KREIS UND KUGEL

圆与球

〔德〕W. 伯拉须凯 著　　苏步青 译

圆　　与　　球

［德］W.伯拉须凯　著

苏步青　译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是整体微分几何导论，内容包括两方面：第一方面是关于圆和球等周性质的叙述；第二方面是关于凸体论的拓广，形成了现代整体微分几何的滥觞。

本书的前两部分可供中学数学教师参考，只要具备微积分的知识就可以阅读。全书则适合于高等院校数学系学生、研究生学习。

Wilhelm Blaschke

Kreis und Kugel

2. durchgesehene und verbesserte Auflage

Berlin 1956

圆 与 球

[德] W. 伯拉须凯 著

苏步青 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏泗阳印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 135,000

1986 年 8 月第 1 版 1986 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—4,900

统一书号：13119·1351 定价：1.15 元

译 者 序

一九五六年冬天，译者在东柏林首次见到了本书著者 W. Blaschke 教授(1885～1962)，从他那里收到这部增补新版的赠书，使我回想起当年自己阅读同书旧版而从此走上专攻几何的过程，曾向 Blaschke 教授表示，要把它翻成中文，以供我国大学数学系学生和研究生参考之用. 时间又过了二十八年，其间包括十年动乱. 一九八四年初，为上海市部分中学数学教师开讲习班，曾将本书前两章摘译下来，作为讲义进行讲授。同年秋，又把剩下的三章也翻译出来，再补上前两章删掉的部分，整理成现在的译本.

原著行文简练而明晰，用语严密而易懂. 初版是于一九一八年问世的，后不久，曾获得了优秀图书出版奖，因为它是现代所谓整体微分几何的滥觞. 译者在二十年代后期的一些研究工作，从本书获益不浅. Blaschke 教授逝世有年，不能亲眼看到本书译本的出版，殊为憾事. 译者谨以此中译本作为自己对 Blaschke 教授的缅怀和悼念.

苏步青

一九八五年四月于上海

前　言

自本教程《圆与球》在第一次世界大战中初次问世以来，现在40年已经流逝了；在这本书里，以初等方法处理了两种图形的最小性质而且进一步涉及凸体的一些性质．这本书好象是从我给年轻的几何学家们起了刺激性作用似的，因为这个古老的课题范畴可以追溯到阿基米德，而许多新研究却是不断出现了．在这种新论著中，我首先指出下列几本：T. Bonnesen 和 W. Fenchel, 凸体论(德文), Ergebnisse der Mathematik, 柏林, Springer 1934 年版; L. Fejes Tóth, 平面上、球面上和空间里的库藏(德文), Springer-Verlag 1953 年版; A. D. Alexandrow, 凸曲面的内蕴几何(德文), Akademie-Verlag 柏林 1955 年版, 和特别是 H. Hadwiger, 关于凸体的今昔(德文), Birkhäuser Verlag Basel 和 Stuttgart 1955 年版．在最近十年间，这个分野里的许多新东西被寻找出来了．尽管如此，我在这旧著的新编组中，主要还是保留从前的形式，这是由于它简括地导致了那些思维，从古希腊出发，直到德国尤其是通过 J. Steiner. H, A. Schwarz, H. Brunn 和 H. Minkowski 运用了这些思维．但是，我还通过 1916 年以来发表的论著叙述而将最近的发展考虑进去．

这样，在第一线处理的是围绕圆与球的“等周的主要性质”，就是在给定面积和体积之下，必须具有最小周长和最小表面积的问题．在各项证明中，都掌握了 Steiner 和 Brunn 的措施，这些都有直观的优点．自然，一些观察从此被推导了出来，以致一般对“凸体”，也即对空间里的这种点集——它的

两点的连接线段也被包含在内，仍旧成立.

我今天仍然感谢已故老友、老同事 G. Herglotz，就在这份论著的写作中也有许多依靠他的地方.

1955/56 年冬

W. 伯拉须凯

目　　录

第 三 部 分

凸体论中的 Schwarz, Brunn 和 Minkowski 的诸定理

第 四 部 分

凸体极值中的新课题

附 录

关于凸体的其他研究的瞭望

第一部分

圆的极小性质

§1. Steiner 的四连杆法

Steiner(实际上1782年和华沙 S. Lhuilier 合作)创造出一种简单作图，使我们有可能把任何非圆的闭平曲线 K 变成一个等周的、但有较大面积的闭平曲线 K^*. 从这作图可能性立即得出结论：K 不是“等周”问题的解，就是说，在所有闭平曲线中、要使围成尽可能大的面积. 这样，除了圆，没有别的曲线能够具备这性质.

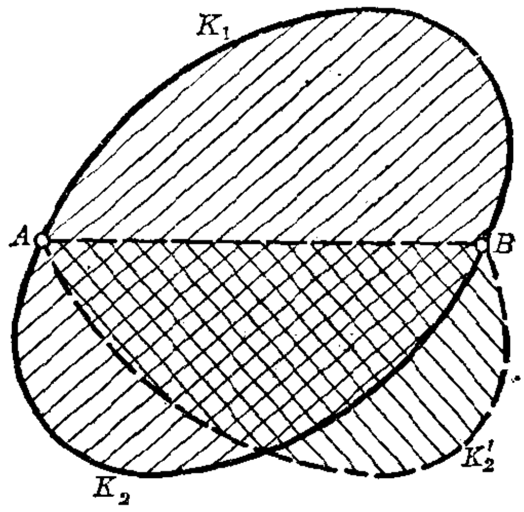

图 1

所提的 Steiner 作图称“四连杆法”，作法如下. 在非圆的 K 上找出这样两点 A 和 B，使得 K 在 A 和 B 被平分为等长弧 K_1 和 K_2(图1). 我们可以适当地选取记法，以致那两块由 AB 线段界成的面积 F_1 和 F_2 之间成立关系 $F_1 \geq F_2$. 现在，削掉 K_2 这段弧而代之以一条 K_1 关于直线 AB 的对称弧 K_2'. 这样，由 K_1 和 K_2' 组成的闭曲线 K' 关于轴 AB 是对称的，而且显然和 K 有同一周长. 两块面积

$$F=F_1+F_2 \text{ 和 } F'=2F_1$$

之间成立关系 $F\leqq F'$.

可是我们还不能就此得出结论，因为等式可能要成立．我们首先指出：K 根据假设原来不是圆．所以我们可以这样选取分点 A 和 B，使得部分弧 K_1 和 K_2 都不是半圆．因此，K' 也就不是圆了．

于是我们在对称曲线 K' 上可以如此选出不同于 A 和 B 的一点 C，使三角形 ABC 在 C 的角 γ 不是直角．设 D 为 C 关于直线 AB 的对称点．如果从 K' 所围成的面积割开四边形 $ACBD$，那末留下了如图 2 所示的阴影“半月形”四块．我们把这四块半月形看做被粘贴在硬纸板上的，而且在四角处 $ACBD$ 都被配上铆钉的连杆．这样，每块的外境界是 K' 的部分弧，内境界则是四边形的一边．这样，我们获得了“四连杆”．

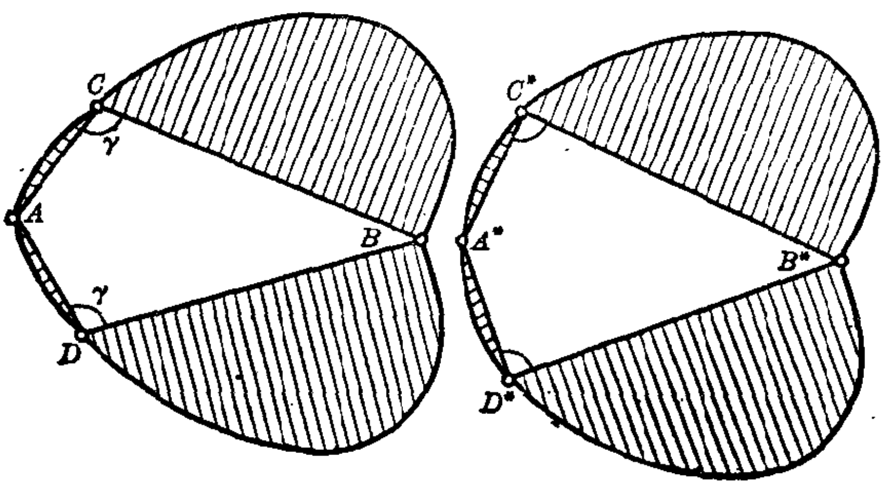

图 2

现在，把这个四连杆变动为 $A^*B^*C^*D^*$，使新四边形在 C^* 和 D^* 都构成直角．这样得来的新四边形的对称外围曲线 K^* 就是所求的．实际上，K^* 的全周是由四部分连成的曲线，而且各弧和 K' 的对应弧等同．所以 K^* 是和 K'，K 等周

的. 至于 K^* 和 K' 的面积 F^* 和 F' 则不相等，它们之差因为各半月形始终不变而等于两个四边形 $A^*B^*C^*D^*$ 和 $ABCD$ 的面积 Φ^* 和 Φ 之差.

$$F^*-F'=\Phi^*-\Phi.$$

设 a 和 b 为三角形 ABC 的二角 A 和 B 的对边，而且 γ 是 C 角，那末

$$\Phi^*-\Phi=ab(1-\sin\gamma)>0.$$

因此，$F^*>F'$，于是

$$F^*>F,$$

就是说，K^* 的面积确实大于 K 的面积.

§2. 存 在 问 题

据上所述，关于其中所引用的一些概念，如："闭平曲线"、"弧长"和"面积"，都被看作为全无限制的东西(对此，即将予以考虑)，这估且不论，是不是通过 Steiner 的作法实际上完成了圆的等周性质的证明呢？ 重复地讲，我们已经阐明了的是：如果 K 是一条闭平曲线，但不是圆，那末我们一定可作一条闭平曲线 K^*，使它有等周而较大的面积. 因此，K 不能是等周问题的解.

假如在等周的所有闭平曲线中存在这样一条，它的面积 $\geq$ 其它各条的面积的话，那末它必须是一个圆.

可是所提问题的这样一个解事实上存在着——这个假设从头就被我们看作为自明的. 但是，经过深入的探讨，问题的主要难点就在于此.

凡具有一定周长 L 的闭平曲线，它的面积 F 是在有限的界限之下的，比方说：

$$F<L^2.$$

对此不等式不在这里详述而将在下文(§5)加以回顾. 所有数 F 的集合,也就是具有周长 L 的所有曲线的面积的集合简称为"有界"集合. 为了避免引起误解,许多数学家也使用"界限"的称呼. 如 B. Bolzano 早在 1817 年就知道了[1]术语那样, 人们称大于所有 F 的任何数,例如 L^2,为一个"界限", 其中必有一个最小的,称所有数 F 的上限.

例如, 我们取数列

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots,$$

便知道它是以 1 为上限的. 从这个例子已经看出, 在一个有界的无穷集合中不一定包括上限,也就是说,一个有界的无穷集合不一定包含一个最大数.

因此, 我们必须证明: 在所有数 F 的集合中存在一个最大数 F_0,然后通过四连杆法才能完全证明圆的极大性质.

Steiner 对存在问题的立场起因于他的论文的不明确. Geiser 在其对 Steiner 的非常值得一读的追悼演讲[2]中说过, 他或许可以说是一个思考多端的奇人, 以致 Dirichlet 尝试说服 Steiner 去认识所作结论的缺陷而以失败告终. 尽管这样,Steiner 有过某些个踌躇不安, 也就是大概由于他把存在性看作自明的缘故吧, 他在某处曾这样写道: "……, 而实际上,如果假定必有一个最大的图形存在,那末证明就会变为非

[1] "Rein analytische Beweis, dass zwischenje zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege"(41 页以降). 关于实数理论可参照 O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig 1914.

[2] C. F. Geiser: Zur Erinnerung an J. Steiner, Zürich 1874.

常简短的了"[1].

后来，人们把这些和存在证明相对立的困难看作为不可克服，而且 Weierstrass 首次在他的前世纪七十年代在柏林大学所作的讲义中、应用自己引进于变分法的一般方法，以严密地奠定圆的极大性质的基础.

在这里，我们却把证明移到另一途径去，就是：先集中力量去对付多角形，用以代替任意闭曲线，然后通过多角形来逼近曲线. 这个证法就是关于多角形等周性质的预测法，是属于古代研究这个问题的工作，即古希腊人 Zenodor 大约公元前150年的著书：περὶ ἰσοπερι-μέτρων σχημάτων.

这样，不用变分法，也不用高等分析法，而单靠 Steiner 的四连杆法，便可圆满达到目的. 为了多角形的场合的存在证明，我们需要到关于连续函数的 Weierstrass 存在定理，而对此将在所论的特殊情况下委细地给与奠基(§ 5). 以后，我们还要阐明如何更放弃这个方法而可以把多角形存在证明归结到初等基础去(§ 6).

§ 3. 多角形的面积

在平面上设立直角坐标系. 设 O 是坐标原点，T_1、T_2 是坐标 x_1, y_1; x_2, y_2 的两点[2]. 我们定义三角形 OT_1T_2 的面积公式为

$$\text{面积}\{OT_1T_2\}=\frac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2).$$

如人们容易验算的那样，这个表达式对于坐标系的旋转

[1] 论文全集 II, 197 页. 注记.

[2] 这里"点"意味着欧氏空间里的实点而且是真正（即在有限处的）点. 无限远点和虚点的引进，在这里并不起作用.

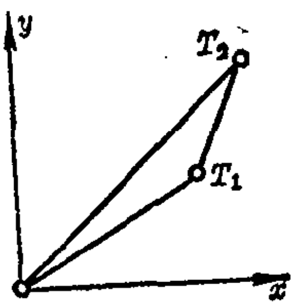

图 3a

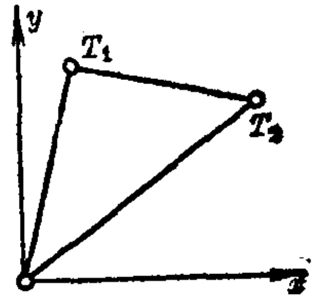

图 3b

$$x=x^*\cos\varphi-y^*\sin\varphi,$$
$$y=x^*\sin\varphi+y^*\cos\varphi$$

是不变的：

$$x_1y_2-y_1x_2=x_1^*y_2^*-y_1^*x_2^*$$

而且在特殊位置下，比方当 T_1 落在 x 轴上时，我们知道这个表达式的几何意义. 当顶点 OT_1T_2 具有正回转方向时(图 3a)，所定义的面积是正的，而当 OT_1T_2 具有负回转方向时(图 3b)，它则是负的.

现在我们取有限个分别以 x_1, y_1; x_2, y_2; $\cdots$; x_{n+1}, y_{n+1} 为坐标的点. 以 $OT_1T_2\cdots T_{n+1}$ 为顶点的多角形的面积是指各三角形面积之总和：

$$\text{面积}\{OT_1T_2\cdots T_{n+1}\}=\text{面积}\{OT_1T_2\}+\text{面积}\{OT_2T_3\}+\cdots$$
$$+\text{面积}\{OT_nT_{n+1}\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{x_ky_{k+1}-y_kx_{k+1}\}.$$

我们现在特别假定 T_{n+1} 与 T_1 相合致($x_{n+1}=x_1$, $y_{n+1}=y_1$). 那末，这个面积和坐标原点 O 的选择没有关系. 因为，当我们令

$$\begin{cases}x_k=x_k^*+\xi,\\ y_k=y_k^*+\eta\end{cases}$$

时，便有