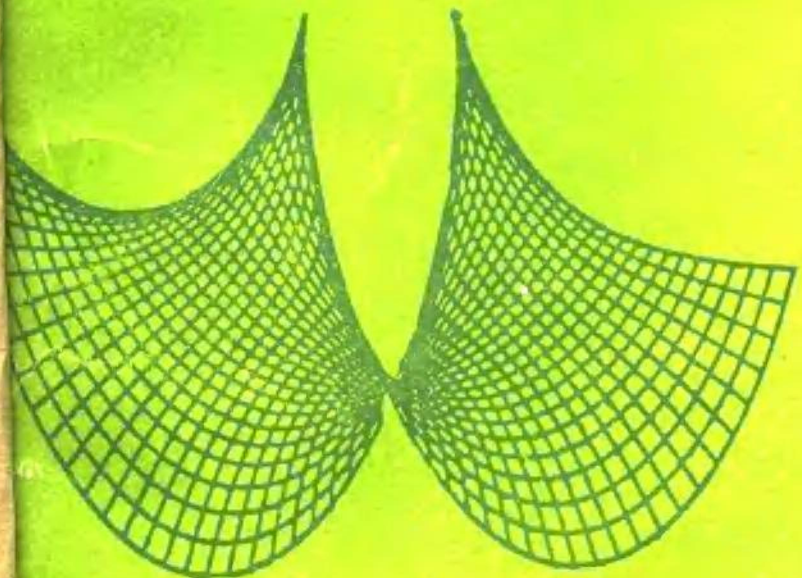
曲线和曲面的微分几何学

多卡模 著
田畴 忻元龙 姜国英 彭家贵 潘养廉 译
胡和生 [illegible] 校



MANFREDO P. DO CARMO

DIFFERENITAL GEOMETRY OF CURVES AND SURFACES

曲线和曲面的微分几何学

M. P. do Carmo　著

田　畴　忻元龙　姜国英
彭家贵　潘养廉　译

胡和生　姜国英　校

上 海 科 学 技 术 出 版 社

Differential Geometry

of

Curves and Surfaces

Manfredo P. do Carmo

1976 by Prentice-Hall, Inc.

Englewood Cliffs, New Jersey

曲线和曲面的微分几何学

M. P. do Carmo 著

田畴 忻元龙 姜国英 彭家贵 潘养廉 译

胡和生 姜国英 校

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海市印刷十二厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 15.75 字数 415,000
1988 年10月第1版 1988 年10月第1次印刷
印数 1—8,900

ISBN 7-5323-0189-3/O·11

定价: 6.55 元

译 者 前 言

巴西几何学家 M. P. do Carmo 所著《曲线和曲面的微分几何学》的英文版出版于 1976 年．这是一本很好的大学高年级的微分几何教科书，内容丰富，行文清晰，对于有志于进一步学习微分几何的人是一本很好的入门书．

本书共有正文五章，"文献与评注"与习题的"提示与答案"．以下是各译者的承译章节：

姜国英：序言，使用说明，第五章 §5-1～§5-5，§5-7～§5-8；

潘养廉：第一章，第五章 §5-6，第五章的附录，"文献与评注"，"提示与答案"；

忻元龙：第二章，第五章 §5-9～§5-11；

田畴：第三章；

彭家贵：第四章．

本书由胡和生教授审校了全部译文，并由姜国英同志对全部译稿在文字上作了统一和修饰．

最后一点，就是原书对矢量并不都是用黑体来加以标记的，但这并不影响对原书的理解和阅读，因为读者根据上下文，很容易辨认一个字母所表示的是一个标量还是一个矢量．故我们在本中文版的译本版面中，矢量统统不用黑体来加以标记，希读者在阅读时予以注意．

由于译者水平有限，误译之处在所难免，请读者批评、指正．

译 者　1987 年 3 月

序　言

本书是曲线和曲面局部微分几何学和整体微分几何学的一本引论. 它的叙述方法与传统方式有如下不同: 较广泛地应用了线性代数的基本知识; 在一定程度上强调了基本的几何事实, 并不把重点放在方法技巧或机遇性的细节上.

本书力求使每一章都能围绕着一个简单并且基本的思想而建立起来. 第二章是围绕 $\mathbb{R}^3$ 中正则曲面的概念展开的; 当这个概念适当地展开时, 就有可能成为微分流形最好的模型. 第三章建立在 Gauss 的法线映照上, 其中包括了 $\mathbb{R}^3$ 中曲面局部几何学的大量内容. 第四章以协变导数的概念为中心, 统一了曲面的内蕴几何学; 我们的目的仍然是使读者对 Riemann 几何中联络这一基本概念作好准备. 最后在第五章中, 我们用弧长的第一变分和第二变分导出了曲面的某些整体性质. 在结束第五章之前(§ 5-10)我们说明, 曲面论的问题以及第二、四章中所得的经验是如何自然地导致微分流形与 Riemann 度量的.

为适当保持抽象概念和具体事实的均衡, 我们给出了大量具详细计算的例子, 并且适当地补充了习题. 经典微分几何中的一些具体材料, 则在这些习题中得到体现. 打星号的习题则在本书末附有提示式答案.

阅读本书必须有线性代数和微积分的知识. 对于线性代数, 仅仅需要一些最基本的概念, 有关的大学标准教程就完全够用了. 至于微积分, 则希望对多元微积分(包括隐函数存在定理的叙述)有一定程度的熟悉. 为了方便读者, 我们把参考资料仅限于 R. C. Buck 所著, 1965 年在纽约由 McGraw-Hill 出版的 Advanced Calculus 一书(引用时记为 Buck, Advanced Calculus). 微分方程的知识是有用的, 但我们并不要求事先具备.

本书是从用葡萄牙语出版的一本书及一套讲义意译出来的，并且添加了材料. 要不是 Blaine Lawsow 的热忱和大力协助，这书不会译成英语. 译文的大部分是由 Leny Cavalcante 完成的。我还要感谢 IMAP [注]中我的同事和学生对本书作的评注和支持. 特别应提到, Elon Lima 阅读了葡萄牙语的部分内容, 并提出了宝贵的意见.

Robert Gardner, Jürgen Kern, Blaine Lawson 与 Nolan Wallach 一丝不苟地阅读了英语的原稿，帮助我避免了一些英语和数学上的错误. Roy Ogawa 为书中的一些精美的插图(图 1-3, 1-8, 1-9, 1-10, 1-11, 3-45 和 4-4) 编制了计算机程序. Jerry Kazdan 慷慨地化了不少时间, 为改进原稿逐字逐句地提了数百条建议. 这本书能有如今的面貌, 极大部分原因是得益于他的意见. 对上述各位，还有 Prentice-Hall 的数学编辑 Arthur Wester 以及在 IMPA 的 Wilson Go'es, 我谨表示由衷的感谢.

Manfredo P. do Carmo

里约热内卢

[注] IMAP 是巴西里约热内卢纯粹和应用数学研究所的缩写. ——译者注

关于使用本书的一些说明

书中内容的编排意图，是使本书能用于多种类型的微分几何教程. 每章开头都有一个引言，说明该章所含的材料以及这些材料以后在书中有什么用处. 为了方便读者，我们用足注指出初次阅读时可略去的各章节(或其中的部分内容).

虽然本书有足够的材料可用于全学年的教程(或专题课程)，但我们还是试图使这本书能适用于为具有一定线性代数和高等微积分知识的大学生而初次开设的微分几何教程.

对于一个季度的短期教程(10 周)，建议选用下列材料：第一章：§ 1-2, 1-3, 1-4, 1-5 以及 1-7 中的一个专题—2 周. 第二章：§ 2-2 与 2-3(略去证明)，2-4 与 2-5—3 周. 第三章：§ 3-2 与3-3—2 周. 第四章：§ 4-2(略去共形映照及习题 4, 13-18, 20), 4-3(只到 Gauss 绝妙的定理), 4-4(只到命题 4; 略去习题 12, 13, 16, 18—21), 4-5(只到局部的 Gauss-Bonnet 定理; 包括应用 (b) 与 (f))—3 周.

上面的 10 周计划在时间安排上是有点偏紧的. 较为宽裕的另一种安排是对头三章可再多花一些时间，然后在教程的最后一周，就测地线，Gauss 绝妙的定理以及 Gauss-Bonnet 定理(这时测地线可定义为其密切平面包含曲面法线的曲线)等内容作一些概述性的讲座.

在一学期的教程中，第一种安排的内容可教得更从容些，讲授者有可能加入一些其他材料(例如 § 5-2 与 5-10(部分)，或者是 § 4-6, 5-3 及 5-4).

还请注意的是习题上的星号既不表示这道习题过于容易，也不表示这道习题比较困难，它仅说明在书后附有解答或提示.

目　　录

第一章 曲　　线

§1-1 引　　言

曲线和曲面的微分几何包括两个方面. 其中一个方面是随着微积分的出现而开始的, 这部分可以称为经典微分几何. 粗略地说, 经典微分几何是研究曲线和曲面的局部性质的. 所谓局部性质, 指的是仅取决于曲线或曲面在一点邻近的行为的那些性质. 适合于研究这种性质的方法是微分学的方法. 由于这一点, 在微分几何中考虑的曲线和曲面将由一定阶数的可微函数来定义.

另一方面是称为整体微分几何的那部分. 这部分研究局部性质对整个曲线或曲面的行为的影响. 我们将在本书后面部分回到微分几何的这个方面.

也许经典微分几何最有趣和最有代表性的部分是曲面的研究。然而, 在研究曲面时, 自然会出现曲线的某些局部性质. 因此我们在第一章中将简要地论述一下曲线.

本章是以这样的方式组织的: 那些主要对曲面感兴趣的读者, 可以仅仅阅读 §1-2 到 §1-5. §1-2 到 §1-4 的内容基本上是介绍性材料 (参数曲线、弧长、向量积), 这些材料在其他课程中可能也有, 但为完整起见这里还是把它们包括进来了. §1-5 是本章的核心, 它包含了研究曲面所需要的有关曲线的材料. 为那些希望对曲线这个课题了解得更深一些的读者, 我们编写了 §1-6 和 §1-7.

§1-2 参数曲线

我们记 $\mathbb{R}^3$ 为三个实数 (x, y, z) 的集. 我们的目标是刻划 $\mathbb{R}^3$ 的某种子集(称为曲线), 它们在一定意义上是一维的, 而且对它们可以采用微分学的方法. 定义这种子集的一种自然的途径是用可微函数. 单个实变量的实函数, 如果在所有点具有任意阶的导数(它们自然是连续的), 那末我们说它是*可微的*(或*光滑的*). 下面是曲线的第一种定义, 虽然它并不完全令人满意, 但对本章的目的是完全合适的.

定义 从实直线 $\mathbb{R}$ 的一个开区间 $I=(a, b)$ 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个可微映照 $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ 称为一条*可微参数曲线*.

在这个定义中, 可微的意思是指: α 是一个对应, 它将每个 $t\in I$ 映照到点 $\alpha(t)$[注] $=(x(t), y(t), z(t))\in\mathbb{R}^3$, 而函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都是可微函数. 变量 t 称为曲线的*参数*. 这里, 区间是从广义的意义上说的. 即包括 $a=-\infty, b=+\infty$ 的情况.

如果我们记 $x'(t)$ 为 x 在 t 点的一阶导数, 并且对函数 y 和 z 采用类似的记号, 则向量 $(x'(t), y'(t), z'(t))=\alpha'(t)\in\mathbb{R}^3$ 称为曲线 α 在 t 点的*切向量*(或*速度向量*), 象集 $\alpha(I)\subset\mathbb{R}^3$ 称为 α 的*轨迹*. 正如下面的例 5 中所说明的那样, 应该仔细地区分参数曲线和它的轨迹, 前者是一个映照, 后者是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集.

关于术语的一个注意点: 许多人采用"无限可微"这个词表示函数具有任意阶的导数, 而"可微分"这个词则用来表示只要求存在一阶导数的情况. 我们不采用这种说法.

例 1 可微参数曲线

$$\alpha(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ t\in R,$$

的轨迹是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上间距为 $2\pi b$ 的螺旋线。这里参数 t 是 x 轴与连接原点 O 和点 $\alpha(t)$ 在 xy 平面上的投影的直线的夹角

[注] 这里的 $\alpha(t)$, 一眼看出是一个矢量, 所以我们不用黑体来加以标记, 希望读者阅读时予以注意. ——译者注

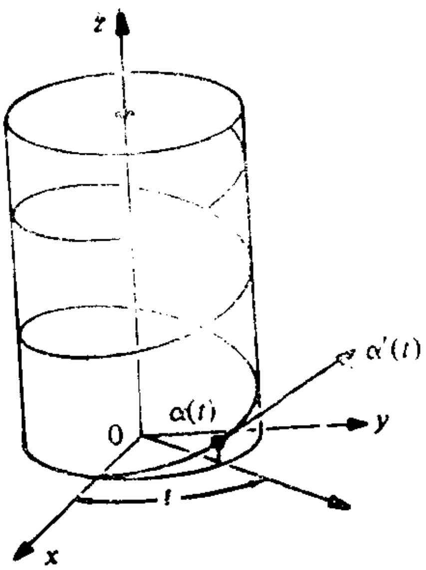


图 1-1

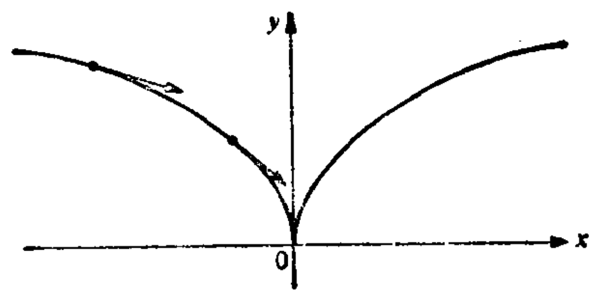


图 1-2

(见图 1–1).

例 2　映照

$$\alpha:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \alpha(t)=(t^3,\ t^2),\ t\in R,$$

是可微参数曲线,它的轨迹如图 1–2 所示. 注意: $\alpha'(0)=(0,\ 0)$, 即在 $t=0$, 速度向量是零.

例 3　映照

$$\alpha:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \alpha(t)=(t^3-4t,\ t^2-4),\ t\in\mathbb{R},$$

是可微参数曲线(见图 1–3). 注意: $\alpha(2)=\alpha(-2)=(0,\ 0)$, 即映照 α 不是 1–1 的.

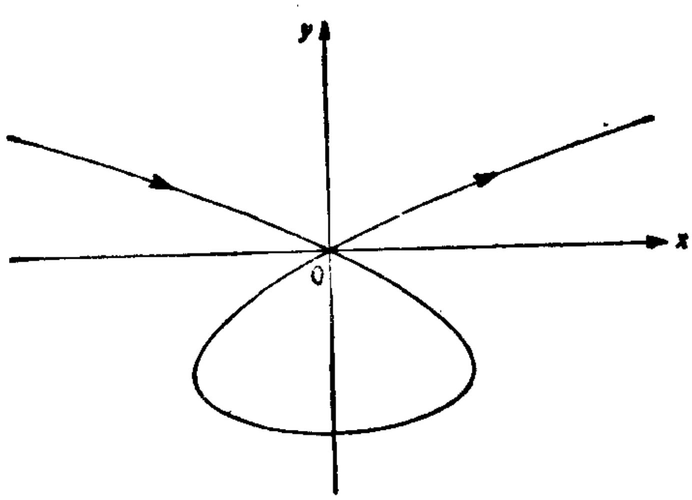


图 1-3

例 4　映照

$$\alpha:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ \alpha(t)=(t,\ |t|),\ t\in\mathbb{R},$$

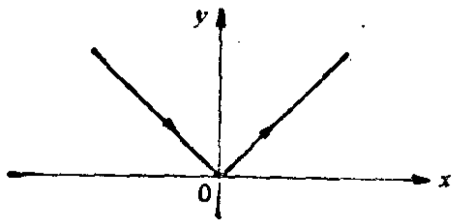


图 1-4

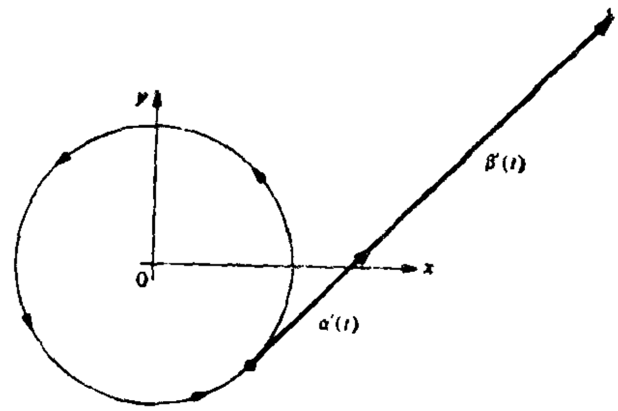


图 1-5

不是可微参数曲线,因为 $|t|$ 在 $t=0$ 不可微(图 1-4).

例 5 两条相异的参数曲线

$$\alpha(t)=(\cos t,\ \sin t),$$
$$\beta(t)=(\cos 2t,\ \sin 2t),$$

具有相同的轨迹, 即圆周 $x^2+y^2=1$, 这里 $t\in(0-\epsilon,\ 2\pi+\epsilon)$, $\epsilon>0$. 注意:第二条曲线的速度向量是第一条曲线的速度向量的两倍(图 1-5).

现在我们简要地回顾一下 $\mathbb{R}^3$ 中向量内积(或点积)的某些性质. 设 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)\in\mathbb{R}^3$, 并定义它的范数(或长度)为

$$|u|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.$$

$|u|$ 的几何意义是从点 $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 到原点 $O=(0,\ 0,\ 0)$ 的距离.

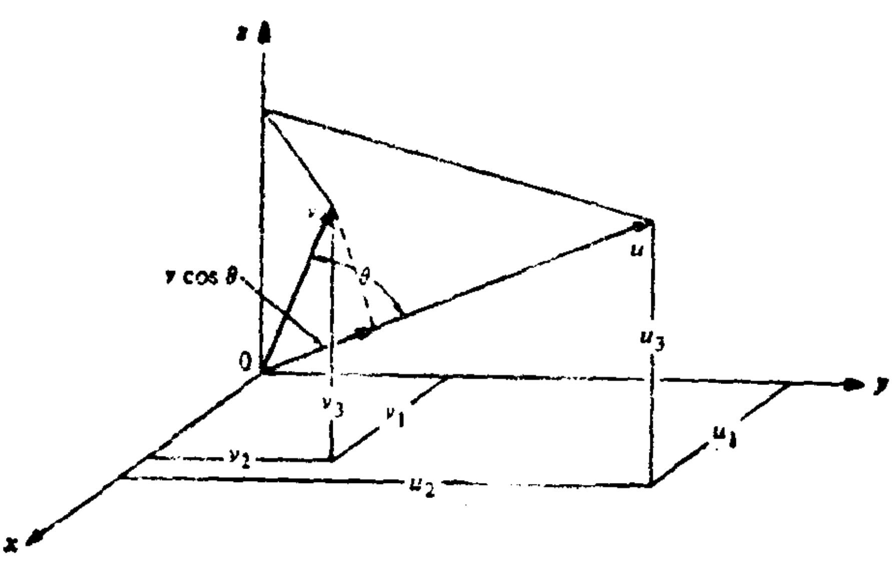


图 1-6

现在设 $u=(u_1, u_2, u_3)$ 和 $v=(v_1, v_2, v_3)$ 属于 $\mathbb{R}^3$，设 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，是线段 Ou 和 Ov 形成的角．内积 $u\cdot v$ 定义为(见图 1-6)

$$u\cdot v=|u||v|\cos\theta.$$

这时成立以下的性质：

1．假设 u 和 v 是非零向量．则当且仅当 u 与 v 正交时，$u\cdot v=0$.

2．$u\cdot v=v\cdot u$

3．$\lambda(u\cdot v)=\lambda u\cdot v=u\cdot\lambda v$.

4．$u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$.

下面我们给出内积的一个有用的表达式．设 $e_1=(1, 0, 0)$，$e_2=(0, 1, 0)$，$e_3=(0, 0, 1)$．容易证明，如果 $i=j$，则 $e_i\cdot e_j=1$，而如果 $i\neq j$，则 $e_i\cdot e_j=0$，这里 $i, j=1, 2, 3$．因此，若记

$$u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3,\ v=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3,$$

并运用性质 3 和 4，我们得到

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

从上面的表达式可知：如果 $u(t)$ 和 $v(t)$，$t\in I$，是可微曲线，则 $u(t)\cdot v(t)$ 是可微函数，且

$$\frac{d}{dt}(u(t)\cdot v(t))=u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t).$$

习　　题

$\alpha(t)=(\sin t, \cos t)$，$t\in(-\infty,+\infty)$

1．求参数曲线 $\alpha(t)$，其轨迹为圆 $x^2+y^2=1$，并使 $\alpha(t)$ 沿着圆按顺时针方向运动，且 $\alpha(0)=(0, 1)$.

2．设 $\alpha(t)$ 是不通过原点的参数曲线．如果 $\alpha(t_0)$ 是 α 的轨迹上距原点最近的点，且 $\alpha'(t_0)\neq0$，证明位置向量 $\alpha(t_0)$ 正交于 $\alpha'(t_0)$. $\alpha(t_0)\cdot\alpha'(t_0)=\alpha(t_0)\cdot\frac{d\alpha(t_0)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d|\alpha(t_0)|^2}{dt}=0$

直线

3．试描述二阶导数 $\alpha''(t)$ 恒等于零的参数曲线 $\alpha(t)$.

4．设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是参数曲线，并设 $v\in\mathbb{R}^3$ 是固定向量．假设对所有的 $t\in I$，$\alpha'(t)$ 正交于 v，且 $\alpha(0)$ 也正交于 v．证明：对所有的 $t\in I$，$\alpha(t)$ 正交于 v.

$\alpha'(t)\cdot v=0\Rightarrow\int\alpha'(t)\cdot v\,dt=v\cdot\int\alpha'(t)\,dt=v\cdot\alpha(t)=\mathrm{const}\xRightarrow{\alpha(0)\cdot v=0}\mathrm{const}=0$

以原点为中心的圆、球面曲线

5．设 α：$I\to\mathbb{R}^3$ 是参数曲线，对所有的 $t\in I$，$\alpha'(t)\neq0$．证明：当且仅当对所有的 $t\in I$，$\alpha(t)$ 正交于 $\alpha'(t)$ 时，$|\alpha(t)|$ 是非零常数.

半径

§1-3 正则曲线；弧长

设 α: $I\to\mathbb{R}^3$ 为可微参数曲线. 对每个 $t\in I$, 若 $\alpha'(t)\neq 0$, 可以定义一条包含点 $\alpha(t)$ 和向量 $\alpha'(t)$ 的直线. 这条直线称为 α 在 t 点的切线. 对曲线的微分几何研究, 基本的一点是在每一点存在这样一条切线. 因此我们称 $\alpha'(t)=0$ 的点 t 为 α 的奇点, 而且我们只限于研究没有奇点的曲线. 注意: 在 §1-2 的例 2 中, 点 $t=0$ 是奇点.

定义 一条可微参数曲线 α: $I\to\mathbb{R}^3$ 称为是正则的, 如果对所有的 $t\in I$, 都有 $\alpha'(t)\neq 0$.

今后我们将只考虑正则的可微参数曲线(而且为方便起见通常省略可微二字).

给定 $t\in I$, 正则参数曲线 α: $I\to\mathbb{R}^3$ 从点 t_0 开始的弧长定义为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\alpha'(t)|\,dt,$$

这里 $$|\alpha'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$$

是向量 $\alpha'(t)$ 的长度. 因为 $\alpha'(t)\neq 0$, 所以弧长 s 是 t 的可微函数, 且 $ds/dt=|\alpha'(t)|$.

在习题 8 中, 我们将对上述弧长定义的合理性给出一个几何论证.

可能出现这样的情况: 参数 t 已经是从某点起计算的弧长. 在这种情况下 $ds/dt=1=|\alpha'(t)|$, 即速度向量的长度总等于 1. 反之, 如果 $|\alpha'(t)|\equiv 1$, 则

$$s=\int_{t_0}^{t}dt=t-t_0,$$

即 t 是 α 从某点起计算的弧长.

为简化叙述起见, 我们以后都用弧长作参数来表示曲线. 后面我们将会看到(见 §1-5)这个限制不是实质性的. 一般并不需

要提到弧长 s 的起点，因为绝大部分概念是以 $\alpha(s)$ 的导数来定义的。

为方便计，我们再作一约定。给定由弧长参数 $s\in(a, b)$ 表示的曲线 α，我们可以考虑另一条由 $\beta(-s)=\alpha(s)$ 定义于 $(-b, -a)$ 的曲线 β，曲线 β 与曲线 α 有相同的轨迹，但是按相反方向描绘。这时，我们说这两条曲线相差一个**定向的改变**。

习 题

1. 证明：正则参数曲线 $\alpha(t)=(3t, 2t^2, 3t^3)$ 的切线与直线 $y=0$，$z=x$ 的夹角是不变的。
2. 当 xy 平面上一个半径为 1 的圆盘沿着 x 轴无滑动地滚动时，圆盘的周线上一点画出的轨迹称为**旋轮线**(图 1-7)。 $\alpha: t\mapsto(t-\sin t, 1-\cos t)$

   *a. 求一参数曲线 $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，其轨迹为此旋轮线，并求出它的奇点。 $t=2k\pi$

   b. 计算相应于圆盘滚动一圈的旋轮线的弧长。 $4\pi+8$

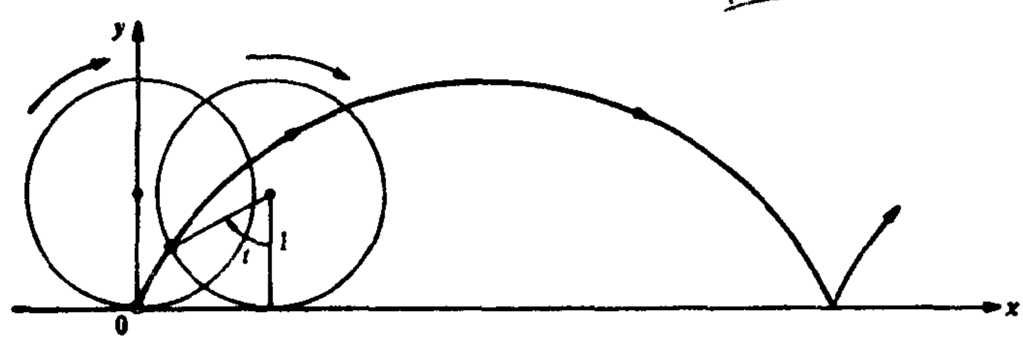


图 1-7 旋轮线

3. 设 $OA=2a$ 是圆 S^1 的直径，OY 和 AV 分别是圆 S^1 在 O 点和 A 点的切线。从 O 点出发的半直线 r 与 S^1 相交于 C，与直线 AV 相交于 B。在 OB 上截取线段 $Op=CB$。如果我们以 O 点为轴心旋转 r，p 点描绘出来的曲线称为 Diocles **蔓叶线**。取 OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，证明：

   a. $\alpha(t)=\left(\dfrac{2at^2}{1+t^2}, \dfrac{2at^3}{1+t^2}\right)$，$t\in\mathbb{R}$，的轨迹是 Diocles 蔓叶线($t=\tan\theta$，见图 1-8)。

   b. 原点 $(0, 0)$ 是此蔓叶线的一个奇点。

   c. 当 $t\to\infty$ 时，$\alpha(t)$ 趋于直线 $x=2a$，且 $\alpha'(t)\to(2a, 0)$。因此，当 $t\to\infty$ 时，蔓叶线及其切线趋于直线 $x=2a$；我们说 $x=2a$ 是此蔓叶线的**渐近线**。

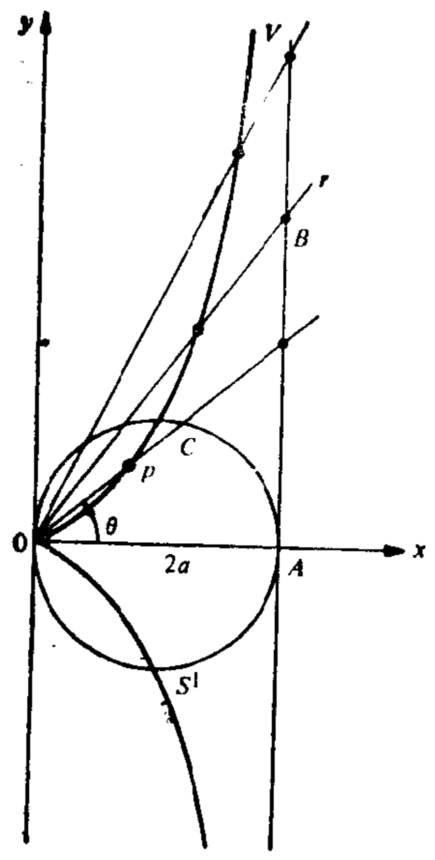


图 1-8　蔓叶线

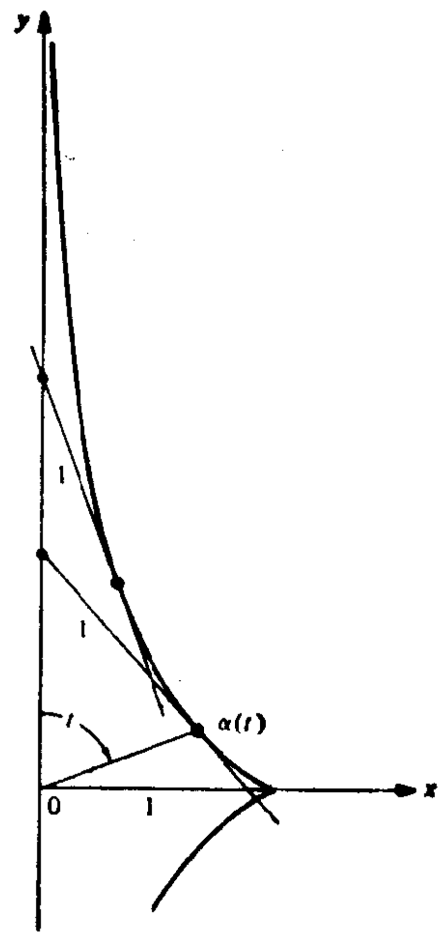


图 1-9　曳物线

4．设α: $(0, \pi)\to\mathbf{R}^2$，由

$$\alpha(t)=\left(\cos t,\ \cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$$

给定，这里 t 是 y 轴和向量 $\alpha(t)$ 的夹角．则 α 的轨迹称为曳物线（见图 1-9）．证明：

a．α 是可微参数曲线，曲线上除了点 $t=\frac{\pi}{2}$ 以外都是正则点．

b．此曳物线的切线上切点和 y 轴之间的线段的长度，总等于 1．

5．设 α: $(-1, +\infty)\to\mathbf{R}^2$ 由

$$\alpha(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3},\ \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

给定．证明：

a．对 $t=0$，α 与 x 轴相切．

b．当 $t\to+\infty$ 时，$\alpha(t)\to(0, 0)$，且 $\alpha'(t)\to(0, 0)$．

c．取反向曲线，当 $t\to-1$ 时，曲线及其切线趋向于直线 $x+y+a=0$．