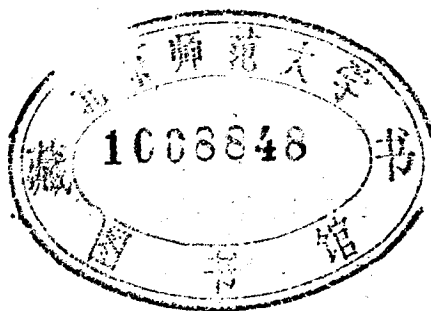


# 矢量分析与 数学物理方法

盛镇华编

JY1195115



湖南科学技术出版社

# 矢量分析与数学物理方法

盛镇华 编

责任编辑：刘孝纯

\*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

\*

1982年6月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：9.125 字数：237,000

印数：1—9,800

统一书号：13204·57 定价：1.15元

## 前 言

本书以编者讲授数学物理方法的讲义为基础编写，为了满足工科某些专业和在职人员进修的需要，作了适当的补充。全书内容包括矢量分析、二阶张量、解析函数、数学物理方程和特殊函数等，都是学习理论物理和技术物理所必需的数学基础知识。有些高等数学教材中虽然编有矢量分析，但较为分散，有些教材则缺少这方面的内容。编者认为，在理论力学和电动力学等课程的教学前，集中地讲授矢量分析和二阶张量是有好处的。

师范院校物理系科讲授这门课程要求简明扼要。编者在历年编写讲义和课堂教学中，对此作过一些努力，这次编写时又曾广泛征求意见，希望本书除了适合于师专物理科用作教材之外，还能供师范本科物理系学生参考，并能为在职中学数理教师、工程技术人员、电大学员和有志自学的同志提供一份简明扼要的资料。

在编写过程中，得到钱临照先生和梁昆森先生的鼓励和帮助。初稿先后承湖南省物理学会陈积华先生、连源师专谢树棠先生、湖南师院谢泉先生、北京大学吴崇试先生、宜昌师专王正清先生、衡阳师专黄敦穆先生、兰州大学马元鹏先生、湖南大学石任球先生、彭肇藩先生和中国科学技术大学容保粹先生等审阅。定稿前又承我省一些同行，如中南矿冶学院刘旦老师、湘潭师专彭焕章老师、郴州师专唐志刚老师、零陵师专黄昌谟老师、邵阳师专邹福元老

师、怀化师专曾岳生老师、益阳师专李楚良老师、常德师专路洪老师等提出宝贵意见，特此致谢。

编 者

一九八二年三月

# 目 录

第一章 矢量函数的微分与积分 .....	( 1 )
§ 1—1 一元矢量函数的微分与积分 .....	( 1 )
一、矢量函数 .....	( 1 )
二、一元矢量函数的微商 .....	( 2 )
三、一元矢量函数的微分 .....	( 5 )
四、一元矢量函数的积分 .....	( 6 )
§ 1—2 多元矢量函数的微分与积分 .....	( 8 )
一、多元矢量函数的偏微商 .....	( 8 )
二、多元矢量函数的全微分 .....	( 10 )
三、多元矢量函数的积分 .....	( 10 )
第二章 标量场与矢量场 .....	( 14 )
§ 2—1 标量场的梯度 .....	( 14 )
一、方向导数 .....	( 14 )
二、梯度的概念 .....	( 15 )
三、梯度的基本运算公式 .....	( 17 )
四、柱坐标系和球坐标系中的梯度表示式 .....	( 18 )
§ 2—2 矢量场的散度 .....	( 20 )
一、通量 .....	( 20 )
二、散度的概念 .....	( 21 )
三、散度的基本运算公式 .....	( 23 )
四、柱坐标系和球坐标系中的散度表示式 .....	( 23 )
§ 2—3 矢量场的旋度 .....	( 25 )
一、环量及环量强度 .....	( 25 )

二、旋度的概念	( 27 )
三、旋度的基本运算公式	( 28 )
四、柱坐标系和球坐标系中的旋度表示式	( 29 )
§ 2—4 拉普拉斯运算和格林公式	( 32 )
一、标量场的拉普拉斯	( 32 )
二、格林公式	( 32 )
三、矢量场的拉普拉斯	( 33 )
§ 2—5 无旋场与无源场	( 35 )
一、无旋场	( 35 )
二、无旋场的势	( 35 )
三、无源场	( 37 )
四、无源场的矢势	( 38 )
§ 2—6 从散度和旋度求解矢量场	( 40 )
一、矢量场被它的散度、旋度和边界条件唯一确定	( 40 )
二、已知无旋场的散度求解场	( 40 )
三、已知无源场的旋度求解场	( 41 )
四、已知矢量场的散度和旋度求解场	( 42 )

### 第三章 二阶张量 ( 44 )

§ 3—1 张量的概念	( 44 )
一、标量和矢量的变换	( 44 )
二、二阶张量的引入	( 47 )
三、二阶张量的变换	( 49 )
四、二阶张量表示法 对称张量与张量共轭	( 51 )
§ 3—2 张量的代数运算	( 54 )
一、张量相加减	( 54 )
二、标量与张量相乘	( 54 )
三、矢量对张量点乘	( 56 )
四、张量对矢量点乘	( 56 )
五、张量与张量点乘	( 57 )

§ 3—3 矢量场的梯度与张量场的散度	(59)
一、张量场	(59)
二、矢量场的梯度	(60)
三、张量场的散度	(61)
<b>第四章 解析函数</b>	<b>(65)</b>
§ 4—1 复变函数的微商 科希-里曼条件	(65)
一、复变函数	(65)
二、多值函数	(68)
三、复变函数的微商	(70)
四、解析函数与科希-里曼条件	(71)
五、平面有势场	(73)
§ 4—2 复变函数的积分 科希定理与科希公式	(76)
一、复变函数的积分	(76)
二、科希定理	(76)
三、科希公式	(79)
§ 4—3 泰勒展开与罗朗展开	(82)
一、复变幂级数	(82)
二、泰勒展开	(85)
三、罗朗展开	(87)
四、奇点分类	(90)
§ 4—4 留数定理	(91)
一、留数和留数定理	(91)
二、计算在极点的留数的方法	(92)
三、应用留数定理计算实变函数定积分	(93)
<b>第五章 数学物理方程及其定解条件</b>	<b>(99)</b>
§ 5—1 数学物理方程的导出	(99)
一、均匀弦的微小横振动	(100)
二、气体的三维声波	(101)

三、输运方程 .....	(103)
四、泊松方程与拉普拉斯方程 .....	(104)
§ 5—2 定解条件 .....	(105)
§ 5—3 定解问题的适定性 .....	(110)
<b>第六章 直角坐标系里的分离变数法 .....</b>	<b>(112)</b>
§ 6—1 用傅里叶展开分离变数 .....	(112)
§ 6—2 直接分离变数 .....	(118)
§ 6—3 非齐次方程与非齐次边界条件的处理 .....	(125)
<b>第七章 球坐标系里的分离变数法 球函数 .....</b>	<b>(133)</b>
§ 7—1 勒让德方程的引出 .....	(133)
§ 7—2 斯特姆-刘维型方程的本征值问题 .....	(137)
§ 7—3 勒让德方程的解 .....	(142)
§ 7—4 勒让德多项式 .....	(146)
一、勒让德多项式的微商表示式 .....	(146)
二、勒让德多项式的母函数 .....	(147)
三、勒让德多项式的递推公式 .....	(149)
四、傅里叶-勒让德展开 .....	(150)
§ 7—5 缔合勒让德函数与一般球函数 .....	(155)
一、缔合勒让德方程的解 .....	(155)
二、傅里叶-缔合勒让德展开 .....	(156)
三、一般球函数 .....	(158)
<b>第八章 柱坐标系里的分离变数法 柱函数 .....</b>	<b>(162)</b>
§ 8—1 贝塞耳方程的引出 .....	(162)
§ 8—2 贝塞耳方程的解 .....	(165)
一、非整数阶贝塞耳方程的解 .....	(165)
二、整数阶贝塞耳方程的解 .....	(168)
三、虚宗量贝塞耳方程的解 .....	(170)



§ 8—3 贝塞耳函数	(172)
一、 $J_m(x)$ 的递推公式	(173)
二、整数阶贝塞耳函数的母函数	(174)
§ 8—4 贝塞耳方程的本征值问题	(175)
§ 8—5 球贝塞耳方程	(184)
<b>第九章 点源法</b>	<b>(188)</b>
§ 9—1 $\delta$ 函数	(188)
§ 9—2 冲量定理法	(192)
§ 9—3 波动方程与输运方程的格林函数法	(198)
§ 9—4 泊松方程的格林函数法	(202)
一、泊松方程的格林函数	(202)
二、格林函数的对易性	(204)
三、泊松方程结合齐次边界条件的积分公式	(205)
四、泊松方程结合非齐次边界条件的积分公式	(206)
<b>第十章 无界空间定解问题</b>	<b>(213)</b>
§ 10—1 齐次波动方程的行波法	(213)
一、一维波动方程 达朗伯公式	(213)
二、三维波动方程 泊松公式	(216)
三、二维波	(220)
§ 10—2 输运方程的傅里叶变换法	(221)
一、傅里叶积分与傅里叶变换	(222)
二、多重傅里叶积分与多维傅里叶变换	(226)
三、傅里叶变换法解输运问题举例	(228)
§ 10—3 非齐次方程的点源法	(231)
一、无界空间的泊松方程	(231)
二、无界空间的非齐次输运方程	(231)
三、无界空间的非齐次波动方程 推迟势	(232)

第十一章 变分法初步 .....(236)

§ 11-1 泛函和泛函的极值问题 .....(236)

一、泛函 .....(236)

二、泛函的极值与泛函的变分 .....(237)

三、欧勒方程 .....(239)

四、泛函的条件极值问题 .....(242)

五、瑞利-里兹方法 .....(243)

§ 11-2 变分法用于数学物理方程 .....(245)

一、从最小作用量原理导出数学物理方程 .....(245)

二、本征值问题的变分法 .....(247)

附 录

附录一 几个定积分.....(254)

附录二 拉普拉斯变换.....(256)

附录三 勒让德方程的级数解在 $|x|=1$ 时发散.....(261)

附录四 正态分布与误差函数.....(263)

附录五  $\Gamma$ 函数与 $\beta$ 函数.....(266)

附录六 整数阶诺埃曼函数.....(271)

附录七 厄米多项式.....(274)

附录八 拉盖尔多项式.....(277)

附录九 缔合拉盖尔多项式.....(280)

# 第一章 矢量函数的微分与积分

本章主要介绍矢量函数的微分与积分，认定读者已经掌握了矢量代数和微积分的基本知识。

## §1—1 一元矢量函数的微分与积分

### 一、矢量函数

在矢量代数中，我们学过模和方向都保持不变的矢量，称为常矢量（零矢量的模等于零，方向为任意，是一个特殊的常矢量）。在物理学中，我们遇到了模和方向或者其中之一发生变化的矢量，例如质点作变速直线运动时，其速度是模不断变化的矢量；质点作匀速曲线运动时，其速度是方向不断变化的矢量；如果质点作变速曲线运动，其速度则是模和方向都在不断变化的矢量。上述这种模和方向或者其中之一不断变化的矢量称为变矢量。

为了研究变矢量与某个标量的关系，矢量分析引入矢量函数的概念，定义如下：如果对于某种标量 $t$ 在其变域内的每一个可取值，都有确定的矢量 $\alpha$ 与它对应，便称变矢量 $\alpha$ 为自变量 $t$ 的矢量函数，记为

$$\alpha = \alpha(t)$$

矢量函数的例子在物理学中很多，例如运动质点的位移 $s$ 是时间 $t$ 的函数；质点作变速运动时，速度 $v$ 是时间 $t$ 的函数；沿同一直线考察稳流时，流速 $v$ 是这条直线上的坐标 $x$ 的函数……

以上是一元矢量函数，如果对于两个（或多个）独立标量 $x, y$ 在其变域内的每一组可取值，有确定的矢量 $\alpha$ 与它对应，便称变

矢量  $\mathbf{a}$  为自变量  $x, y$  (或  $x, y, z, \dots$ ) 的多元矢量函数, 记为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$$

沿同一平面考察稳流时, 流速  $\mathbf{v}$  是这个平面上的坐标  $x, y$  的二元函数; 在空间区域考察稳流时, 流速  $\mathbf{v}$  是空间坐标  $x, y, z$  的函数; 如果流动是非稳的,  $\mathbf{v}$  是空间坐标和时间  $x, y, z, t$  的四元函数。

设矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  在直角坐标轴上的投影 (物理学上称它们为  $\mathbf{a}(t)$  的分量) 分别为  $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ , 则

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为沿三个直角坐标轴正方向的单位矢量。

矢量函数的极限与标量函数的有类似的定义。以一元矢量函数为例, 若对于任意给定的小正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得适合于  $|t - t_0| < \delta$  的一切  $t$  所对应的矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  都满足

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| < \varepsilon$$

则常矢量  $\mathbf{a}_0$  叫作  $\mathbf{a}(t)$  在  $t \rightarrow t_0$  的极限, 记为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$$

由于极限的定义完全类似, 因此矢量函数有完全类似于标量函数的一些极限运算法则, 不必一一列举。对 (1.1) 式取极限, 运用这些法则可得

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t)\mathbf{k} \quad (1.2)$$

矢量函数的连续性也与标量函数的有类似的定义。仍以一元矢量函数为例, 设矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  在  $t_0$  及其邻域有定义, 而且  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$ , 则称  $\mathbf{a}(t)$  在点  $t_0$  连续。如果  $\mathbf{a}(t)$  在  $t$  的某个区间上各点都连续, 则称它在这个区间上连续。

## 二、一元矢量函数的微商

物理学往往要研究矢量函数的变化率, 例如加速度就是速度对时间的变化率。与标量函数的微商类似, 矢量函数的微商是表述该变矢量对自变量的变化率的。设有矢量函数  $\mathbf{a}(t)$ , 当  $t$  有增量

$\Delta t$ 时,  $\mathbf{a}(t)$ 连续地变为 $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ 。  
将这两个矢量的起点汇到一处, 以资  
比较, 便得到图1—1。图中,

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$$

称为 $\mathbf{a}(t)$ 的增量。如果 $\Delta \mathbf{a}/\Delta t$ 在  
 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限存在, 这个极限定义  
为 $\mathbf{a}(t)$ 在点 $t$ 的微商, 记为 $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ 或

$\mathbf{a}'(t)$

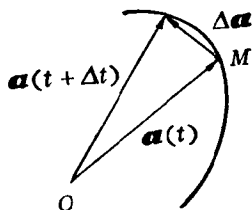


图1—1

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} \quad (1.3)$$

矢量函数的微商也是矢量, 它沿图中 $\mathbf{a}(t)$ 的终点所经历的曲  
线在点 $M$ 的切线, 指向 $t$ 增大时 $\mathbf{a}(t)$ 的终点所移动的那一方, 它  
的模由下面的(1.5)式表示。试看

$$\mathbf{a}(t + \Delta t) = a_x(t + \Delta t)\mathbf{i} + a_y(t + \Delta t)\mathbf{j} + a_z(t + \Delta t)\mathbf{k}$$

此式减去(1.1), 除以 $\Delta t$ , 令 $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限得到

$$\mathbf{a}'(t) = a'_x(t)\mathbf{i} + a'_y(t)\mathbf{j} + a'_z(t)\mathbf{k} \quad (1.4)$$

$$|\mathbf{a}'| = \sqrt{(a'_x)^2 + (a'_y)^2 + (a'_z)^2} \quad (1.5)$$

如果 $\mathbf{a}'(t)$ 可导, 再求它的微商, 便得到 $\mathbf{a}(t)$ 的二阶微商。  
还可以推广到高阶。对于二阶和高阶微商, 也有类似于(1.4)的  
公式, 例如

$$\mathbf{a}''(t) = a''_x(t)\mathbf{i} + a''_y(t)\mathbf{j} + a''_z(t)\mathbf{k}$$

关于矢量函数的微商有如下一些基本公式:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{k} \text{ 为常矢量}) \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt} (c\mathbf{a}) = c \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt} (u\mathbf{a}) = u \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{du}{dt} \mathbf{a} \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \quad (1.11)$$

若  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ ,  $u = u(t)$ , 则

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{du} \frac{du}{dt} \quad (1.12)$$

上列公式的证明与标量函数中与之对应的公式的证明类似。例如公式(1.11)可以这样证:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) \times (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \times \Delta\mathbf{b} + \Delta\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \Delta\mathbf{a} \times \Delta\mathbf{b} \end{aligned}$$

除以  $\Delta t$ , 令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \mathbf{a} \times \frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} \times \mathbf{b} \right) \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \Delta\mathbf{a} \times \frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} \right) \\ &= \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

上列公式也可以借助于(1.3)式来证明, 即写出被导函数的分量表示式, 然后计算它们的微商。这样的例证留给读者。

**例一** 证明  $d\mathbf{a}/dt$  与  $\mathbf{a}$  垂直是  $\mathbf{a}$  的模不变的充要条件。

**证** 若  $|\mathbf{a}| = \text{常数}$ , 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = \text{常数},$$

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$$

可见条件是必要的。反之, 若  $\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$ , 则

$$\frac{d}{dt}a^2 = 0$$

$$|\mathbf{a}|^2 = \text{常数}$$

可见条件是充分的。

**例二** 证明只受有心力作用的质点，对中心的动量矩不变。

**证** 作用线通过某一定点的力称为有心力，太阳对行星的引力就是有心力。以  $m$  表质点的质量， $\mathbf{v}$  表质点运动的速度， $\mathbf{r}$  表质点相对于力中心的矢径，质点对力中心的动量矩为

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}$$

由牛顿定律， $d(m\mathbf{v})/dt$  等于质点所受的力  $\mathbf{F}$ ，它与  $\mathbf{r}$  共线，故上式右边第一项为零， $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ ，故第二项也是零。于是  $d\mathbf{G}/dt = 0$ ， $\mathbf{G}$  为常矢量。

### 三、一元矢量函数的微分

当自变量  $t$  有增量  $\Delta t$  时，矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  有相应的增量  $\Delta \mathbf{a}$ ，

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k}$$

$\Delta a_x$ 、 $\Delta a_y$ 、 $\Delta a_z$  的线性主部，分别由微分  $da_x$ 、 $da_y$ 、 $da_z$  表示。

定义矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  的微分为

$$d\mathbf{a} = da_x \mathbf{i} + da_y \mathbf{j} + da_z \mathbf{k} \quad (1.13)$$

以  $da_x = a'_x(t)dt$ 、 $da_y = a'_y(t)dt$ 、 $da_z = a'_z(t)dt$  代入上式，然后与(1.4)比较可得

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} dt \quad (1.14)$$

由上式可知矢量函数的微分具有与微商类似的基本公式，例如

$$d(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = d\mathbf{a} \pm d\mathbf{b}$$

$$d(c\mathbf{a}) = cd\mathbf{a} \quad (c \text{ 为常数})$$

$$d(u\mathbf{a}) = u d\mathbf{a} + \mathbf{a} du \quad \text{等等}$$

**例三** 设  $\mathbf{r}$  为运动质点相对于原点的矢径， $s$  为质点所走的路程，试求  $|d\mathbf{r}|$  与  $|ds|$  的关系。

解

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

质点运动的轨迹一般为曲线 $l$ ，取定时间 $t=0$ 质点所在的位置作为计算 $l$ 的弧长 $s$ 的起点，则

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

于是，

$$|d\mathbf{r}| = |ds|$$

由于 $d\mathbf{r}$ 沿曲线 $l$ 的切线方向，故曲线 $l$ 的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

因 $\boldsymbol{\tau}$ 指向 $\mathbf{r}$ 的终点移动的一方，故质点的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}$$

例四 推证运动的加速度分解公式

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是 $d\boldsymbol{\tau}/ds$ 方向的单位矢量，称为空间曲线的主法向矢量， $\rho$ 为空间曲线的曲率半径，被定义为

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

上式结果的第一项称为切向加速度，第二项称为法向加速度。

#### 四、一元矢量函数的积分

与标量函数的不定积分一样，矢量函数的不定积分是微商的逆运算。若 $d\mathbf{b}/dt = \mathbf{a}$ ，则称 $\mathbf{b}(t)$ 为 $\mathbf{a}(t)$ 的一个原函数。定义 $\mathbf{a}(t)$ 的原函数的全体为 $\mathbf{a}(t)$ 的不定积分，记为 $\int \mathbf{a}(t)dt$ 。



由矢量函数求导的性质可知,微商等于同一矢量函数的两个原函数只可能有一常矢量之差,因此得到:

若  $d\mathbf{b}/dt = \mathbf{a}$ , 则  $\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{b}(t) + \mathbf{c}$  ( $\mathbf{c}$ 为任意常矢量)

由于矢量函数的不定积分与标量函数的不定积分有完全类似的定义,因此矢量函数的不定积分具有与标量函数的不定积分类似的性质。例如有有限个矢量函数的和的积分等于各个矢量函数的积分的和,被积函数中不为零的常因子可以移到积分号以外,等等。

由(1.3)式和上列性质可知,矢量函数的不定积分可表为三个普通积分

$$\int \mathbf{a} dt = (\int a_x dt)\mathbf{i} + (\int a_y dt)\mathbf{j} + (\int a_z dt)\mathbf{k} \quad (1.15)$$

上面讲了不定积分,现在介绍定积分。设矢量函数  $\mathbf{a}(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上连续,定义  $\mathbf{a}$  在  $[T_1, T_2]$  上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{a}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\tau_i) \Delta t_i \quad (1.16)$$

其中  $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$ ,  $\tau_i$  为  $[t_{i-1}, t_i]$  上一点,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 。

将(1.3)代入上式右边可得

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{a} dt = \left( \int_{T_1}^{T_2} a_x dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_{T_1}^{T_2} a_y dt \right) \mathbf{j} + \left( \int_{T_1}^{T_2} a_z dt \right) \mathbf{k} \quad (1.17)$$

对上式右边各个定积分运用牛顿-莱比尼兹公式,可得到矢量函数的定积分与不定积分的联系,即如果  $\mathbf{b}(t)$  是  $\mathbf{a}(t)$  在  $[T_1, T_2]$  上的原函数,则

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{a} dt = \mathbf{b}(T_2) - \mathbf{b}(T_1) \quad (1.18)$$

### 习 题 1-1

1. 就所学力学和电磁学举出一些矢量函数的例子。
2. 质点作曲线运动,相对于某定点的位移为  $\mathbf{s}$ , 试用微商表示式写出质点