图论基础

魏暹荪 编著

陕西师范大学出版社

前　　言

图论是一门应用十分广泛而又极其有趣的新兴数学分支。近30年来，由于电子计算机的广泛应用，离散数学问题处于越来越重要的地位，图论作为一门提供一种离散数学模型的应用数学学科而得到了迅速的发展。应用图论来解决运筹学、物理、化学、生物学、计算机科学、网络理论、信息论、控制论、社会科学以及经济管理等方面的问题已显示出极大的优越性。与此同时，图论本身的理论也取得了很大的进展，它与其它数学学科联系紧密，起到了互相促进的作用。从数学教育的角度看，图论对于锻炼学生的组合思维能力，提高运用数学工具描述和解决实际问题的能力也大有裨益。因此，当前图论在全世界数学界、教育界、工程技术界受到了越来越广泛的重视。

近几年来，我校连续开设了图论选修课，同学们在学习中对这一学科表现出了极大的兴趣。本书就是在该课程讲义的基础上修改而成的。选择材料的着眼点是入门必备的基础知识、应用背景及这些材料在数学教育中的功能。考虑到中学数学教师指导数学奥林匹克活动的实际需要，书后专列一个附录，介绍了国内外数学竞赛中的一些图论问题。各章后面的习题也注意收入了一些这样的问题.这些内容稍加充实，即可作为专题讲座的资料。因此，本书既可作为高等师范院校选修课的教材，又可以作为数学奥林匹克培训的参考资料。

从事实际工作而对图论感兴趣的同志，也可以把它作为入门读物。

图论的内容十分丰富，涉及的面也很广。但由于学时所限，本书只能介绍图论中最基础的知识，难免挂一漏万，浅尝辄止。有兴趣深入学习图论的读者可以参看书后所列书目，作进一步的学习和研究。

由于本人水平所限，疏漏谬误在所难免，恳切期望大家在使用过程中不断提出批评建议。最后，我要感谢陕西师范大学出版社的同志、许进同志以及为本书精心绘制了插图的任平同志，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动。

编　者

1990年10月于西安

目　　录

第一章　图和子图

§1.1　基本概念

现实世界的许多现象可以用一类图形来描述，这种图形由一个点集和连接这个点集中某些点对的线所构成。例如，用点表示车站，线表示连接车站与车站的道路；或者用点表示人，连线表示一对朋友。在这种图形中，人们主要感兴趣的是：两点是否被一条线所连接，而连线的长短曲直则无关紧要。大量的这类事实的数学抽象，产生了图的概念。

有序三元组 $G=[V(G),E(G),\Psi_G]$ 称为一个图，其中：

i）$V(G)$ 称为顶点集合；

ii）$E(G)\cap V(G)=\phi$，$E(G)$ 称为边集合；

iii）Ψ_G 是 $E(G)$ 到 $\{(a,b)\mid a,b\in V(G)\}$ 的映射，称为关联函数。

$V(G)$ 中的元素称为顶点，$E(G)$ 中的元素称为边。$V(G)$ 所含元素的个数即顶点个数称为图的阶，用 $|V(G)|$ 表示。$E(G)$ 所含元素的个数称为 G 的边数，用 $|E(G)|$ 表示。我们用 $G(p,q)$ 表示一个阶为 p、边数为 q 的图 G，这时也说 G 是一个 (p,q) 图。

例　$G=[V(G),E(G),\Psi_G]$

其中：$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

Ψ_G 定义为：

$$\Psi_G(e_1)=v_2v_3,\ \Psi_G(e_2)=v_3v_4$$
$$\Psi_G(e_3)=v_4v_4,\ \Psi_G(e_4)=v_2v_4$$
$$\Psi_G(e_5)=v_2v_3,\ \Psi_G(e_6)=v_1v_3$$

一个图可以用平面上的一个图形来表示，这时，用平面上的点代表图的顶点，用平面上连接相应顶点而不经过其它顶点且不自交的曲线代表图的边。图 1.1 就是上例中图的图形。

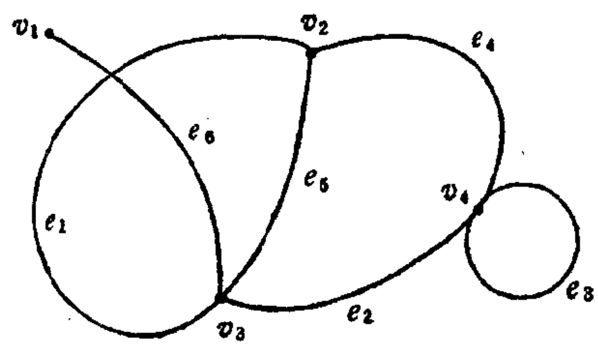


图 1.1

由于顶点的选取和边的形状的任意性，一个图可以有多种在外形上看起来差别很大的图形，例如图 G 的另一个图形可由图 1.2 给出。

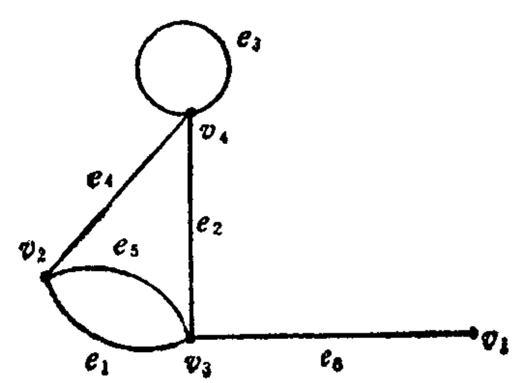


图 1.2

我们经常将图的某一个图形就看作是这个图，并且把它的点称为"顶点"，线称为"边"，图形有助于我们了解和说明图的许多性质。

在一个图 $G=[V(G), E(G), \Psi_G]$ 中，若 $e\in E(G)$，u，$v\in V(G)$，而 $\Psi_G(e)=(u,v)$，则说 u 和 v 是 e 的端点，也说 e

和 u，v 关联，此时，称 u 和 v 是邻接的。若两条不同的边 e_i 和 e_j 有一个公共的端点，则称 e_i 和 e_j 是邻接的，不与任何边邻接的边称为孤立边，不与任何边关联的顶点称为孤立点。两端重合的边称为环，端点不同的边称为杆。

若 $V(G)$ 和 $E(G)$ 都是有限集，则称 G 为有限图，本课程仅讨论有限图。$G(0,0)$ 称为空图。$E(G)=\phi$ 即 G 由孤立点所组成，称为零图。特别的 $G(1,0)$ 称为平凡图。图中若连接两个相同顶点的边的条数大于1，则说这对顶点间有重边相连。同一对顶点间边的条数称为边的重数，既没有环，也没有重边的图称为简单图，否则称为伪图，没有环的伪图称为多重图.图1.1的图就不是简单图。

每对不同的顶点均有边相连的简单图称为完全图。n 阶完全图记为 K_n。

图 1.3 所示的图是一个 5 阶完全图。

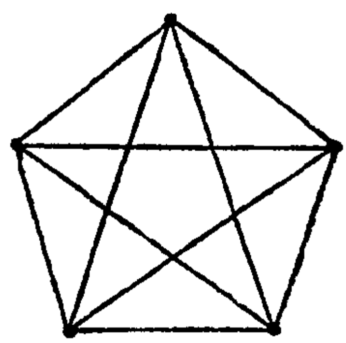


图 1.3

K_3 常称为三角形。

显然有：

定理 1.1 K_n 有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边。

图 G 的顶点集 $V(G)$ 若能分成两个子集 V_1 和 V_2，使得 G 的每条边有一个端点在 V_1，另一个端点在 V_2 中，则 G 称为二分图或偶图。这样一个把 $V(G)$ 分成两个集合 V_1、V_2 的分划 (V_1,V_2) 称为 G 的一个二分划。

设简单二分图 G 的二分划为 (V_1,V_2)，如果 V_1 的每一个顶点与 V_2 的每一个顶点都邻接，则 G 称为完全二分图。

若$|V_1|=m$，$|V_2|=n$，则这样的图记为$K_{m,n}$。

定理 1.2 $K_{m,n}$有 mn 条边。

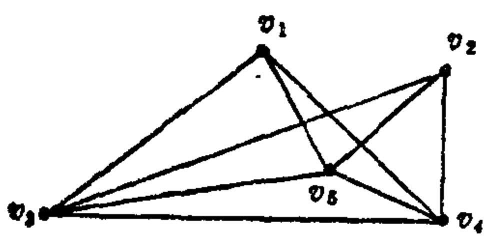
G 是简单图，如果简单图 G^C 满足：

i）$V(G^C)=V(G)$；

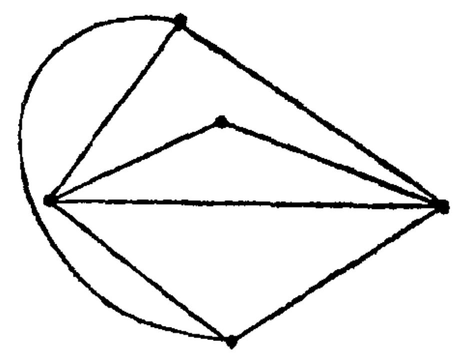
ii）$V(G^C)$中两点当且仅当它们在G中不邻接时在G^C中邻接。

那么G^C 称为G 的补图。

在保持图的顶点和边的关联关系不变的情况下，一个图可以作出许多图形。如果一个图具有这样的图形，它的边仅在顶点处相交，则称它为平面图。图 1.4(a)是一个平面图，因为它具有图形(b)



(a)



(b)

图 1.4

两个图H和G，如果$V(H)=V(G)$，$E(H)=E(G)$且$\Psi_H=\Psi_G$，那么H和G就称为是恒同的，恒同的图当然可以用一个图形来表示。但不恒同的图，可能具有实质上完全相同的图形．如图1.5 的两个4阶图G_1和G_2，表面看来是两个不同的图。但仔细观察一下就会发现，这两个图不仅顶点个数，边的个数都相同，而且顶点和边的关联关系也相同，这

样的两个图就称为是同构的。

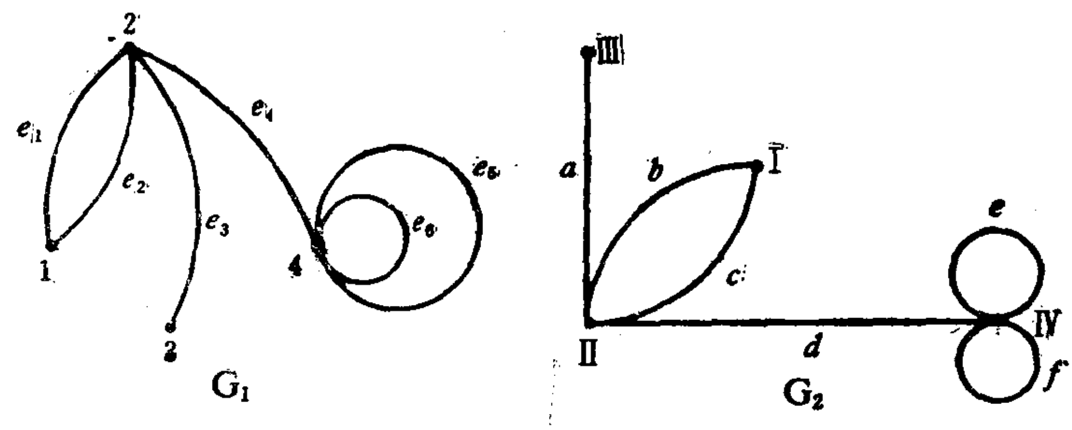


图 1.5　图的同构

设 $G=[V(G),E(G),\Psi_G]$ 和 $H=[V(H),E(H),\Phi_H]$ 是两个图，若存在 1-1 对应偶 (θ,ϕ)，$\theta:V(G)\longrightarrow V(H)$；$\phi:E(G)\longrightarrow E(H)$，使得当且仅当 $\Psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$ 时，$\Psi_G(e)=uv$，则说这两个图同构，记为 $G\cong H$。

例　图 1.5 的两个图 G_1,G_2，存在 1-1 对应偶 (θ,ϕ)，
$\theta(1)=\mathrm{I}$，$\theta(2)=\mathrm{II}$，$\theta(3)=\mathrm{III}$，$\theta(4)=\mathrm{IV}$。
$\phi(e_1)=b$，$\phi(e_2)=c$，$\phi(e_3)=a$，$\phi(e_4)=d$
$\phi(e_5)=e$，$\phi(e_6)=f$。
不难验证。(θ,ϕ) 满足定义条件，因此 $G_1\cong G_2$。

同构的图有相同的结构，差异只是顶点和边的标记不同，图的同构关系显然具备反身性、对称性和传递性，因而是一个等价关系．一个无标记图可以认为是等价的一类图的代表．当有必要区别于无标记图时，前面所述的图称为标记图。一个无标记图可以用属于这个等价类的任何一个标记图的图形来给出，只是不必给顶点和边赋以标记。

设 $v\in V(G)$，G 中与顶点 v 关联的边的数目称为 v 在 G 中的度(次)，记为 $d_G(v)$ 或 $d(v)$。

在度的计数中，一个环的端点的度数计为 2。

如果 $d(v)$ 是奇数，就说 v 是奇顶点；如果 $d(v)$ 是偶数，就说 v 是偶顶点。

如果一个图的每一个顶点都具有相同的度，则称这个图是正则图。每个顶点的度均为 k 的正则图，称为 k —正则图。

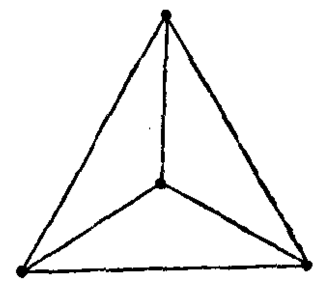


图 1.6

图 1.6 就是一个 3—正则图，显然 n 阶完全图是 $(n-1)$—正则图。

由于图中每移去一条边就使它的两个端点的度各减少1，从而图的总度数减少 2，故有下列明显的定理。

定理 1.3 图 G 中各顶点度数之和等于边数的 2 倍，即

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2q$$

推论 1.4 任意一个图奇顶点的个数是偶数。

证 设 V_1, V_2 分别是 G 的奇顶点集和偶顶点集。则由定理：

$$2q=\sum_{v\in V(G)} d(v)=\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)$$

由于 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 是偶数，所以 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 也是偶数，因而 $|V_1|$ 是偶数。

推论 1.5 正则图的阶与各顶点度数不全为奇数。

§1.2 子图及其运算

设 H 和 G 是两个图.如果 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，并且 Ψ_H 是 Ψ_G 在 $E(H)$ 内的导出函数，那么 H 称为 G 的子图。此时 G 称为 H 的母图，记为 $H\subseteq G$。

如果 $H\subseteq G$ 而 $H\neq G$，则说 H 是 G 的真子图，记为 $H\subset G$。

设 H 是 G 的子图，如果 $V(H)=V(G)$，则 H 称为 G 的生成子图。

设 V' 是 $V(G)$ 的非空子集，H 是 G 的一个子图，如果：

i) $V(H)=V'$；

ii) $E(H)=\{e\mid e\in E(G), \Psi_G(e)=uv,\ u,v\in V'\}$；

iii) Ψ_H 是 Ψ_G 在 $E(H)$ 上的导出函数。

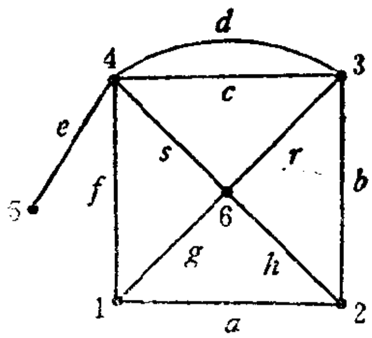
那么，H 称为由 V' 导出的 G 的子图，记为 $G[V']$。

导出子图 $G[V-V']$ 记为 $G-V'$，它是从 G 中删除 V' 中的顶点及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V'=\{v\}$，则把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$，称为 G 的删点子图。

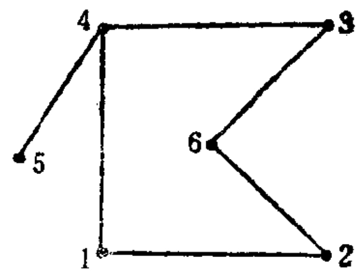
与上述导出子图类似，设 E' 是 $E(G)$ 的非空子集，以 E' 作为边集，以 E' 中边的端点的全体为顶点集所组成的子图称为由 E' 导出的 G 的子图，记为 $G[E']$.它是 G 的边导出子图。

从 G 中删去边集合 E' 中的边之后所得到的导出子图记为 $G-E'$，类似地在 G 上增加边集合 E' 的边所得到的图记为 $G+E'$。如果 $E'=\{e\}$，则用 $G-e$ 和 $G+e$ 来分别代替 $G-\{e\}$ 和 $G+\{e\}$。

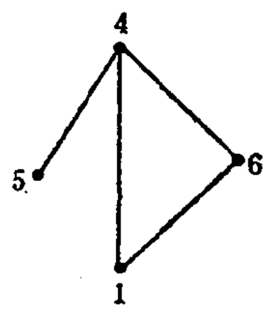
图 1.7 画出了这些不同类型的子图。



G

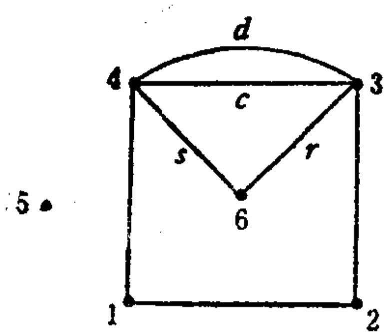


G 的一个生成子图

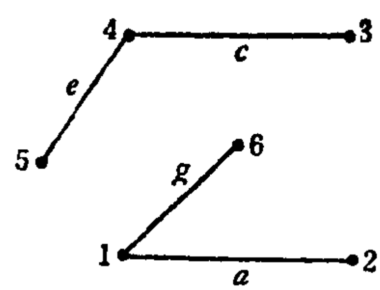


$G-\{2,3\}$

$G[\{4,5\}]$



$G-\{e,g,h\}$



$G[\{a,c,e,g\}]$

图 1.7

G_1 和 G_2 是图 1.7 所示 G的两个没有孤立点的子图，它们的顶点被边完全确定，于是 G_1 与 G_2 间可定义以下几种运算(图 1.8)。

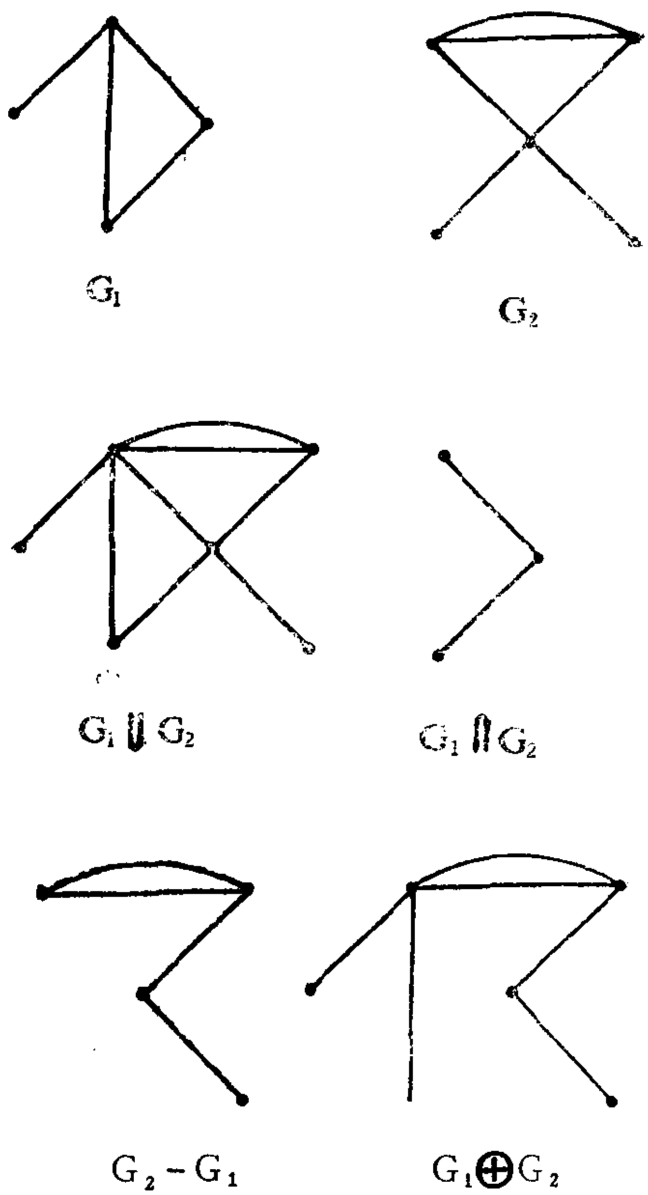


图 1.8　子图的运算

(1) G_1 与 G_2 的并，记为 $G_1\cup G_2$。它是由 G_1 和 G_2 中的所有边组成的图．即 $G[E(G_1)\cup E(G_2)]$．如果 G_1 与 G_2 无公共边，则称 $G_1\cup G_2$ 为 G_1 和 G_2 的直和，即 G_1 与 G_2 的边不重合。以后凡是提到直和运算时，参加运算的诸子图之

间都没有公共边。

(2) G_1 与 G_2 的交，记为 $G_1 \cap G_2$。它是由G_1 和 G_2 的公共边组成的图，即 $G[E(G_1) \cap E(G_2)]$。

(3) G_1 与 G_2 的差 $G_1 - G_2$，记为 $G_1 - G_2$，它是从 G_1 中去掉 G_2 的边所组成的子图。

(4) G_1 与 G_2 的环和，记为 $G_1 \oplus G_2$。它是从 G_1 与 G_2 的并中去掉 G_1 与 G_2 的交所得到的图，即

$$\begin{aligned} G_1 \oplus G_2 &= (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) \\ &= (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1) \end{aligned}$$

除了上述几种运算外，一般地讲,图可以有一元运算(如图的细分)和多元运算(如图的联)。对于那些在 G 的子图集合中不具备封闭性的图的运算(如细分、联等)，我们在以后讨论有关内容时再陆续予以介绍。

§1.3 通路和回路

图 G中一个点边交替的非空有限序列 $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots \cdots e_n v_n$ 称为 G 的一个途径。其中 v_i 是顶点，e_i 是边，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$e_i$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i，v_0 和 v_n 分别称为途径的起点和终点，而 v_1，v_2，$\cdots v_{n-1}$ 称为途径的内顶点，整数 n 称为途径 w 的长。

途径 w 中若干相连项构成的子序列 $v_i e_{i+1} v_{i+1} \cdots e_j v_j$ 称为 w 的(v_i, v_j)节。将序列 w 逆转后所得途径 $v_n e_n v_{n-1} \cdots v_1 e_1 v_0$ 记为 w^{-1}。

在简单图中，途径 w 可以由它的顶点序列 $v_0 v_1 \cdots v_n$ 所确定。因此在简单图中可以用顶点序列表示一个途径。

若途径 w 的边 e_1，$e_2 \cdots e_n$ 互不相同，则称之为链，此外，若顶点也互不相同，则称 w 为通路。例如，在图 1.9 中

途径：$1a2h4d5g2b3c4d5$

链：　$1a2h4c3b2f5$

通路：$1a2h4d5$

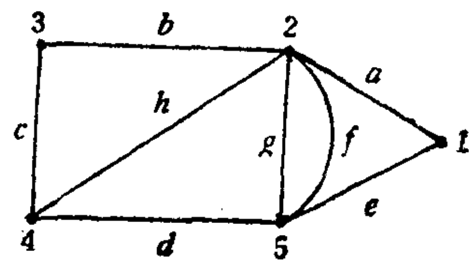


图　1.9

对 G 的两个顶点 u 和 v，如果在 G 中存在一条 (u,v)—通路，则称顶点 u 与 v 是连通的。如果图 G 中的任意一对顶点都是连通的，则 G 称为连通图。设 G 的顶点 u 与 v 是连通的，那么 G 中最短的 (u,v)—通路的长就称为 u 与 v 的距离，记为 $d(u,v)$。

显然，不同顶点之间的连通关系是一个等价关系，按照等价关系，可以把 $V(G)$ 中的顶点分类，当且仅当两个顶点连通时，它们才处于同一类。设 $V(G)$ 所分成的类是 V_1，V_2，$\cdots V_t$ 则 G 的子图 $G[V_1]$，$G[V_2]$，$\cdots G[V_t]$ 称为 G 的连通分支，G 的连通分支数目，记为 $\omega(G)$。对连通图 G，有 $\omega(G)=1$，若 $\omega(G)>1$，则 G 是不连通图。

设 G 是一个连通图，由 n 个与 G 同构的分支构成的不连通图可以用 nG 来表示。这样每一个图都可以写成 $\bigcup\limits_i n_i G_i$ 的形式。其中当 $i \neq j$ 时，$G_i \ncong G_j$。

定理 1.6　图 G 是不连通的当且仅当 G^c 连通。

证　设 u、v 是 G 的任意两个顶点，若 u 与 v 在 G 中不邻接，则在 G^c 中它们邻接。若 u 与 v 在 G 中邻接，它们属于 G 的同一个连通分支，在 G 的另一个分支中有顶点 w，与