大　学

数学系

自学丛书

空间解析几何

KONGJIANJIEXIJIHE

大学数学系自学丛书

空间解析几何

东北师范大学

郭卫中　主编

辽宁人民出版社

一九八二年·沈阳

责任编辑：王鸿宾
封面设计：安今生

空间解析几何
郭卫中 主编
*
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：16
字数：420,000 印数：1—23,000
1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷
统一书号：7090·198 定价：2.05元

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　　录

第一部分　空间解析几何讲义

第一章　空间坐标系

空间解析几何和平面解析几何一样，也是由给定的有序数组确定点的位置，且以它为基础研究空间几何图形的一些性质．但它所研究的内容比平面解析几何更加多样和广泛，它不仅研究直线和曲线，而且还要研究平面和曲面．

因为坐标系是研究解析几何的基础，所以在第一章中，我们首先应当建立空间直角坐标系．同时，为了使读者能够对其他坐标系也有某些了解，还要介绍较常用的空间极坐标系和柱面坐标系．

§1　空间直角坐标系

在中学的数学课程中，已经学过直线坐标系（数轴）和平面直角坐标系．空间直角坐标系是它们的一种推广和发展．那末，空间直角坐标系是由哪些条件，怎样建立起来的呢？现在我们就来讨论这个问题．

我们先取交于一点而且互相垂直的三个轴．用 O 表示它们的交点，用 Ox 表示第一个轴，Oy 表示第二个轴，Oz 表示第三个轴．在图中，把字母 x, y, z 写在对应轴正向的近旁（图1）．

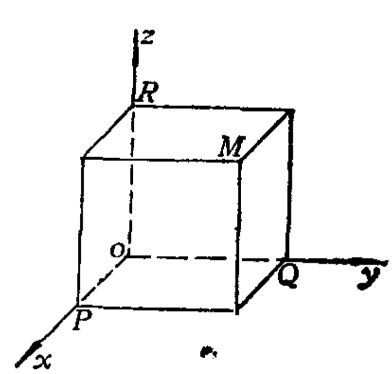

图1

再取一个线段作为测量长度的

单位，也称测度单位．以O为共同原点，在轴 Ox，Oy，Oz上建立数轴或者说导入坐标系。

设M是空间的任意一点．过点M作平行于平面 Oyz，Ozx 和 Oxy 的平面，用 P,Q 和 R 分别表示这些平面与直线Ox，Oy 和 Oz 的交点，设 x，y 和 z 分别是点 P，Q 和 R 在直线 Ox，Oy 和 Oz 上的坐标系里的坐标．根据直线上点的坐标定义，则 $x=OP$，$y=OQ$，$z=OR$，而 OP，OQ 和 OR分别是直线 Ox，Oy 和 Oz 上有向线段 $\overline{OP}$，$\overline{OQ}$ 和 $\overline{OR}$ 的代数值．因此，对于空间的一个确定点M，则数x,y 和z完全确定。

反之，如果已知一组实数 x,y 和 z，则在直线 Ox，Oy 和 Oz 上分别以 x,y 和 z 为坐标的点 P,Q 和R完全确定。过点 P，Q 和R分别作平行于平面 Oyz，Ozx 和 Oxy 的平面，则这三个平面交于唯一一点M．因此，一组实数 x,y 和 z 在空间确定唯一一点。

由上所述，可以断定，空间的所有点M与全体有序三数组 x,y,z 之间有一一对应关系．建立点和数组间的这种对应，就说在空间导入坐标系，我们把这种坐标系叫做**空间直角坐标系**。空间点M所对应的数组 x,y 和 z 叫做**点M的直角坐标**．数 x 叫做点M的**横坐标**，数 y 叫做**纵坐标**，数 z 叫做**竖坐标**．平面 Oxy，Oyz 和 Ozx 叫做**坐标面**．轴 Ox，Oy 和 Oz 叫做**坐标轴**，Ox 叫做**横轴**，Oy 叫做**纵轴**，Oz 叫做**竖轴**．点O叫做**坐标原点**．由此可见，空间直角坐标系，就由有序的互相垂直的三个坐标轴和一个测度单位完全确定。

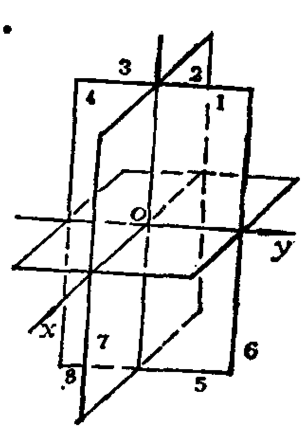

图 2

空间任意点 M 的坐标，常用 x,y,z 表示，并记作$M(x,y,z)$。

三个坐标面 Oyz，Ozx，Oxy 把整个空间分成八个区域，每个区域都叫做**卦限**（图2）．在轴 Ox 正向，Oy 正向和 Oz 正向的区域叫做**第一卦限**；在轴 Ox 负向，

Oy 正向和Oz 正向的区域叫做第二卦限；在轴 Ox 负向，Oy 负向和 Oz 正向的区域叫做第三卦限；在轴 Ox 正向，Oy 负向和 Oz 正向的区域叫做第四卦限。在第一、二、三、四卦限下面的区域分别叫做第五、六、七、八卦限。

不难看出，点M所在的卦限与它坐标的符号之间有下列关系：

符号 卦限 / 坐标	一	二	三	四	五	六	七	八
横坐标 x	+	−	−	+	+	−	−	+
纵坐标 y	+	+	−	−	+	+	−	−
竖坐标 z	+	+	+	+	−	−	−	−

显然，平面 Oxy 上每个点的竖坐标都是零；平面 Oyz 上每个点的横坐标都是零；平面Ozx 上每个点的纵坐标都是零。因为坐标原点是三个轴的交点，所以它的三个坐标都是零。

根据点的直角坐标的定义，从上表不难看出对称点坐标之间的符号的变化关系。例如，若点 $M(x,y,z)$是空间的一点，则点 $P(x,y,-z)$是点M关于坐标面 Oxy 的对称点；点 $Q(x,-y,-z)$是点M关于轴 Ox 的对称点；点 $R(-x,-y,-z)$是点M关于坐标原点的对称点。

应当注意，在空间直角坐标系中，如果横轴、纵轴、竖轴的正向恰好如右手拇指、食指、中指所指的方向，则这样的坐标系叫做右旋坐标系，也称右手系（图3）。如果横轴、纵轴、竖轴的正向恰如左手拇指、食指、中指所指的方向，则这样的坐标系叫做左旋坐标系，也称左手系（图4）。在我国，通常采用右旋坐标系。

例1　已知空间一点M的坐标为（3，4，5），试在直角坐标系 $Oxyz$ 中描出它的位置。

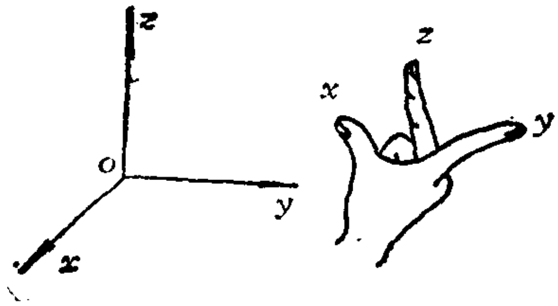

图 3

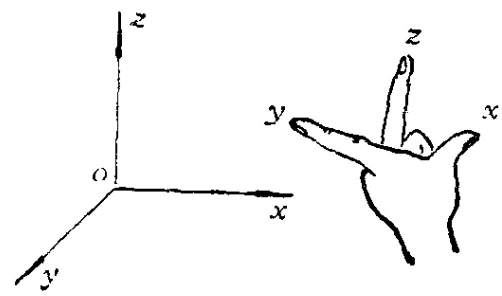

图 4

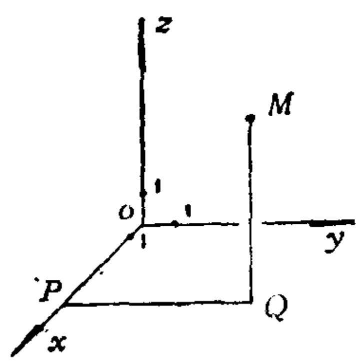

图 5

解 如图5，先在 Ox 轴上确定坐标为 3 的点 P，过点 P 引平行于 Oy 轴的线段 PQ，使其长度为 4，然后再从 Q 点引垂直于 Oxy 坐标面的线段 QM，使其长度为5，则点 M 就是要求描出的位置。

例 2 已知空间一点 M 的坐标为（3，3，2），试描出它关于坐标面 Oxy、坐标轴 Oy 和坐标原点 O 的对称点。

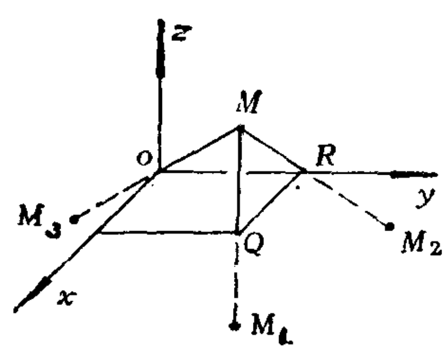

图 6

解 根据对称点坐标之间的符号关系，可知点 M 关于 Oxy 坐标面、Oy 轴和原点 O 的对称点分别为 $M_1(3,3,-2)$，$M_2(-3,3,-2)$，$M_3(-3,-3,-2)$。然后，如图 6，作 Oxy 面的垂线段 $\overline{MM_1}$，垂足为 Q，使 $\overline{MQ}=\overline{QM_1}$；作 Oy 轴的垂线段 $\overline{MM_2}$，垂足为 R，使 $\overline{MR}=\overline{RM_2}$；再过原点 O 作线段 $\overline{MM_3}$，使 $\overline{MO}=\overline{OM_3}$。这样得到的点 M_1，M_2，M_3 就是所要描出的对称点。

§2 空间极坐标系

空间极坐标系在地理学和天文学中有着广泛的应用．现

在，我们来建立空间极坐标系.先取一条射线Oz，过O点作垂直于射线 Oz 的平面Oxy。然后，在平面 Oxy 上，以O为极点，射线 Ox 为极轴，建立平面极坐标系（图7）。

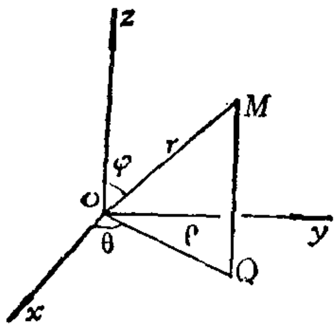

图7

设M是空间的任意一点，Q是它在平面 Oxy 上的射影。连结线段 $\overline{OM}$、$\overline{OQ}$，用 r 表示线段 $\overline{OM}$ 的长度 $r=|OM|$，用 θ 表示点Q的极角 $\theta=\angle xOQ$，用 φ 表示射线 Oz 和 $\overline{OM}$ 的夹角 $\varphi=\angle zOM$。因此，我们就得到一组实数 r，θ，φ.当点M与O点重合时，r 等于零，角 θ 和 φ 可取任意值.

反之，如果已知一组实数r,θ,φ，则可求得一点M，使线段$\overline{OM}$的长度等于 r，$\angle xOQ$ 和 $\angle zOM$ 分别等于 θ 和 φ。点M就是球面（中心为O半径为 r）、锥面（顶点为O，轴为 Oz，顶角为2φ）和半平面 OQz(OQ 与 Ox 交角为θ)的交点（图8）.

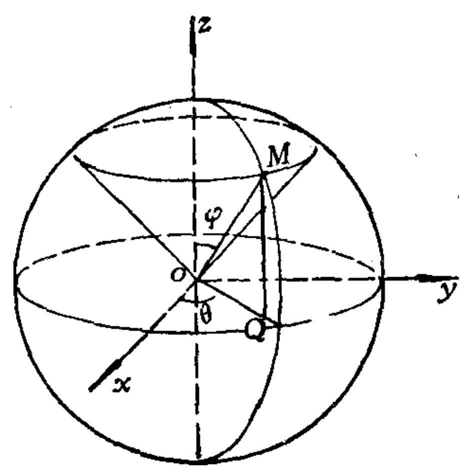

图8

这样，就可建立空间的点与数组 r,θ,φ 间的对应关系，但还不是一一对应。可是，当我们取角的主值：$-\pi<\theta\leqslant\pi$，$0<\varphi<\pi$ 时，即除Oz 轴上的点外，空间的所有点M与数组 r，θ,φ 之间就能够建立起一一对应关系。建立点和数组的这种一一对应关系，我们就说在空间导入**极坐标系**，也称**球面坐标系**。点M所对应的数组 r,θ,φ 叫做**点M的极坐标**. r 叫做**动径**，θ 叫做**方位角**，φ 叫做**天顶角**。极坐标为 r,θ,φ 的点 M 常记做 $M(r,\theta,\varphi)$。

Oz 轴上点的极坐标，通常是不确定的。但，有时也把Oz轴上点的坐标看做是 $r=$常数，θ 取任意值，$\varphi=0$或 π。

在研究某些问题时，有时需要把直角坐标变为极坐标，或把极坐标变为直角坐标. 因此，我们有必要研究这两种坐标间的变换关系.

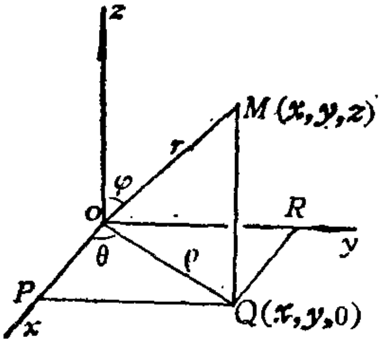

图 9

为此，我们把图7中的射线 Ox 和 Oz 作为直角坐标系的 Ox 轴和 Oz 轴，取它们的公垂线作为 Oy 轴，使 Ox，Oy，Oz 组成右旋系（图9）. 在这种情形下，我们来求直角坐标和极坐标的变换式.

1° 用极坐标表示直角坐标的变换式

设 M 是空间的任一点，它的直角坐标为 x,y,z，极坐标为 r,θ,φ，则

$$x=OP=\rho\cos\theta,\quad y=OR=\rho\sin\theta,\quad z=QM=r\cos\varphi.$$

这里，$\rho=|OQ|$. 从直角三角形 OQM 可以看出，$\rho=r\sin\varphi$. 由此得到

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\sin\varphi\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi\\ z&=r\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这就是所求的变换式。

2° 用直角坐标表示极坐标的变换式

将（1）式的每个等式两边各自平方，然后两边对应相加，则得

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=r^2[\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi]\\&=r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=r^2\end{aligned}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

再用（1）的第一式的两边分别去除第二式的两边，则得

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta \quad 或 \quad \theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

从（1）的第三式，得

$$\frac{z}{r}=\cos\varphi \quad 或 \quad \varphi=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是，我们得到所求的变换式

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}\\ \varphi&=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

这也是（1）的逆变换式。

需要注意，用（2）式计算角 θ 时，极角的主值有时不能完全确定。如果要得到满足条件的角，可以按 (x, y) 的符号，也就是按点所在的象限选定。至于角φ，可以取满足（2）的第三式的正角，因为 φ 的取值范围为 $0<\varphi<\pi$。

例 1 已知一点M的极坐标为$\left(2, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$，求点$M$的直角坐标。

解 由题设，已知 $r=2$，$\theta=-\frac{\pi}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$代入（1）式，得

$$x=2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

所以点M的直角坐标为$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$.

例 2 已知点M的直角坐标为$(-2, 2, 0)$，求点M的极坐标。

解 由题设，已知 $x=-2, y=2$，$z=0$。代入公式（2），

则得

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{-2}=\operatorname{tg}^{-1}(-1)=\frac{3}{4}\pi\ \text{或}\ \frac{7}{4}\pi$$

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{0}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\pi$$

因为点$M(-2,2,0)$在第二象限，所以角 θ 应取$\frac{3}{4}\pi$. 因此，点M的极坐标为$\left(2\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)$.

§3 柱面坐标系

下面，我们来导出柱面坐标系.

我们先确定一个空间直角坐标系（图10）. 然后在坐标平面 Oxy 上建立一个以坐标原点O为极点，Ox 轴为极轴的平面极坐标系.

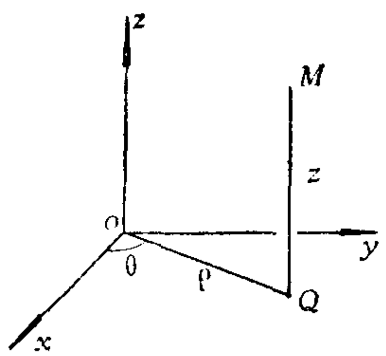

图 10

设M是不在 Oz 轴上的空间任意一点，它在 Oxy 平面上的射影为Q，用 ρ,θ 表示平面 Oxy 上点Q的极坐标，用 z 的绝对值表示点Q到点M的距离. 这样，不在 Oz 轴上的空间任意一点总有 ρ,θ,z 三个数与之对应.

反之，当给定三个数 ρ,θ,z可确定空间唯一一点. 例如，当 $\rho=$常数，而 θ, z 可任意取值时，则得到一个以 Oz 轴为轴的柱面；当 $\theta=$常数，而 ρ, z 可任意取值时，则得到一个以 Oz 轴为边界的半平面；当 $z=$常数，而 ρ, φ 可任意取值时，则得到一个平行于平

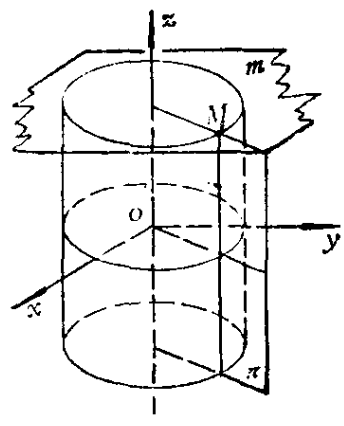

图 11

面 Oxy 的平面。

这样，当给定三个数 ρ，θ，z 则三个面——柱面 f、半平面 π 和平面 M（图11）完全确定，而这三个面相交于唯一一点。由此可知，一组数 ρ，θ，z 在空间确定唯一一点。

因此，除 Oz 轴上的点外，空间所有点与三数组 ρ，θ，z 之间成一一对应。建立点与数组间的这种对应，我们就说在空间导入**柱面坐标系**。我们把数 ρ,θ，z 叫做**点M的柱面坐标**，并记作 $M(\rho,\theta,z)$。

Oz 轴上点的柱面坐标通常是不确定的。但，有时也把这些点的坐标看做是 $\rho=0$，θ 可取任意值，$z=$某一常数。

由柱面坐标定义可知，它们的取值范围为

$$\left.\begin{array}{l} 0<\rho<+\infty \\ 0\leqslant\theta<2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{array}\right\}$$

容易看出，若空间任意一点M的直角坐标为(x,y,z)，它的柱面坐标为(ρ,θ,z)，则它们坐标之间，有如下关系：

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{array}\right\} \qquad (1)$$

（1）式的逆变换式为

$$\left.\begin{array}{l} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{array}\right\} \qquad (2)$$

例1 已知一点M的直角坐标为$\left(\frac{6}{5},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，求点$M$的柱面坐标。

解 由题设，知 $x=\frac{6}{5},y=-\frac{1}{2},z=\frac{3}{4}$代入（2）式，得

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{13}{10}$$