

高层建筑基础

茜平一 陈晓平



高层建筑基础

茜平一 陈晓平

M) 23/30

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高层建筑基础/茜平一,陈晓平. —武汉:武汉工业大学出版社,1997.10

ISBN 7-5629-1311-0

I. 高… I. ①茜… ②陈… III. 工民建—高层建筑—大学教材 N. TU—12

内 容 提 要

本书系统阐述了高层建筑的常用基础型式及其设计分析方法,适当介绍了该领域的最新研究成果和发展动态。

全书共分七章,包括梁式基础、筏板基础、箱形基础、桩基础、上部结构与地基基础共同作用,以及深基坑开挖与支护等内容。

本书可作为高等院校工民建专业、岩土工程专业及土木工程相关专业高年级学生及研究生的课堂用书,也可作为相应专业工程设计人员、研究人员的参考用书。

武汉工业大学出版社出版发行

(武汉市武昌珞狮路14号 邮编:430070)

武汉工业大学出版社中南三〇九印刷厂印刷

(湖北省安陆市九号信箱 邮编:432600)

*

开本:787×1092 1/16 印张:7.625 字数:189千字

1997年10月第1版 1997年10月第1次印刷

印数:1—3000册

定价:12.00元

(本书如印装质量问题,请向承印厂调换)

前 言

高层建筑是城市化和工业化的产物,而科学技术的进步又为高层建筑的发展创造了条件。所以,从 19 世纪 80 年代出现近代高层建筑以来,高层建筑在设计理论、施工水平、建筑艺术、经济效益、及使用功能等方面均有了长足的进步。现在各国政府正在逐步立法,把空间作为一种资源,有计划地进行开发利用。世界各大城市高层建筑的数量与日俱增,成为现代城市的重要特征之一。

我国高层建筑的大规模发展是从本世纪 70 年代末开始的,进入 80 年代后发展更为迅速,从总体上看,其建设已具一定水准,有的已达国际先进水平。但在各种地质条件下建造高层建筑,如何经济合理地做好地基基础设计,却依然是个困难而又亟待解决的问题,一直受到工程界和学术界的高度重视。

传统的地基基础设计理论已不能对复杂的高层建筑基础设计问题作出满意的解答。本教材在参阅大量有关文献的基础上,结合作者近年来参与的与之有关的研究和实践,比较系统地阐述了高层建筑常用基础类型的设计与理论分析方法,并对高层建筑设计和施工中不可避免的一些问题(如上部结构与地基基础的共同作用、基坑开挖与支护技术等),进行了简要的介绍。在内容的编排上既力求反映本学科的前沿动态,又注重教材的特点;立足现行规范,介绍成熟的计算理论和方法。限于篇幅,许多问题未能展开讨论。

本教材是土力学与地基基础课程的后续教材,计划学时约需 30 学时左右,可作为工民建专业、岩土工程专业及土木工程相关专业高年级学生及研究生的课堂用书,也可作为相应专业工程设计人员、研究人员的参考用书。全书共分七章,其中第一、六、七章及各章思考题由陈晓平编写,第二、三、四、五章由茜平一编写。

限于编者水平,书中内容不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

1997 年 6 月

目 录

第一章 绪论	1
第一节 高层建筑中基础工程的地位	1
第二节 高层建筑基础工程特点及类型	2
第三节 高层建筑基础设计方法的进展	5
第二章 梁式基础	8
第一节 概述	8
第二节 梁式基础简化分析方法	8
第三节 文克尔地基上梁的计算	9
第四节 地基上梁的有限差分法	18
第五节 柱下条形基础设计	22
第三章 筏板基础	26
第一节 概述	26
第二节 筏板基础设计要求	26
第三节 筏板基础计算	28
第四节 筏板基础设计实例分析	33
第四章 箱形基础	38
第一节 概述	38
第二节 箱形基础的埋置深度及构造要求	38
第三节 地基计算	40
第四节 箱形基础结构设计	46
第五节 箱形基础设计实例分析	51
第五章 桩基础	58
第一节 概述	58
第二节 高层建筑适用桩型的选择	59
第三节 桩基础计算	62
第四节 高层建筑桩筏(箱)基础设计的有关问题	71
第六章 上部结构与地基基础的共同作用	77
第一节 概述	77

第二节	共同作用分析方法	79
第三节	上部结构与桩筏(箱)基础的共同作用分析	82
第四节	实测结果与分析	89
第七章	深基坑开挖与支护	92
第一节	概述	92
第二节	放坡开挖	93
第三节	支护开挖与设计	95
第四节	基坑稳定性分析.....	103
第五节	地下水控制.....	105

第一章 绪 论

第一节 高层建筑中基础工程的地位

近 20 年来,国内外高层建筑发展十分迅速,它的突出优点是可以有效地利用空间资源。据有关资料介绍,9~10 层的建筑比 5 层的建筑节约用地 23%~28%,16~17 层的建筑则比 5 层的建筑节约用地 32%~49%。并且,若以 9~10 层的建筑与 5 层建筑相比,小区市政设施费用可降低 32%。

什么样的建筑属于高层建筑,目前还没有统一的标准。美国规定高度 25m 以上或 7 层以上的建筑为高层建筑;英国规定高度 24.3m 以上的建筑为高层建筑;法国规定居住建筑高度 50m 以上、其他建筑高度 28m 以上的建筑为高层建筑;日本则把 8 层以上或建筑高度超过 31m 的建筑称为高层建筑,并把 30 层以上的旅馆、办公楼和 20 层以上的住宅规定为超高层建筑。

根据联合国教科文组织所属的世界高层建筑委员会的建议,一般将高层建筑划分为如下四类:

- 第一类,9~16 层,高度不超过 50m;
- 第二类,17~25 层,高度不超过 75m;
- 第三类,26~40 层,高度不超过 100m;
- 第四类,40 层以上,或高度超过 100m 以上。

我国《高层民用建筑设计防火规范(GBJ45—82)》中规定 10 层及 10 层以上的住宅和建筑高度超过 24m 的其他民用建筑为高层建筑。《钢筋混凝土高层建筑结构设计与施工规程(JGJ3—89)》中规定 8 层和 8 层以上的民用建筑为高层建筑。此规定仅限于钢筋混凝土结构,其高度不超过 200m。

高层建筑的主要特征是层数多,高度高,重量大。目前我国最高的建筑已超过 80 层,300m;国外则已超过 100 层,400m。由于建筑物高耸,不仅竖向荷载大而集中,而且风荷载和地震荷载引起的倾覆力矩成倍增长,因此要求基础和地基提供更高的竖直与水平承载力。同时使沉降和倾斜控制在允许的范围内,并保证建筑物在风荷载与地震荷载下具有足够的稳定性。这就对基础的设计与施工提出了更高、更严的要求,需要考虑的因素很多,涉及许多学科,而且随着层数和高度的逐渐增加,其建设难度也越来越大,其中有一个非常突出的问题,就是高层建筑基础工程施工的环境效应问题。为了满足建筑功能和稳定性要求,高层建筑的基础一般具有较大的埋置深度,甚至超过 20m,因而必须开挖较深的基坑和采取相应的降水措施。实践证明,经济合理的基坑支护结构和各种严密的防护措施是高层建筑基础工程不可分割的一个部分。

高层建筑基础工程的造价和施工工期在建筑总造价和总工期中所占的比例,与上部结构型式和层数、基础结构型式、桩型以及地质复杂程度和环境条件等因素有关。除了钢结构和直

接建造在基岩上的浅基础以及岩层埋藏很浅的桩基础以外,就钢筋混凝土结构和一般地质条件而言,采用箱形基础或筏基的高层建筑,其基础工程(包括基坑支护与开挖施工)的费用约占建筑总造价的 10%~20%,相应的施工工期约占建筑总工期的 20%~25%;采用桩基的高层建筑,上两项的比例分别约为 20%~30%和 30%~40%。

综上所述,可将高层建筑中基础工程的地位概括为:基础工程的设计与施工对高层建筑本身及其周围环境的安全至关重要,其造价与工期对高层建筑总造价和总工期有举足轻重的影响。

第二节 高层建筑基础工程特点及类型

高层建筑与一般单层和多层建筑在地基基础设计的概念,理论和计算方法等方面都有很大的区别,其主要特点如下:

1. 工程比较重要且造价比较高,能否采用经济合理的基础设计方案,具有较大的经济效益和潜力,这需要更准确可靠的工程地质勘察资料和更全面深入的分析比较。

2. 对地基承载力的要求比较高,即除了垂直荷载比较大以外,还要考虑抵抗水平风荷载或地震荷载作用以及上部结构的整体稳定性。

3. 对地基的不均匀沉降比较敏感,地基的受压层深度比较深。需要更准确的变形指标和计算方法。

4. 基础埋深或要求处理的深度比较大,为防止基坑开挖等对周围构筑物的不良影响,必须采取严密的防护措施,这些措施与现有施工条件、设备、材料的关系十分密切。

由于以上这些原因,在设计和施工中对高层建筑基础工程的方案确定需要认真而又慎重。又由于问题的复杂性和当前的理论研究尚未成熟到能够准确地预计到各种变化因素的影响程度,因此系统地进行高层建筑基础工程方面的研究,已成为当前亟需解决的重要课题。近十年来召开的多次高层建筑国际会议上,基础工程总是讨论的重要议题之一,已成为工程界关注的焦点。

高层建筑的上部结构荷载很大,基础底面压力也很大,一般的独立基础已不能满足承载的技术要求,因此,应采用特殊形式的基础,其常用的有如下几种类型。

一、交梁式条形基础

当高层建筑上部的柱子传来的荷载较大而单独基础或柱下条形基础均不能满足地基承载力要求时,可在柱网下纵横两向设置钢筋混凝土条形基础,这样就形成了如图 1-1 所示的交梁式基础

(也称十字交叉条形基础)。这种结构形式比单独基础的整体刚度好,有利于荷载分布。

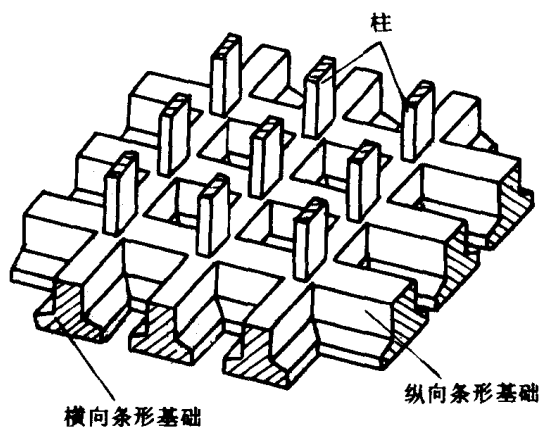


图 1-1 交梁式条形基础

二、筏板基础

若上部结构传来的荷载很大,上述交梁基础还不能够提供足够的底面积时,可将条形基础的底面积扩大为整板基础,简称筏板基础。采用筏板基础不仅能使地基土单位面积的压力减小,而且提高了地基土的承载能力,增强了基础的整体性,并可以减少高层建筑的不均匀沉降。所以,采用筏板基础能使地基土的承载力随着基础埋深和宽度的增加而增大,而基础的沉降则随着基础埋深的增加而减少。

通常的筏板基础是一块等厚度的钢筋混凝土平板,称为平板式筏板基础。一般厚度为 $1.0\text{m}\sim 2.5\text{m}$ 左右(图 1-2a)。当柱荷载较大时,可以加大柱下面的基础板厚度,使其能承受相应的剪力和负弯矩(图 1-2b),也可以设计成墩板式基础(图 1-2c)。如果柱距太大和柱荷载差产生较大的弯曲应力时,则可沿柱轴线采用加厚的基础板肋带(图 1-2d),成格型梁板式刚性结构,或者使基础板与地下室墙组成刚架。

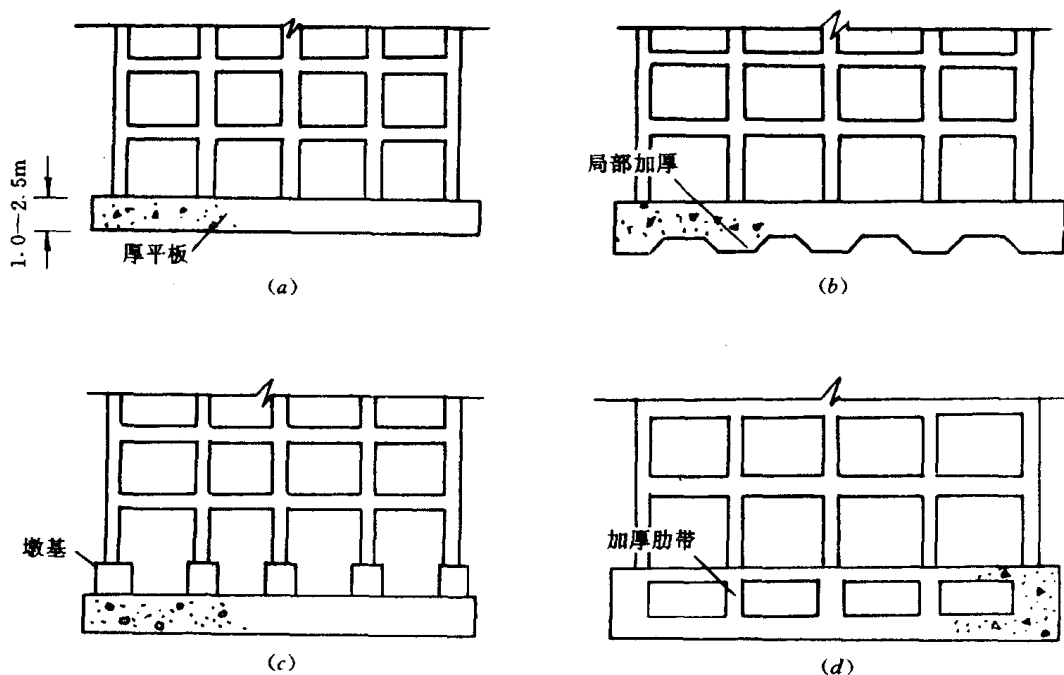


图 1-2 筏板基础的一般形式

在国外高层建筑中,采用这种筏板基础较多。但由于这种基础承受上部结构的荷载不能太大,因此,筏板基础最常用于 $15\sim 20$ 层高层建筑的基础。若地基较好,其层数可适当增加。

三、箱形基础

当高层建筑的上部结构荷载较大,底层墙柱间距过大,地基承载能力相对较低,采用筏板基础不能满足要求时,可采用箱形基础。箱形基础是由钢筋混凝土底板、顶板和纵横交错的隔墙组成的一个空间的整体结构(图 1-3),这样基础自身刚度很大,可以减少高层建筑的不均匀沉降,同时还可以被利用作为地下室。

箱形基础大部分为补偿式基础,即在设计中,使建筑物的重量约等于由建筑位置移去的土

总重(包括地下水位中的水重)。图 1-4a 表示开挖前水平的地面,地下水位在地面下距离为 h_1 处,图 1-4b 表示基础开挖基坑至 h_2 的深度,此处 $h_2 > h_1$,而图 1-4c 表示建造高层建筑后已将基坑全部充满。如果建筑物的重量等于由基坑中移去的土和水的重量,显然,在深度 h_2 以下土中的总竖向压力相同。基础的沉降是由地基有效压力的增加而发生的,如果地基有效压力不变,则建筑物不会沉降。即补偿式基础的原理为移去土的重量与施加的建筑物重量基本平衡,其结果是建筑物的沉降很小。

高层建筑中的箱形基础,根据基底的实际平均压力大小可分为全补偿式基础(基底的实际平均压力等于基底土原有的自重压力)和欠补偿式基础,亦称部分补偿式基础(基础底面的实际平均压力大于基底土原有的自重压力)。我国目前建造的高层建筑大多数都属于以上这两种基础。

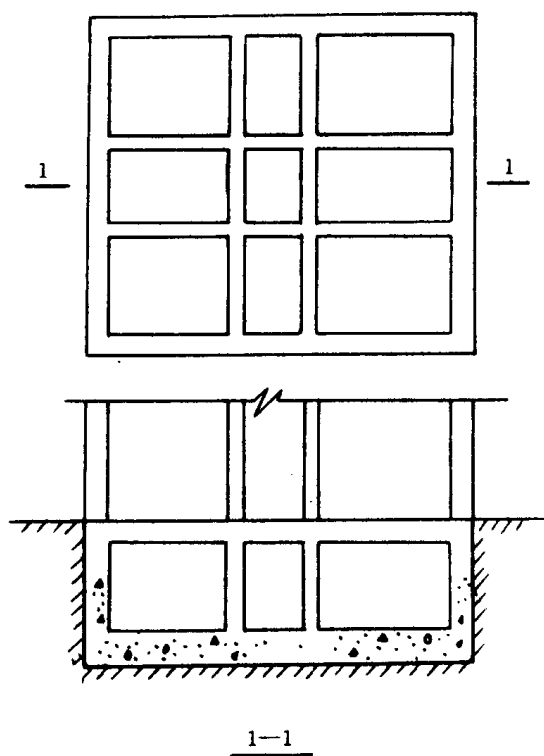


图 1-3 箱形基础

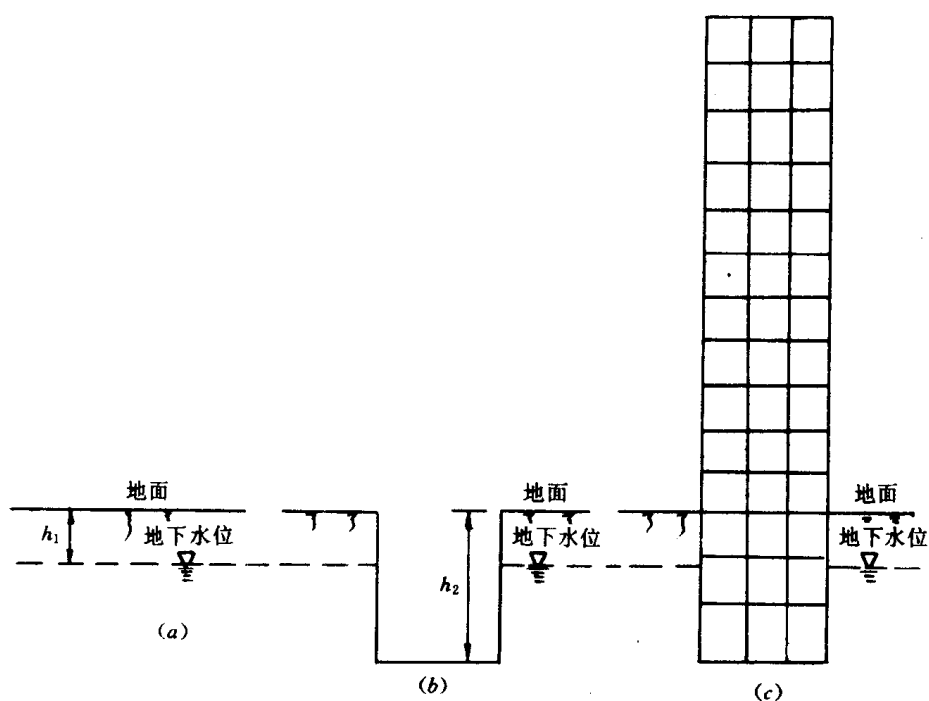


图 1-4 补偿式基础的应力平衡

四、桩基础

桩基础是高层建筑常用的基础形式,具有承载能力大,能抵御复杂荷载以及能良好地适应各种地质条件的优点,尤其对于软弱地基上的高层建筑,桩基础是最理想的基础形式之一。一般桩基础可选用预制钢筋混凝土桩、灌注桩和钢管桩等。具体选择时应结合地基的土质情况、上部结构类型、荷载的大小、施工单位的打桩设备和技术条件、单桩设计承载能力、建筑场地的环境等因素,通过技术经济综合分析后决定。常用的桩基础支承型式按桩的传力及作用性质可分为端承桩、摩擦桩基础(如图 1-5)。端承桩主要靠桩端的支承力起作用,而摩擦桩则主要靠桩与土的摩擦力来支承。

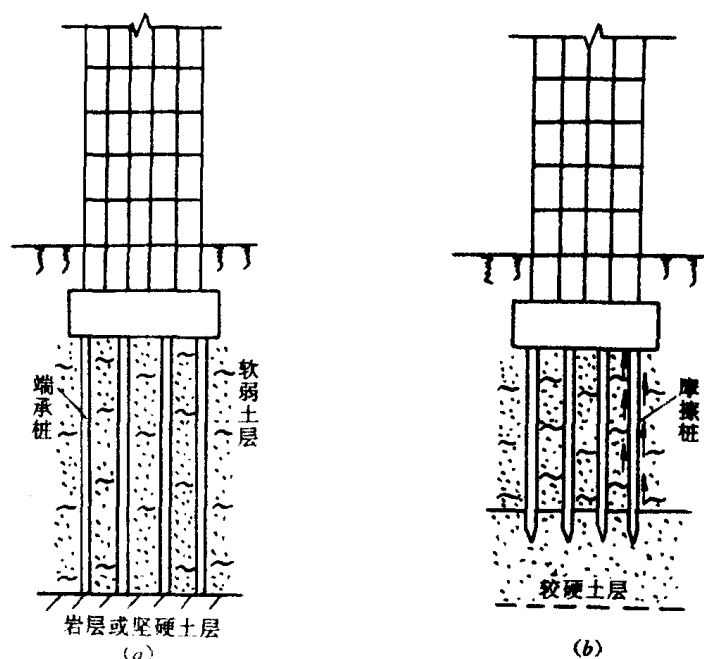


图 1-5 桩的支承形式
(a)端承桩;(b)摩擦桩

上述几种基础型式是高层建筑设计中所采用的几种典型的基础型式。事实上,随着高层建筑的发展,目前在设计中已不仅仅采用上述的单一基础型式,而是采用多种基础的混合型式,如桩—筏基础、桩—箱基础等等,这些基础的采用均取得了较好的技术效果。

第三节 高层建筑基础设计方法的进展

一、上部结构与基础和地基共同作用的概念

任何工程结构物总是坐落于地表或者掩埋于土(包括岩石)中,结构物的重量由土的支承力和地下水的浮力来平衡,即通常所说的静力平衡。位于地基土上的结构体系,包括上部结构和基础结构,与地基土三部分组成的静力平衡体系中,各自的工作性状(例如变形和内力或应

力)不仅取决于荷载的大小与分布,在一定意义上更取决于三者抵抗变形的总体刚度及其相互关系。即上部结构、基础、地基三部分是彼此不可分离的整体,每一部分的工作性状,都是三者共同作用的结果。共同作用分析,就是把这三部分看成是一个彼此协调工作的整体,在连接点和接触点上满足变形协调的条件下求解整个系统的变形与内力,这是一个高维的超静定问题,只有借助于电子计算机,这种分析才能成为现实与可能。

二、高层建筑基础设计方法的发展

高层建筑基础的分析与设计方法大体经历了三个发展阶段:不考虑共同作用的阶段;仅考虑基础与地基共同作用的阶段;以及开始全面考虑上部结构与基础和地基共同作用的阶段。这一发展过程是与生产的发展,技术的进步,特别是计算手段的突飞猛进密切相关的。

第一阶段主要采用结构力学的方法,将整个静力平衡体系分割成三个部分,各自独立求解。以图 1-6a 所示高层框架结构为例,首先沿框架底层柱脚切断,将上部结构视为柱底固定的独立结构,用结构力学方法求出外荷载作用下柱底反力和结构内力,如图 1-6b 所示。然后将求出的柱底固端力反向作用于基础梁,并假定梁底的地基反力为直线分布,仍按结构力学方法求解基础的内力,如图 1-6c 所示。最后按总荷载求出基底平均反力 $\bar{p}$,按柔性荷载计算地基的变形,见图 1-6d。显然,这样解算的结果与实际工作状态是不相符的,它只满足了总荷载与总反力的静力平衡条件,却完全未能考虑上部结构与基础之间的连接点和基底与土介质之间的接触点上位移连续的条件,因而各支座反力的分配和地基反力的分布均与实际不符,从而导致结构内力与变形和基础内力与变形均与实际发生偏离。

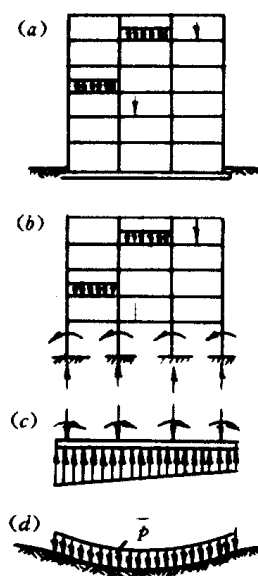


图 1-6

(a) 高层框架结构系统简图;
(b) 上部结构; (c) 基础结构;
(d) 地基计算高层框结构和系统不考虑共同作用的分析方法示意

上述完全不考虑共同作用的分析方法的弊端是显然的,但要完全克服却十分困难。于是便先不考虑上部结构(仅在绝对柔性 with 绝对刚性之间作定性估计),将按上述方法(图 1-6b)求出的柱底固端力作为作用于基础上的外荷载,在基础底面与地基土之间位移连续与协调的原则下,进行基础与地基两者的共同作用分析。由此发展起来的是弹塑性地基上的梁和板的理论,后来又进一步发展到筏基的分析和箱形基础的计算理论。

第三阶段分析方法是从 80 年代开始,伴随着结构分析的有限元法(特别是子结构分析技术)的进展和计算手段的极大改善,在力求从理论上解答工程实践中提出的各种问题的艰苦努力过程中逐步发展起来的。其主要特点是统一考虑上部结构、基础和地基三者的共同作用,从而比较真实地反映其实际工作状态。

三、高层建筑基础工程设计原则

在进行高层建筑基础工程设计时,首先必需有一个上部结构——基础——地基相互作用的整体观点,为确保建筑物的安全和正常使用,必须满足下述三方面要求:

1. 基底压力小于或等于地基的容许承载力;带桩基础要求基底总荷载小于或等于桩基承载力与桩间地基分担荷载的总和;
2. 地基计算变形量小于建筑物容许变形值;
3. 水平力作用时满足稳定要求。

这三个要求是基础工程设计的基本要求,对于重要程度或使用年限不同的建(构)筑物可分别对待。任何一个成功的基础工程设计都必须满足安全性、技术合理性、施工技术可行性和经济性这四项重要的技术指标。

第二章 梁式基础

第一节 概 述

当采用柱下单独基础在平面尺寸上受到限制而不能向一侧扩展;或当上部结构荷载比较大,而地基承载力又较低,需要较大的基础底面积;有时,也为了防止基础产生过大的不均匀沉降,使相邻柱下单独基础因面积扩大而使它们之间的净距小于基础宽度时,采用联合基础较为经济合理。一列柱下单独基础联合起来就形成柱下条形基础;交叉两列柱下条形基础联合形成柱下交叉梁条形基础,又称交梁基础(见图 1-1)。以上两者总称为柱下条形基础或梁式基础。

地基上梁的分析系经典课题,由于新的地基模型、分析方法和计算手段陆续出现,该课题至今仍在发展之中。高层建筑和超高层建筑较少采用梁式基础,一般常出现在多层建筑中,但是对于基础梁来说,分析方法相对简单,土与结构共同作用的概念易于阐明,数值方法的公式建立也容易表达得清楚。此外,筏基、箱基等更复杂问题的分析都是以基础梁的分析为基础的,并且实用中有时又简化为梁来计算。因此,研究地基与结构相互作用问题仍需从基础梁的分析开始。

第二节 梁式基础简化分析方法

一、静定分析法

这是一种已沿用很久的简化分析方法。如图 2-1 所示,先将柱端视为固端,经上部结构分析得到固端荷载 $P_1 \sim P_n, M_3$ 和 M_4 , 梁上可能还受有局部分布荷载 q 。假定基底反力呈直线分布,按静力平衡求出反力的最大值 $p_{\max}$ 和最小值 $p_{\min}$:

$$p_{\min}^{\max} = \frac{\sum P}{BL} \pm \frac{6\sum M}{BL^2} \quad (2-1)$$

式中 B, L ——梁的宽度和长度;

$\sum P$ 和 $\sum M$ ——分别为荷载(不包括梁自重和上覆土重)的合力和合力矩。

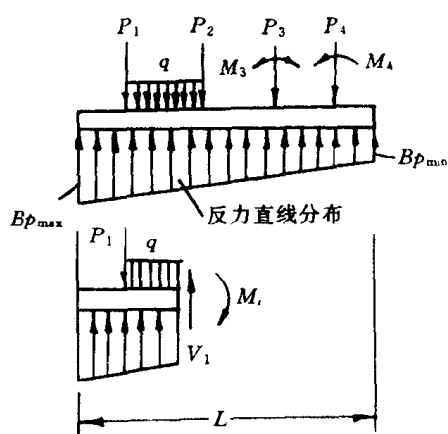


图 2-1 静定分析法示意

逐个控制截面截取隔离体,按静力平衡即可求出梁的内力。

二、倒梁法

基底反力的求法与静定分析法相同,不同之处在于分析梁内力时,把柱端视为铰支,以基底反力和扣除集中力(柱端处)以后的外荷载为荷载来分析多跨连续梁的内力(见图 2-2)。

显然,这样求得的支座反力与原柱荷载有一些不同,应予以修正。修正的方法是将支座反力与柱荷载的差值均匀地分布在该支座两侧各 $1/3$ 跨度内,作为基底反力的调整值,使反力分布呈阶梯状,然后重新计算,直至吻合为止。

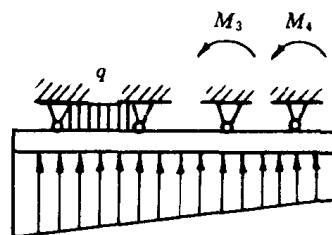


图 2-2 倒梁法示意

第三节 文克尔地基上梁的计算

上述静定分析法和倒梁法没有考虑基础梁与地基之间的共同作用,因此是比较粗略的计算。考虑地基与基础共同作用求解基础梁底面反力、位移及其内力时,首先要将实际工程中类型及性状各异的地基土理想化。使土特性理想化的最简单形式是假设地基土是线性弹性体。1867 年,捷克工程师文克尔(E. Winkler)在计算铁路钢轨时提出的弹簧地基模型就是最早和常用的一种,用此地基模型可求出基础梁的解析解。

一、文克尔基本假设

地基上任一点所受的压力强度 p 与该点地基变形量 s 成正比,该点地基变形量与其他各点压强无关,即:

$$p = ks \quad (2-2)$$

式中 p ——地基上任一点的压力强度;

k ——基床系数;

s ——压力作用点的地基变形量。

以上假设,实质上就是把地基看作是无数小土柱组成,并假设各土柱之间无摩擦力,即将地基视为无数不相联系的弹簧组成的体系。对某一种地基,基床系数为一定值,这就是著名的文克尔地基模型,如图 2-3 所示。

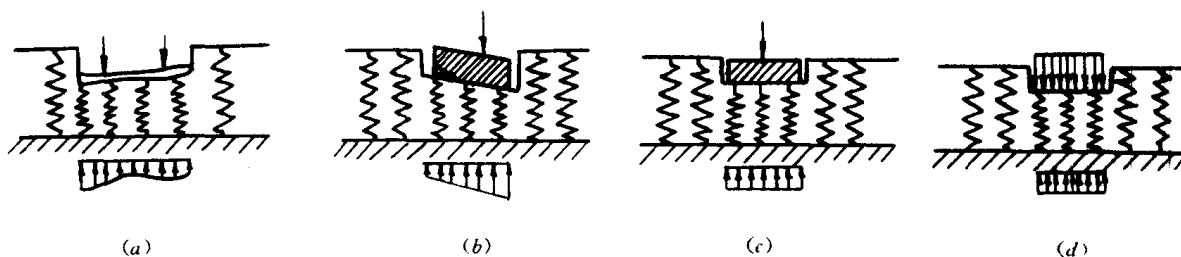


图 2-3 文克尔地基模型示意图

(a) 柔性基础; (b) 刚性基础受偏心荷载; (c) 刚性基础受中心荷载; (d) 柔性基础受均匀荷载

从模型上施加不同荷载情况可以看出,基底压力图形与基础的竖向位移图是相似的,绝对刚性基础因基底各点竖向位移呈线性变化,故其反力呈直线分布。

按照文克尔地基模型,地基的沉降只发生在基底范围以内,这与实际情况不符,如图 2-4 所示。其原因在于忽略了地基中的剪应力,而正是由于剪应力的存在,地基中的附加应力 σ_z 才能向旁扩散分布,使基底以外的地表发生沉降。因此,文克尔地基模型一般适用于抗剪强度很低的半液态土(如淤泥、软粘土等)地基,或基底下塑性区相对较大的情况以及厚度不超过梁或板的短边宽度之半的薄压缩层地基,因为在以上情况下土的剪应力不会很大。



图 2-4 文克尔地基变形与实际地基变形比较

(a)文克尔地基;(b)实际地基

二、基础梁挠曲线微分方程的建立

在文克尔地基上有一段截面梁,在外荷载作用下梁的挠曲线如图 2-5a 所示,梁底面的反力为 p ,从宽度为 B 的梁上取出长为 dx 的一小段梁元素(图 2-5b),其上作用着分布荷载 q 和基底反力 p 以及截面上的弯矩 M 和剪力 V ,其正方向如图所示。

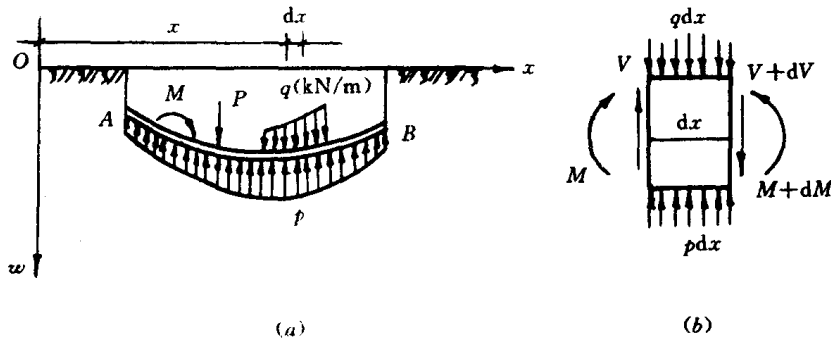


图 2-5 弹簧地基上的梁及梁元素受力分析

由梁元素的静力平衡条件有:

$$V - (V + dV) + pBdx - qdx = 0$$

由此得

$$\frac{dV}{dx} = Bp - q \quad (2-3)$$

根据材料力学,梁挠度 w 的微分方程为:

$$E_s J \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad (2-4)$$

将式(2-4)连续对 x 取两次导数后,利用 $V = \frac{dM}{dx}$ 可得:

$$E_h J \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = -Bp + q \quad (2-5)$$

根据接触条件,沿梁全长任一点地基变形应等于相应点的挠度,即 $s=w$, 则 $p=k w$

对于梁的无荷载段,式(2-5)变为

$$E_h J \frac{d^4 w}{dx^4} = -Bkw = -Kw \quad (2-6)$$

式中 E_h, J ——梁材料的弹性模量和截面惯性矩;

K ——梁单位长度上的集中基床系数; $K=kB$, k 为文克尔地基的基床系数。

令 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kB}{4E_h J}}$, 则式(2-6)可写为:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (2-7)$$

式(2-7)即为文克尔地基上梁(或称弹性地基梁)的挠曲微分方程式, λ 为文克尔地基梁的柔度特征值,单位为(长度⁻¹), λ 值越大,说明梁的刚度越小。

梁微分方程的通解为:

$$w(x) = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (2-8)$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 为待定常数,由边界条件确定。

三、几种情况的特解

(一)集中力作用下的无限长梁

如图 2-6(a)所示,坐标原点取在集中力 P_0 作用点处。当 $x \rightarrow \infty$, 有 $w \rightarrow 0$, 故式(2-8)中 $C_1 = C_2 = 0$ 。由于地基反力为对称,应有 $\left[\frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0$, 故又得到 $C_3 = C_4 = C$:

$$w = e^{-\lambda x} C (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (2-8a)$$

在 0 点右侧 $x = \epsilon$ (ϵ 为无穷小)处把梁切开,梁截面上剪力 $V = -E_h J \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right) \Big|_{x=\epsilon} = -\frac{P_0}{2}$, 故得到 $C = \frac{P_0 \lambda}{2K}$, 最终有:

$$\begin{cases} w = \frac{P_0 \lambda}{2K} A_x, & \theta = -\frac{P_0 \lambda^2}{K} B_x, \\ M = \frac{P_0}{4\lambda} C_x, & V = -\frac{P_0}{2} D_x \end{cases} \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad A_x &= e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x), & B_x &= e^{-\lambda x} \sin \lambda x \\ C_x &= e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x), & D_x &= e^{-\lambda x} \cos \lambda x \end{aligned} \quad (2-10)$$

θ ——梁截面转角。

函数 A_x, B_x, C_x, D_x 可查表 2-1。式(2-9)是对梁的右半部导出的。对 0 点左侧的截面, w, M 的正负号与式(2-9)相同。 θ, V 取相反符号, 见图 2-6a。

(二)集中力偶作用下的无限长梁

设顺时针方向的力偶 M_0 作用于原点(见图 2-6b)。由 $x \rightarrow \infty$ 时 $w \rightarrow 0$, 有 $C_1 = C_2 = 0$; 又由反对称性有 $C_3 = 0$ 。在 $x = \epsilon$ (ϵ 为无穷小)处切开, 由 $M = -E_h J \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_0}{2}$, 有 $C_4 = \frac{M_0 \lambda^2}{K}$, 于是得到: