高等学校教学参考书

数学分析讲义

下册

吉林师范大学数学系
数学分析教研室编

人民教育出版社

本书是为高等函授院校数学系开设"数学分析"课而编写的，比较适合在职中等学校数学教师业务进修的需要．叙述比较详细，范例较多，便于自学．

全书分上、下两册；上册分十六章，其中主要内容有实数理论、函数、极限理论、一元函数的微分学和积分学；下册分十三章，其中主要内容有多元函数的微分学，级数理论，广义积分、含参变量的积分和多元函数的积分学．

本书除可供高等函授院校数学系作为"数学分析"课教材外，也可供同等程度的业余学校和全日制学校学生作为参考书和自修用书．

高等学校教学参考书

数学分析讲义

（下　　册）

吉林师范大学数学系

数学分析教研室编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0103　开本 850×1168 1/32　印张 9 12/16

字数 260,000　印数 3,501—135,000　定价(5)¥0.95

1966年3月第1版　1978年5月北京第2次印刷

目　录

第四篇　多元函数微分学

第一章　多元函数微分法……………………………………1
§1. 多元函数概念……………………………………1
§2. 平面点集……………………………………5
§3. 二元函数的极限……………………………………8
§4. 二元函数的連續性……………………………………13
§5. 偏导数……………………………………16
§6. 全微分……………………………………19
§7. 复合函数微分法……………………………………22
§8. 高阶偏导数……………………………………26
§9. 二元函数泰劳公式……………………………………29
§10. 二元函数的极值……………………………………33
第二章　隐函数……………………………………40
§11. 隐函数概念……………………………………40
§12. 隐函数存在性(一)……………………………………44
§13. 隐函数存在性(二)……………………………………49
§14. 条件极值……………………………………54
第三章　微分学在几何上的应用……………………………………60
§15. 平面曲綫的切綫与法綫……………………………………60
§16. 空間曲綫的切綫与法平面……………………………………62
§17. 曲面的切平面及法綫……………………………………65

第五篇　无穷级数

第四章　数值级数……………………………………71
§18. 基本概念……………………………………71
§19. 基本定理……………………………………76
§20. 同号級数……………………………………79
§21. 正項級数的两个收斂判别法……………………………………84
§22. 变号級数……………………………………89
§23. 級数的运算……………………………………94

第五章 函数级数……98
§24. 函数級数的收斂域……98
§25. 一致收斂概念……100
§26. 一致收斂判別法……107
§27. 和函数的性质……112
第六章 幂级数……120
§28. 幂級数收斂域……120
§29. 幂級数和函数的分析性质……125
§30. 泰劳級数……128
§31. 几个重要展开式……130
§32. 例……135
§33. 幂級数在近似計算上的应用……138
§34. 应用幂級数造对数表……143
第七章 福里哀级数……146
§35. 福里哀級数……146
§36. 奇函数与偶函数的福里哀級数……152
§37. 以 $2l$ 为周期的函数展开……157
第六篇 广义积分与含参变量的积分
第八章 广义积分……161
§38. 无穷区間积分……161
§39. 广义积分收斂性判别法……166
§40. 无界函数的积分……175
第九章 含参变量的积分……183
§41. 有限积分……183
§42. 无穷积分……193
§43. 例……201
第七篇 多元函数积分学
第十章 重积分……208
§44. 曲顶柱体的体积……208
§45. 二重积分定义及其性质……210
§46. 二重积分計算……214
§47. 二重积分变量替换……222
§48. 三重积分……229

§49. 三重积分变量替换……233
§50. 重积分应用……239

第十一章　曲线积分……249

§51. 第一型曲綫积分……249
§52. 第二型曲綫积分概念……252
§53. 第二型曲綫积分計算……257
§54. 格林公式……261
§55. 曲綫积分与路綫无关的条件……268
§56. 空間曲綫积分……272

第十二章　曲面积分……276

§57. 第一型曲面积分……276
§58. 第二型曲面积分……278
§59. 奥氏公式……281
§60. 斯托克斯公式……285

第十三章　场论初步……291

§61. 方向导数与梯度……291
§62. 流量与散度……294
§63. 环量与旋度……299
§64. 向量二阶微分算子……303

第四篇　多元函数微分学

在前面三篇中，我们较详细地讨论了一元(一个自变量)函数的极限、连续、微分学与积分学．对一元函数所讨论的绝大部分的概念、定理以及处理问题的方法都能够相应地推广到多元(两个以上自变量)函数上来，并且有些问题尚可得到进一步发展．这不仅从数学角度看是可能的，更重要的也是为许多实际问题所必须的．尽管多元函数微分学与一元函数微分学之间有许多共同点，但是，二者之间也存在差异之处．这种差异主要是由多元函数自身的特殊性而产生的．

正是因为多元函数微分学与一元函数微分学之间有许多共同点，而且也有差异之处，所以，读者在学习多元函数微分学的过程中，经常要将所学的概念、定理以及处理问题的方法与一元函数微分学中相应的概念、定理以及处理问题的方法加以比较和分析，这样，一方面有助于加深理解和掌握新学的概念和理论；另一方面，也有助于复习和巩固已学得的一元函数微分学中有关的概念和理论．

第一章　多元函数微分法

§1．多元函数概念

客观事物是互相依赖，互相制约的．如果抽掉它的具体内容，仅留下数量，则这种互相依赖，互相制约就成为数量之间的依赖关系．自然界中，许许多多的事物，它们的量与量之间的依赖关系都各有其特定的规律．以前学过的一元函数仅是量与量之间依赖关系中非常特殊的一类，但是在许多实际问题中，时常要遇到一个量跟随两个、三个或更多

的量的变化而变化的情况.

例 1. 动能

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

就是跟随物体质量 m 和运动速度 v 两个量的变化而变化的.

例 2. 长方体的体积

$$V=xyz$$

就是跟随长 x、宽 y 和高 z 三个量的变化而变化的.

例 3. 教室内一点 $P(x, y, z)$①在时刻 t 的温度

$$T=T(x, y, z, t)$$

就是跟随点 P 的横坐标 x, 纵坐标 y, 竖坐标 z 及时刻 t 四个量的变化而变化的.

上述三例皆为多元函数的实例, 如果抽去它们的具体内容, 仅保留它们的数量关系, 则它们有一个共同属性, 这就是下面的多元函数的概念:

定义 如果给定了 n 维空间中的点集 M, 对 M 中任意一点 $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 依某种规律有唯一的实数 y 与它对应, 则称 y 是 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数(n 元函数)或 y 是点 X 的**函数**, 记为

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

或简写为 $y=f(X)$, 其中点 X 的坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 皆称为**自变量**, 点集 M 称为函数 $y=f(X)$ 的**定义域**.

学习多元函数要注意以下四点:

1. 这里所讲的函数仍然是单值函数, 即一点 X 仅对应于唯一的一个 y;

2. $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$ 皆在实数域内, 超出了实数域就认为是没有意义的;

① 首先建立一个直角坐标系.

3. 其中 n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都各在其一定的范围内独立变化，它们彼此无关.

4. 若给出一个函数而没有特别指明它的定义域，就认为使得该函数有意义的点的全体——可从函数本身求出——就是它的定义域.

显然，当 $n=1$ 时，上述的函数概念与一元函数概念是一致的.

根据多元函数概念，不难验证，上述的例 1、例 2 和例 3 分别是二元函数、三元函数和四元函数.

怎样求函数的定义域呢？通过下列几个例子来说明：

例 4. 函数

$$f(x, y)=x^2+y^2$$

或

$$\varphi(x, y)=3xy+5$$

对 xy 平面上任何一点 (x, y)，对应关系都有意义，所以函数的定义域是 xy 平面.

例 5. 求函数

$$f(x, y, z)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

的定义域.

因为函数值必须是实数，而分母又不能为零，于是，x, y, z 必须满足条件

$$1-x^2-y^2-z^2>0$$

或

$$x^2+y^2+z^2<1,$$

即函数的定义域是以原点为心的单位球内所有的点，球面上的点不属于此函数的定义域.

例 6. 求函数

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$$

的定义域.

函数 $\ln(x^2+y^2-1)$的定义域是

$$x^2+y^2-1>0,$$

即

$$x^2+y^2>1; \tag{1}$$

函数$\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域是

$$2-x^2-y^2\geqslant 0,$$

即

$$x^2+y^2\leqslant 2. \tag{2}$$

于是，函数$f(x,y)$的定义域是同时满足不等式(1)及(2)的点(x,y)全体，即函数的定义域是以两个圆

$$x^2+y^2=1$$

及

$$x^2+y^2=2$$

为边界所围成环内所有的点以及圆周 $x^2+y^2=2$ 上所有的点. 这定义域可写成 $1<x^2+y^2\leqslant 2$.

二元函数 $z=f(x,y)$ 能够用三维空间的几何图形表示. 在三维空间中取一个直角坐标系，在函数定义域上任取一点(x,y)，则有唯一的一个值 $z=f(x,y)$，于是，得三维空间中一点$P[x,y,f(x,y)]$，这种点 P 的全体就是二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形. 今后我们经常遇到的二元函数的图形都是三维空间的曲面.

例如，函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是定义在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的上半球面，如图 1.

函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是定义在 xy 平面上的以原点为顶点的旋转

抛物面，如图 2.

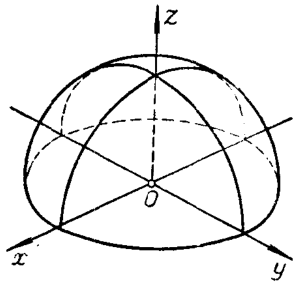


图 1

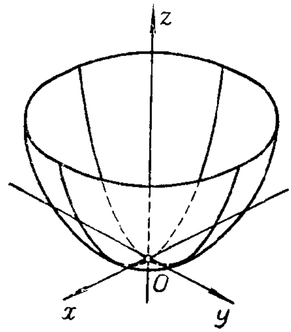


图 2

反之，若已给三维空间中的一个曲面，而每一条平行 z 轴的直线至多与它交于一点，这种曲面也就确定了一个二元函数，曲面在 xy 平面上的投影就是该函数的定义域.

当函数的自变量个数 $n>2$ 时，这种函数就没有直观的几何意义了.

在以后的学习中，读者将看到，一元函数与多元函数的某些问题有区别，但是二元函数与三元函数(或一般的与 n 元函数)并没有本质的区别. 对二元函数所讨论的一切结论都能相应地推广到 $n(>2)$ 元函数上去，这并没有什么困难，只是书写繁杂一些而已. 因此，讨论多元函数时，我们集中精力讨论二元函数，这样可使叙述大大简化，并能突出事物的本质. 因而要求读者在学习二元函数的极限、连续以及微分学时，经常要考虑将它们推广到 n 元函数上去，这是一个很好的练习，也是一个很好的复习方法.

§2. 平面点集

读者已知，讨论一元函数的性质时，要特别注意它的研究范围是开区间还是闭区间. 虽然，开区间与闭区间仅是两个端点之差，但这对于

一元函数，特别是一元连续函数的性质可能有很大的影响．因此，我们当时严格区别开区间和闭区间是非常必要的．现在讨论二元函数（一般是 n 元函数）同样也有类似的问题．为了使读者比较容易地接受下面引入的一些概念，我们首先分析一下，构成开区间与闭区间的点具有什么性质．然后，再将这些性质推广到平面上去．

不难看到，对开区间 (a, b) 中任意一点 x，都存在某个正数 r（一般说是充分小的），以点 x 为心以 r 为半径的小区间 $(x-r, x+r)$ 全部包含在开区间 (a, b) 之中；并且开区间 (a, b) 中任意二点都能用属于开区间 (a, b) 之中的线段连接起来，即开区间是连通的．而闭区间 $[c, d]$ 是在开区间 (c, d) 的基础上再加两个端点 c 和 d，其中端点 c（或 d）有这样的性质：对任意正数 r，以点 c 为心以 r 为半径所构成的开区间 $(c-r, c+r)$ 中有点属于开区间 (c, d)，同时一定还有点不属于开区间 (c, d)．

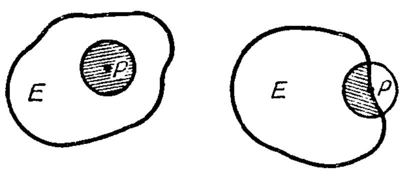
类似地，下面对平面点集给一些新的概念．

定义 以点 $A(a, b)$ 为心、以 $r>0$ 为半径的圆内部的点的全体，即满足不等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

的点 (x, y) 全体，称为点 $A(a, b)$ 的**邻域**，记为 $U(A)$．

定义 设 E 是平面点集，P 是平面上一点：



(a) (b)

图 3

1 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，它全部包含在 E 中（即 $U(P)$ 的每一点都属于 E），那么称 P 是 E 的**内点**（如图 3(a)）；

2 如果点 P 的任意邻域中有点属于 E，同时一定还有点不属于 E，那么称 P 是 E 的**界点**（如图 3(b)）．

例 1. 如果点集 E 是满足不等式

$$x^2+y^2<1$$

的点(x, y)全体，则E中的任何点皆为内点；单位圆周$x^2+y^2=1$上的点(x, y)皆为E的界点.

例 2. 如果点集G是满足不等式

$$x^2+y^2\geqslant 1$$

的点(x, y)的全体，则单位圆外面的点，即满足$x^2+y^2>1$的点(x, y)，皆为G的内点；单位圆周$x^2+y^2=1$上的点皆为G的界点.

由此可见，一个点集的界点可能属于它(如例 2)，也可能不属于它(如例 1).

定义 设E是一个平面点集：

1. 如果E中的每个点都是内点，并且E内任意二点都能用属于E的折线连接起来，即E是连通的，那么称点集E是**开区域**；

2. 如果将开区域E加上它的所有界点，那么所成的新点集F称为**闭区域**.

3. 如果存在以原点为心的正方形D，使点集E全部包含在正方形D内，那么称点集E是**有界集**.

例 3. 如果点集G是满足不等式

$$1<x^2+y^2<4$$

的点(x, y)的全体，即以原点为心半径分别为 1 与 2 的两个同心圆所夹的环内部分. 不难验证，点集G是开区域，也是有界集.

例 4. 如果点集H是满足不等式

$$y\geqslant 0$$

的点(x, y)的全体，即上半平面，包含x轴. 这是无界集.

由此可见，开区域与闭区域概念就是一维空间(数直线)中开区间与闭区间的推广. 今后，如果不需要区分开、闭性，就把开区域或闭区域简称**区域**.

§3. 二元函数的极限

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 D 上，点 $P(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或界点。

定义　如果不论给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，当区域 D 中的点 (x,y) 满足不等式

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称数 A 是二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

如果平面上的点不用横坐标和纵坐标表示，而用一个字母表示，上述极限定义可写为：不论给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，对区域 D 中的点 Q，当 $0<\rho(P,Q)<\delta$①时，有

$$|f(Q)-A|<\varepsilon,$$

简单记为

$$\lim_{Q\to P} f(Q)=A.$$

用这种形式不仅能表示二元函数的极限，它也可表示 n 元函数的极限，这时只须将 P 与 Q 都看作是 n 维空间中的点就可以了.

在上述极限定义中，点 P 的圆形邻域也可改换为以点 P 为心的正方形邻域，即

定义　不论给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，当区域 D 中的点 (x,y) 满足不等式

$$|x-x_0|<\delta \text{ 与 } |y-y_0|<\delta \quad [(x,y)\neq(x_0,y_0)]$$

① $\rho(P,Q)$ 表示 P 与 Q 之間的距离.

时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

那么称数 A 是函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的极限.

不难验证，上述两个极限定义是等价的. 因为以点 P 为心的圆形邻域内总存在以点 P 为心的正方形邻域；反之，以点 P 为心的正方形邻域内也总存在以点 P 为心的圆形邻域（如图 4）.

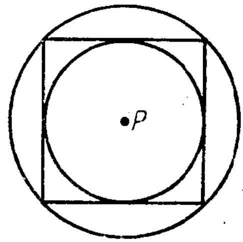


图 4

例 1. 证明函数

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2$$

在点(2, 1)的极限为 7（即 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} f(x,y)=7$）.

事实上，

$$\begin{aligned}|f(x,y)-7| &= |x^2+xy+y^2-7| =\\ &= |(x^2-4)+(xy-2)+(y^2-1)| =\\ &= |(x+2)(x-2)+[(x-2)y+2(y-1)]+\\ &\quad +(y+1)(y-1)| =\\ &= |(x-2)(x+y+2)+(y-1)(y+3)| \leqslant\\ &\leqslant |x-2|\cdot|x+y+2|+|y-1|\cdot|y+3|.\end{aligned}$$

将点 (x,y) 限制在以点 (2, 1) 为中心，边长为 2 的正方形 ($1\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant 2$) 之内，于是

$$|x-2|\leqslant 1,\ |y-1|\leqslant 1,\ |x+y+2|\leqslant 7,\ |y+3|\leqslant 5,$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x,y)-7| &\leqslant 7|x-2|+5|y-1|<\\ &<7(|x-2|+|y-1|),\end{aligned}$$

取 δ 为 $\frac{\varepsilon}{14}$ 和 1 中最小者，则当 $|x-2|<\delta$ 及 $|y-1|<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-7|<\varepsilon.$$

例 2. 函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\ y\neq 0.\\ 0, & \text{当 } x=0,\ y\neq 0, \text{ 或 } x\neq 0,\ y=0.\end{cases}$$

在原点(0, 0)存在极限，极限值为 0.

事实上，

$$|f(x,y)-0|\leqslant|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|,$$

不论 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在一个 $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，当 $|x|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$|y|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时，有

$$|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

在例 2 中，原点(0, 0)并不属于此函数的定义域，但它在该点的极限仍然存在.

根据二元函数极限定义，可以得到，如果极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$$

存在，则点 (x, y) 沿任意一条曲线（或者点列）趋向点 (x_0, y_0) 时，二元函数 $f(x, y)$ 存在极限，而极限值皆为 A.

但是，若已知点 (x, y) 沿若干条特殊的曲线（或点列）趋向于点 (x_0, y_0) 时，二元函数 $f(x, y)$ 存在相同的极限，由此并不足以说明二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在极限.

例 3. 函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},\qquad x\neq 0, y\neq 0.$$

显然，当点 $Q(x, y)$ 沿着 x 轴 $(y=0)$ 和 y 轴 $(x=0)$ 趋向原点时，它皆以 0 为极限，即

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0\ \text{和}\ \lim_{y\to 0}f(0,y)=0.$$

如果点 $Q(x, y)$ 沿着一条通过原点的抛物线 $y=x^2$ 趋向于原点时（将 y 换成 x^2），有

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2}=\frac{1}{2}.$$

因而，函数 $f(x,y)$ 在原点不存在极限.

上面讨论的二元函数 $f(x,y)$ 的极限，称为**二重极限**. 如果 y 暂时固定，令 $x\to x_0$，然后，再令 $y\to y_0$，或交换上述 x 与 y 的顺序，得到的极限，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

称为**二次极限**.

那么二重极限与二次极限之间有什么关系呢？一般说来，它们二者之间没有什么联系，注意下面两种情况：

1. 两个二次极限皆存在，且极限值相等，而它的二重极限可能不存在.

例如上述的例 3.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0,$$

而二重极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

不存在.

2. 二重极限存在，而两个二次极限却可能不存在.

例如上述的例 2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

而二次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

不存在. 这是因为，当 $x\to 0$ 时（y 暂时固定），$\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 同理

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$