsymbol{b}(T_1) \qquad (1.18)$$

习 题 1—1

1. 就所学力学和电磁学举出一些矢量函数的例子。
2. 质点作曲线运动，相对于某定点的位移为s，试用微商表示式写出质点