侯振挺

Q过程的唯一性准则

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF Q-PROCESSES

侯振挺

Q过程的唯一性准则

湖南科学技术出版社

Q过程的唯一性准则

侯 振 挺
责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年7月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32　印张：5.125　插页：7　字数：119,000
印数：1——3,500
统一书号：13204·58　　定价：1.25元

内 容 简 介

本书以讨论"Q过程的唯一性准则"为核心，介绍了Q过程构造论的基本理论。它主要包括Q过程的拉氏变换的特征，Q过程、B型Q过程以及F型Q过程的存在定理和唯一性准则。

读者对象为理工科大学高年级学生、教师和概率论工作者。

出版说明

侯振挺教授曾于一九七四年，在《中国科学》上发表了题为《Q过程的唯一性准则》的论文。一九七八年，戴维逊基金会的主席、英国皇家学会会员P·肯德尔向侯振挺颁发了“戴维逊纪念奖”，并给我国科学院写信表示祝贺。

信中写道：“长沙铁道学院的侯振挺，在所谓Q过程的存在问题中建立了唯一性准则。鉴于这一非凡的工作，本基金会决定授于他一项戴维逊奖金。马尔可夫过程现在在物理学、生物学和社会科学的各个分支都有许多应用。因此，自然需要为此建立一门完整的一般理论。四十多年来，数学家们非常关心这个问题。他们多次作了特别的努力，以寻求唯一性问题的答案。但是，直到这位天才的年轻人发表他的论文以前，所有的努力都失败了。由于语言上的困难，我们国内对他的工作不是全部了解的．但是，他的杰出论文‘Q过程的唯一性准则’，以英文的形式发表在你们的《中国科学》杂志上，引起了广泛的注意，这是因为他的答案具有完整性和最终性。”

近几年来，侯振挺对“Q过程”又作了深入的研究，

取得一些新的成果。在此基础上，侯振挺又经过深思熟虑，将他对Q过程研究所取得的成果条理化、系统化、通俗化，撰写成《Q过程的唯一性准则》的专著。我们相信，侯振挺的这本著作的出版发行，必将受到中外科学界的重视和欢迎，一定会对概率论的发展起促进作用。

一九八二年四月

目 录

作者序

1974年《中国科学》第二期上发表了作者的题为“Q过程的唯一性准则”的一篇短文．之后，该文获得1978年度英国R·戴维逊纪念奖．后来，有不少同志来信或来访，询问它的内容、意义及其他有关情况．由于这个问题当时是以论文形式发表的，它的对象是概率论专家，起点较高，因此根本没有考虑如何写才能使读者易于接受．加之后来工作忙，没有再去琢磨它，所以对同志们所提出的问题一时很难回答清楚．但这却促使我去理出个尽可能初等的证明．经过一段时间的努力，自认为算是达到了预期的目的，写成了这本书，作为对关心这个课题及作者本人的同志的回答和谢意，并以此纪念英国杰出的概率论专家——已故的R·戴维逊博士．

书中所讨论的问题虽是概率论中一个有名的题目，但我们的陈述和证明却不涉及任何概率论内容．只要具备微积分、一些实变函数以及矩阵的记号和运算规则等方面的知识，就能把这本书完全看懂．因此，我们的证明是初等和纯分析的．当然，通俗易懂也是作者在写作过程中始终不渝的目标，但是我不敢说是完全达到了．

本书可作为理工科大学生的科研小组的阅读材料．对于学过实变函数的数学专业的学生来说，能完全读懂它；对于工科

各专业的学生来说，只要承认实变函数论中的几个定理（在本书中都已列出），也可无困难地掌握本书内容，书中通过对“Q过程的唯一性准则”的研究。把Q过程构造论的逻辑基础和基本结果都作了完整的陈述和严格的证明，所以它也可以作为概率论工作者清理这方面的基本概念和基础理论之用。

本书也包括了作者自己的一些未发表的研究成果。例如定理3.5.1在以前是没有认真证明过的，这次给出了既严格又简单的证明。

最后，说明一个约定：在证明中，例如我们引用定理1、定理1.3及（3.3.2）分别指同节的定理1、同章第一节的定理3及第三章第三节中的公式（2）。

杨向群教授和陈木法同志仔细地阅读了本书的底稿并提出了不少改进意见，谨致谢意。

由于作者学识浅薄，错误和不当之处在所难免，敬请同志们指正。

侯 振 挺

一九七九年八月初稿

一九八一年十月定稿

提　要

设$E=(0,1,\cdots)$为一可列集。所谓一个马尔可夫过程(以下简称马氏过程或过程)是指具有下列性质的一组实值函数$p_{ij}(t)$，$(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$：

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{i\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1. \tag{1}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s), \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=q_{ij}(0)=\delta_{ij}. \tag{3}$$

其中$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\ (i\neq j)$。可以证明，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij} \tag{4}$$

存在[1)]，而且

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty\ (i\neq j),\quad 0\leqslant -q_{ii}\leqslant +\infty$$

$$\sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0 \tag{5}$$

1) 为了节省篇幅，同时也不致影响本书提出的任务，在第一章中证明了$p'_{ii}(0)$的存在性，而后在$-p'_{ii}(0)<+\infty$的限制下证明了$p'_{ij}(0)(i\neq j)$的存在性和有限性。其实，$-p'_{ii}(0)<+\infty$这个限制是可以解除的。

当 $-q_{ii}<+\infty$ $(i\in E)$时，称过程是可微的．简称$Q=(p_{ij})$为过程的密度矩阵，而$(p_{ij}(t))$则简称为Q过程，以表示它与Q有(4)的关系．为了行文的方便，我们把满足(5)式及$-q_{ii}<+\infty$ $(i\in E)$ 的一个矩阵$Q=(q_{ij})$叫做Q-矩阵，若还有

$$\sum_{j\in E} q_{ij}=0 \qquad (i\in E),$$

则称Q为保守的Q-矩阵．于是每个可微的马氏过程的密度矩阵是Q-矩阵．反过来，我们不禁要问：先给定一个Q-矩阵，1）我们能否找到一个可微的马氏过程，使它的密度矩阵恰好等于这个预先给定的Q-矩阵，即能否找到一个Q过程呢？这就是Q过程的存在性问题；2）如果Q过程存在，那么恰好存在一个的充要条件是什么？这就是Q过程的唯一性问题．早在1945年，第一个问题已经解决，其答案可陈述为如下的定理：

定理1（Q过程存在定理）对任给的一个Q-矩阵，Q过程总存在．

关于第二个问题，于最近（1974年）才彻底解决[8]，其答案可陈述为如下的定理：

定理2（Q过程的唯一性准则）设任给一个Q-矩阵，则恰好存在一个Q过程的充要条件是下列两条件同时成立：

$$\text{i)} \quad \inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda)>0, \quad 0<\lambda<+\infty, \tag{6}$$

其中$\varphi_{ij}(\lambda)$由Q-矩阵按如下方式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} & f_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t} \\ & f_{ij}^{(n+1)}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}\, q_{ik}f_{kj}(s)ds,\ (n\geqslant 0) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(t). \tag{8}$$

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_{ij}(t)dt. \tag{9}$$

ii) Q保守且方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda u_i-\sum\limits_{k\in E}q_{ik}u_k=0,\\ 0\leqslant u_i\leqslant 1,\quad (\lambda>0,i\in E)\end{array}\right\} \tag{10}$$

只有零解，或方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\eta_j-\sum\limits_{k\in E}\eta_k q_{kj}=0,\\ 0\leqslant\eta_j,\quad \sum\limits_{j\in E}\eta_j<+\infty,(\lambda>0,j\in E)\end{array}\right\} \tag{11}$$

只有零解。

这本书的主要目的是用纯分析而又初等的方法，严格证明定理2。除此而外，本书还完成了下列三个任务：1）顺便（也是为了证明定理2的需要）给出了定理1的证明；2）给出了B型和F型Q过程（定义见本书第一章§7）的存在性定理和唯一性准则；3）对Q过程构造论的理论基础进行了整理，而且处理方式与前人不同。以前多以泛函分析中的半群理论为工具，而我们则只用到数学分析和实变函数论的知识。所以本书可以作为研究Q过程入门之用。

第 1 章

问题的提出

§1 马尔可夫过程的定义

设$E=(0, 1, \cdots)$为一可列集。所谓一个马尔可夫过程(以下简称为马氏过程或过程),是指具有下列性质的一组实值函数$p_{ij}(t)(i, j\in E, t\geqslant 0)$:

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1; \tag{1}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s); \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}. \tag{3}$$

其中,$\delta_{ij}=0$,$(i\neq j)$,$\delta_{ii}=1$. 若还有

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1\quad (i, j\in E, t\geqslant 0),$$

则称为诚实的马氏过程.

§2 $p_{ij}(t)$的连续性

定理1 设$(p_{ij}(t))$是一个马氏过程,则对于任意的$t\geqslant 0$,

$t'\geqslant 0$和一切i，$j\in E$有

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(t')|\leqslant 1-p_{ii}(t-t')。\tag{1}$$

于是，由(1.3) 知，$P_{ij}(t)$在[0，∞)上一致连续。

证 不妨设$t\geqslant t'\geqslant 0$，令$h=t-t'\geqslant 0$。于是(1) 变成

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h)。$$

根据(1.2)得

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|=\left|\sum_{k\in E}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)\right|$$

$$=\left|(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\right|$$

$$=\left|\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-(1-p_{ii}(h))\,p_{ij}(t)\right|$$

$$\leqslant\max_{i\in E}\left(\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t),\quad(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\right)$$

$$\leqslant\max_{i\in E}\left(\sum_{k\neq i}p_{ik}(h),\ (1-p_{ii}(h)\right)$$

$$=1-p_{ii}(h)。$$

定理得证。

§3　$p'_{ii}(0)$的存在性

定理1 对于任意的$i\in E$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=-p'_{ii}(0)\tag{1}$$

存在，但可能为$+\infty$。

证 由(1.1)和(1.2)得

$$p_{ii}(t+s)\geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t)。\tag{2}$$

由(1.1)、(1.3)和(2)知

$$0<p_{ii}(t)\leqslant 1 \quad (t\geqslant 0). \tag{3}$$

令
$$\varphi(t)=-\ln P_{ii}(t). \tag{4}$$

由(3) 知，$\varphi(t)$取有极限．由(1.3)和(2)得

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0 \tag{5}$$

和
$$\varphi(t+s)\leqslant\varphi(s)+\varphi(t). \tag{6}$$

令
$$q_i=\sup_{0<t<+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant+\infty. \tag{7}$$

如$q_i<+\infty$， 则存在t_0，使$\dfrac{\varphi(t_0)}{t_0}>q_i-\varepsilon$．对任意的$t>0$，我

们记 $t_0=nt+\delta,\ 0\leqslant\delta<t.$ (8)

于是由(6)得

$$q_i-\varepsilon<\frac{\varphi(t_0)}{t_0}\leqslant\frac{n\varphi(t)+\varphi(\delta)}{t_0}=\frac{nt}{t_0}\cdot\frac{\varphi(t)}{t}+\frac{\varphi(\delta)}{t_0}. \tag{9}$$

由(5) 和(8) 得

$$\lim_{t\to 0}\delta=\lim_{t\to 0}\varphi(\delta)=0 \tag{10}$$

及
$$\lim_{t\to 0}\frac{nt}{t_0}=1. \tag{11}$$

由(9) 、(10)和(11)得

$$q_i-\varepsilon\leqslant\varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant\varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=q_i. \tag{12}$$

由ε之任意性得
$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=q_i. \tag{13}$$

如果$q_i=+\infty$，那么为了得到这个结果， 以任给的任意大的正数M代替$q_i-\varepsilon$来进行论证就可以了．再由(1.3) 及微积分中的一个简单事实$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=1$得

$$q_i=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{t}$$